

С. С. ХОРУЖИЙ

ВВЕДЕНИЕ
В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ
КВАНТОВУЮ
ТЕОРИЮ ПОЛЯ



С.С. ХОРУЖИЙ

ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ



МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.14
Х-82
УДК 517.986

Хоружий С.С. Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 304 с.

Систематическое изложение некоторых основных направлений релятивистской квантовой теории, ранее не освещавшихся в монографиях. Подробно представлены ставшие уже классическими результаты алгебраической аксиоматики квантовой теории поля. Показано, как на базе этой аксиоматики формируется современная алгебраическая квантовая теория поля, дающая эффективные средства строгого анализа многих актуальных моделей систем элементарных частиц. В аспекте математическом книга впервые детально излагает алгебраический аппарат релятивистской квантовой физики, составляющий в совокупности с аналитическим и теоретико-групповым аппаратом математическую основу современной квантовой теории.

Ил. 7. Библиогр. 367 назв.

Р е ц е н з е н т

доктор физико-математических наук, профессор *Д.П. Желобенко*

Сергей Сергеевич Хоружий

**ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ
КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ**

Редакторы *А.В. Булинский, Т.А. Панькова*
Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*
Технические редакторы *С.В. Геворкян, В.Н. Никитина*
Корректоры *Г.В. Барбашина, Т.В. Обод*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 12992

Сдано в набор 25.02.86. Подписано к печати 19.05.86
Формат 60 X 90 1/16. Бумага офсетная
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная. Усл.печ.л. 19,0
Усл.кр.-отт. 19,0. Уч.-изд.л. 22,98. Тираж 5500 экз.
Тип. зак. 140 Цена 2 р. 90 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"
630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25

© Издательство "Наука".
Главная редакция
физико-математической литературы,
1986

X 1702030000-108 27-86
053 (02)-86

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
Г л а в а 1	
АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ	7
§ 1. Введение. Алгебраический подход как локальная квантовая теория.	7
§ 2. Аксиомы алгебраического подхода	15
§ 3. Структура локальной квантовой теории: теоремы, вытекающие из аксиом	28
3.1. Локальная алгебра.	29
3.2. Соотношения зависимости	43
3.3. Дуальность	52
3.4. Причинная независимость и другие причинные свойства.	62
3.5. Свойства симметрии.	82
Г л а в а 2	
ОТ ТЕОРИИ НАБЛЮДАЕМЫХ К ТЕОРИИ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ	127
§ 4. Глобальная теория правил суперотбора.	127
§ 5. Локальная теория правил суперотбора: свойства эквивалентности когерентных секторов	146
§ 6. Программа построения полевой теории путем реконструкции зарядовых секторов. Метод морфизмов и коциклов	159
Г л а в а 3	
ПОЛЕВЫЕ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ.	174
§ 7. Op^* -алгебры полевых операторов и вакуумные правила суперотбора	174
7.1. Элементы теории Op^* -алгебр	181
7.2. Вакуумная структура квантовой теории поля	196
§ 8. Построение и свойства полевых алгебр фон Неймана	213
8.1. Различные способы определения и проблема локальности	213
8.2. Алгебры клиновидных областей: формализм Бизоньяно–Вичмана.	226
§ 9. Свободные и обобщенно свободные поля	246
ПРИЛОЖЕНИЕ. О построении алгебраической формулировки квантовой калибровочной теории	282
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.	288
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	302

ПРЕДИСЛОВИЕ

Алгебраический подход в квантовой теории поля насчитывает уже более четверти века своего существования, если датировать его появление докладом Р. Хаага на Лилльском Коллоквиуме 1957 года, где было впервые введено понятие алгебры локальных наблюдаемых. В 1961–1962 гг. он получил первое систематическое изложение в цюрихских лекциях Х. Араки и с тех пор занял прочное место в качестве одного из направлений аксиоматической квантовой теории поля наряду с S -матричной аксиоматикой Боголюбова и полевой аксиоматикой Вайтмана. Общей задачей всех этих направлений служил строгий, не использующий никаких приближенных методов или модельных предположений анализ структуры релятивистских квантовых систем. Алгебраический подход полагал в основу такого анализа принцип локальности и понятие локальной наблюдаемой — произвольной физической величины, допускающей измерение на опыте путем экспериментов в ограниченной области пространства-времени; и в соответствии с этим за ним утвердилось название *локальной квантовой теории*.

Шестидесятые годы — период расцвета аксиоматических исследований — принесли богатый набор результатов, являющихся строгими следствиями системы аксиом Хаага—Араки или Хаага—Кастлера (соответственно, двум вариантам алгебраического подхода, конкретному и абстрактному). Однако аксиомы заведомо не охватывали даже важнейших особенностей поведения квантовополевых систем: достичь описания такой системы, чисто аксиоматического по форме и в то же время достаточно полного, дающего и картину ее динамики, едва ли возможно даже в принципе. Поэтому на следующем этапе строгие методы квантовой теории поля, дополняясь принципиально новыми элементами, включают в свою сферу не только общие структурные исследования, но и анализ конкретных моделей, однако при этом утрачивают аксиоматический характер. Для вайтмановского подхода таким этапом явилась конструктивная теория поля, в дальнейшем соединившаяся с евклидовой и марковской теориями. В случае же алгебраического подхода центральной задачей служило его превращение в реалистическую полевую теорию: первоначальный формализм подхода не включал в себя понятия квантованного поля и соответственно не мог описывать многих существенных свойств, связанных с этим понятием, — античастиц, зарядового сопряжения, типов статистики и т.п. Внедрение всех этих понятий и свойств в

формализм теории локальных наблюдаемых сначала удалось осуществить (в цикле работ Доплихера, Хаага и Робертса 1969–1974 гг.) для класса систем, не включающих дальнедействующих сил, частиц нулевой массы и калибровочных полей. Был создан специальный аппарат, позволяющий по основному (вакуумному) состоянию системы и множеству ее локальных наблюдаемых строить физические состояния с нетривиальными значениями специфически полевых характеристик типа зарядов и внутренних квантовых чисел ("заряженные состояния", в обобщенном понимании заряда, точно определяемом в § 6). В рамках этого аппарата оказывается возможным дать определения всех величин, характеризующих систему квантованных полей, проверить выполнение основных свойств таких систем (связь спина и статистики, существование античастицы для каждой из частиц и т.п.), и, вообще говоря, даже построить сами поля, хотя процедура такого построения сложна и в общем случае еще не разработана до конца. Наконец, на новейшем этапе указанному аппарату удалось придать значительно более общую и гибкую форму, так что он сделался применим к весьма широкому спектру систем, включая и такие, которые по современным понятиям играют ведущую роль во взаимодействиях элементарных частиц: системы с топологическими зарядами, с фазовыми переходами, с массивными и безмассовыми калибровочными полями. При этом для каждого класса систем аппарат надлежащим образом модифицируется и позволяет учитывать конкретные особенности его структуры и динамики.

Создание методики, дающей строгое и в то же время достаточно детальное описание квантовополевой модели на базе множества ее локальных наблюдаемых, явилось одним из кардинальных достижений алгебраического подхода. Благодаря этой методике возникает новый угол зрения на общую структуру релятивистской квантовой системы, полевые характеристики таких систем получают конструктивные определения в терминах локальных наблюдаемых, а релятивистская квантовая теория в целом приобретает способ строгого изучения наиболее актуальных типов моделей. В составе же строгих методов современной квантовой теории поля, наряду с конструктивной, евклидовой и марковской теориями, окончательно оформляется как цельное направление *алгебраическая квантовая теория поля* — современная стадия локальной квантовой теории. Базу этой теории составляют: теоремы аксиоматического алгебраического подхода, методика реконструкции квантовополевых моделей по совокупности их локальных наблюдаемых, а также — нужно сюда добавить — формализм полевых алгебр, дающий описание алгебраической структуры систем, заданных с помощью семейства квантованных полей.

Построение нашей книги точно воспроизводит эту структуру теории: в главе 1 мы излагаем аксиоматический формализм, в главе 2 — методику перехода от множества локальных наблюдаемых к реалистической полевой теории, и в главе 3 — формализм полевых алгебр. Однако материал, требующий освещения, заведомо не укладывался

в рамки одного тома — особенно, если учесть, что в литературе не существует ни одной монографии по алгебраической квантовой теории поля. По этой причине многие результаты, относящиеся к проблематике глав 2 и 3, остались за пределами книги: так, в главе 2 мы даем лишь вводное изложение методики построения полевой теории и не рассматриваем конкретных примеров; в главу 3 не вошли алгебраические методы конструктивной теории поля, не вошел анализ полевых алгебр систем безмассовых частиц, в том числе и теория рассеяния Бухгольца для безмассовых частиц — несомненно, одно из самых красивых и эффективных применений формализма полевых алгебр. Обсуждение этих результатов, как мы надеемся, составит продолжение данной книги.

Аппарат алгебраической квантовой теории поля, как ясно уже из названия, основан всецело на методах теории алгебр. Физические монографии, активно использующие эти методы, традиционно включают особые разделы с изложением необходимых математических элементов. В нашем случае рамки объема книги, к сожалению, не допускали такого пути. Вспомогательный математический материал пришлось ограничить сводом определений (§ 1) и краткими пояснениями по ряду тем, выходящих за пределы общих основ "алгебр для физиков" (модулярная теория, спектральная теория Арвесона и др.). Более систематично дана лишь теория алгебр неограниченных операторов (п. 7.1), ибо она пока отсутствует в математических монографиях. Надеемся, однако, что эта незамкнутость книги компенсируется наличием почти всюду полных доказательств с точными ссылками на используемые математические факты. Последние в части теории алгебр редко выходят за рамки нескольких известных книг: Наймарка [[Н]], Диксмье [[Д, D]], Такесаки [[T1, 2]], Браттели и Робинсона [[БР]]. Что же касается физики, то здесь необходимые сведения — не считая, конечно, общей квантовой теории — по существу, ограничиваются аксиоматикой Вайтмана; для ссылок здесь взята за основу монография Боголюбова, Логунова и Тодорова [[БЛТ]]. Список литературы в конце книги содержит не только упоминаемые работы, но представляет собой библиографию алгебраической квантовой теории поля, куда мы старались включить все существенное для данного направления.

* *

*

Эта книга задумывалась и обсуждалась еще несколько лет назад совместно с В.Н. Сушко, сотрудничество с которым в течение многих лет было для меня самым полезным и плодотворным. Однако обстоятельства отложили написание книги, а в дальнейшем случилось так, что состояние здоровья лишило его возможности принять участие в работе над ней. Глубоко сожалея об этом, я приношу ему величайшую признательность. Я также благодарен А.В. Воронину, Ю.М. Зиновьеву и А.С. Холево за обсуждения отдельных разделов книги.

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД
КАК ЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Наша книга посвящена направлению, которое традиционно называется "алгебраический подход в квантовой теории поля". Однако в таком названии, указывающем только на некий тип используемого математического аппарата, сущность данного направления выражена отнюдь не полностью. Алгебраический подход в квантовой теории поля — это не только определенный математический аппарат, но еще и определенная физическая идеология. Коротко говоря, это есть направление, стремящееся к описанию релятивистской квантовой системы, — или, что то же по современным представлениям, системы квантованных полей — с помощью методов теории алгебр и в терминах наблюдаемых и состояний как основных исходных физических объектов. В этих своих главных чертах подход явился прямым аналогом и продолжением алгебраических формулировок нерелятивистской квантовой механики, развивавшихся еще с 20-х гг. фон Нейманом, Дираком, Йорданом. В первоначальный период в число определяющих принципов подхода входил и аксиоматический характер его построения. В дальнейшем, как уже отмечалось, этот характер утратился; из замкнутого аксиоматического формализма алгебраический подход превратился в один из современных динамических методов изучения конкретных квантовополевых систем. Однако результаты предшествующего этапа, принадлежа к разряду общих теорем, составляют строгий фундамент новых исследований. И на всех этапах базисными физическими понятиями остаются наблюдаемые и состояния.

Из сказанного ясно, что формулировка алгебраического подхода должна начинаться с определения и анализа этих понятий, с тем чтобы дать обоснование языка наблюдаемых и состояний как строгого и полного способа описания релятивистских квантовых систем. Ход такого обоснования определяется естественным образом: мы, очевидно, должны выяснить картину реальной экспериментальной ситуации в релятивистской квантовой физике, затем показать, что эта экспериментальная ситуация действительно приводит к понятиям наблюдаемой и состояния и может быть полностью описана на основе этих понятий, и, наконец, сопоставить наблюдаемым и состояниям, как базисным физическим величинам, определенные математические объекты. Математическая схема, возникающая в итоге такого сопоставления, и будет представлять собой фундамент алгебраического подхода. Мы не можем подробно излагать это дедуктивное построение (лежащее скорее в области интерпретации и концептуального анализа квантовой теории), но лишь наметим его основные шаги. Детальнее см. [[Э]], [A1; НК; NW; Ro2] .

Основными элементами экспериментальной ситуации служат изучаемая микросистема (как правило, некоторая конфигурация элементарных частиц) и макроскопический измерительный прибор, с которым система вступает во взаимодействие, вызывая в нем определенные изменения, доступные регистрации. По этим регистрируемым изменениям состояния прибора затем делают выводы о поведении и характеристиках системы. Поскольку же в квантовой теории подобные выводы всегда имеют характер статистических, вероятностных утверждений, то для их получения необходимо иметь в наличии значительное число копий изучаемой системы, т.е. определенный статистический ансамбль. Именно такой ансамбль и принято называть состоянием системы (что исторически восходит к Сигалу [Se1]). Понятно, что этот ансамбль и его поведение существенно зависят от того, каким способом, какой подготовительной процедурой он был получен. Поэтому в более полной форме можно сказать, что состояние есть процедура приготовления ансамбля и сам ансамбль как результат этой процедуры; или еще в иных терминах: состояние — это начальные условия квантовой системы перед экспериментальным актом. Например, в типичном квантовомеханическом эксперименте по дифракции электронов физическая система есть электрон; состояние системы есть статистический ансамбль, определяемый источником электронов, входящим в экспериментальную установку. В экспериментальном акте система подвергается различным внешним воздействиям, в результате каждого из которых ее состояние каким-то образом изменяется. Любое такое воздействие на систему, осуществляемое в течение конечного промежутка времени и вызывающее переход из некоторого начального состояния в конечное, принято называть *операцией*. Серия из конечного или бесконечного числа операций, в совокупности представляющая собой измерение определенной физической величины (а также в обычном словоупотреблении и сама эта величина), носит название *наблюдаемой*¹). Так, в дифракционном эксперименте наблюдаемые системы определяются экраном, на котором происходит детектирование частиц: если представлять этот экран как совокупность элементарных детекторов, каждый из которых может давать только сигналы "да" или "нет", то любой наблюдаемой будет отвечать некоторый набор положительных и отрицательных сигналов от данной системы детекторов.

Из этих определений ясно, что мы сможем восстановить всю совокупность экспериментальных данных о квантовой системе, если будет задано множество всех состояний системы и множество всех ее наблюдаемых, а также распределение вероятностей допустимых значений каждой из наблюдаемых в каждом из состояний. В этом смысле формализм наблюдаемых и состояний дает заведомо полное описание системы. Однако в физической теории присутствует и другое, более сильное понятие полноты описания: помимо описания экспериментальных данных, т.е. *внешних проявлений* исследуемой системы, желательно знать и ее *внутреннюю динамику*, ме-

¹) В этой общепринятой трактовке понятие операции является более элементарным, чем понятие наблюдаемой, и связано с менее ограничительными представлениями о физическом приборе. В этой связи существуют попытки развивать формализм алгебраического подхода на основе понятия операции (см., например, [НК; Ro 2]). Однако в терминах наблюдаемых более естественно выражаются фундаментальные свойства локальности и локализованности, присущие квантовополевым системам.

ханизмы протекающих в ней взаимодействий. Теории, которые обеспечивают полноту не только внешнего, но и внутреннего описания, называются *динамическими теориями*; они имеют в своем составе динамический аппарат, включающий, вообще говоря, наряду с наблюдаемыми также и ненаблюдаемые величины (так, динамический аппарат квантовой теории поля включает в себя ненаблюдаемые ферми-поля). Поэтому встает принципиальный вопрос: может ли формализм наблюдаемых и состояний дать динамическую теорию релятивистских квантовых явлений? Ответ на этот вопрос выясняется лишь в ходе развития алгебраического подхода. Первоначально на стадии аксиоматического формализма (гл. 1) подход заведомо не является динамической теорией; однако в дальнейшем он успешно трансформируется в нее. Эта трансформация будет нашей основной темой в главе 2.

Все сказанное учитывает пока только общие особенности всей квантовой теории в целом, как релятивистской, так и нерелятивистской. Отличия релятивистских систем в полном объеме, конечно, выявятся лишь постепенно; однако одна их фундаментальная черта выступает уже и на самой исходной стадии, накладывая свой отпечаток на всю концептуальную, а затем и математическую структуру алгебраической квантовой теории поля. Эта черта — локальность, которая в свою очередь складывается из двух свойств: локализованности и причинности. Первое свойство означает, что, поскольку всякий физический эксперимент осуществляется в конечной области пространства-времени, то любая физическая величина, непосредственно определяемая из эксперимента, также относится к некоторой такой области (локализована в ней). Далее, поскольку скорость распространения любого сигнала не превышает скорости света, то любые процессы, протекающие во взаимно пространственноподобных областях, не могут оказывать влияния друг на друга (принцип причинности Эйнштейна). Как следствие этого, любая наблюдаемая должна быть также причинной, т.е. совместимой с любой другой наблюдаемой, если области локализации двух наблюдаемых взаимно пространственноподобны. Указанные свойства локализованности и причинности наблюдаемых в совокупности составляют фундаментальное понятие "локальной наблюдаемой" — центральное понятие алгебраического подхода в квантовой теории поля.

В итоге все множество $\mathfrak{A}_{\text{obs}}$ наблюдаемых релятивистской квантовой системы разбивается на совокупности $\mathfrak{A}_{\text{obs}}(O)$ наблюдаемых, принадлежащих ограниченному областям O пространства-времени¹⁾. Каждая такая совокупность включает в себя все наблюдаемые, измеримые в области O и совместимые с наблюдаемыми из всякой совокупности $\mathfrak{A}_{\text{obs}}(O_1)$, если O_1 пространственноподобна O . Иными словами, разбиение $\mathfrak{A}_{\text{obs}} = \bigcup_O \mathfrak{A}_{\text{obs}}(O)$

есть распределение множества всех наблюдаемых по признаку их локализованности. Но, вообще говоря, помимо этого фундаментального признака, наблюдаемые могут характеризоваться и другими физическими признака-

¹⁾ На практике бывает удобным условно причислять к наблюдаемым также суммарные, глобальные характеристики физической системы типа полного заряда, полной энергии-импульса и т.п., получаемые из локальных величин (которые лишь одни реально измеримы на опыте) путем тех или иных предельных операций. В этом смысле говорят о "квазилокальных" и "глобальных" наблюдаемых, имея в виду некоторые пределы последовательностей истинных, т.е. локальных наблюдаемых.

ми, и по этим признакам наблюдаемые, лежащие внутри одной и той же совокупности $\mathfrak{A}_{\text{obs}}(O)$, еще могут отличаться друг от друга. Следовательно, полное задание множества всех наблюдаемых конкретной квантовой системы в принципе должно включать в себя задание распределения этого множества не только по свойству локализованности, но и по всем другим свойствам. Но в данном пункте концептуальная структура алгебраического подхода дополняется еще одним важным допущением: предполагают, что для получения полного описания нет необходимости задавать какие-либо другие сведения о наблюдаемых помимо их локализации. О множестве наблюдаемых не нужно знать ничего, кроме его локальной структуры, т.е. разбиения $\mathfrak{A}_{\text{obs}} = \bigcup_O \mathfrak{A}_{\text{obs}}(O)$. Иначе говоря, все содержание физической

теории заключается в соответствии: $O \rightarrow \mathfrak{A}_{\text{obs}}(O)$, задающем распределение наблюдаемых по их локализованности в пространстве-времени. И это означает также, что на исходной стадии алгебраического подхода не делается никаких различий между наблюдаемыми, принадлежащими к одной и той же области O^1); так что истинным объектом изучения здесь выступает не отдельно взятая наблюдаемая, а совокупность $\mathfrak{A}_{\text{obs}}(O)$ всех локальных наблюдаемых заданной области.

По своей сути указанная особенность — пренебрежение всеми другими признаками индивидуальной наблюдаемой, помимо локальности, — есть очередная идеализация, совершаемая на пути построения алгебраического подхода. Разумеется, подобные идеализации и абстракции — необходимый элемент при построении всякой физической теории (и наши рассуждения фактически уже не раз опирались на них; в частности, очевидной абстракцией было понятие "физической системы" как части Вселенной, изолированной от внешнего мира). Однако всякий раз их появление нуждается в прочном обосновании. В нашем случае мы получаем такое обоснование, вновь обращаясь к экспериментальной ситуации квантовой теории. Мы замечаем, что в своей непосредственной, первичной форме экспериментальные данные всегда носят характер данных о свойствах локализации микрообъектов. То, что регистрируют датчики, счетчики, детекторы в экспериментальных установках, — это всегда факт обнаружения частицы в определенной области пространства-времени. Почернение эмульсии на фотопластинке, трек в пузырьковой камере, интерференционные полосы на экране — все это суть геометрические, пространственно-временные факты, и эксперимент в физике элементарных частиц принципиально не доставляет нам фактов иной природы²⁾. Как констатировали основатели алгебраического подхода Хааг и Кастлер, "в конечном итоге, все физические

¹⁾ Разумеется, это не означает, что алгебраический подход отрицает существование таких различий или ограничивает свою сферу лишь теми системами, где их нет (в частности, исключая тем самым все поля и частицы с внутренними степенями свободы). Но данный подход принимает на исходной стадии (и доказывает практически на последующих стадиях), что возможно развить полное описание системы, не включая указанных различий в начальную информацию.

²⁾ Снова полезно уточнить: речь идет только о характере первичных самообнаружений микрообъектов. Однако подобные самообнаружения способны нести в себе вполне однозначную информацию и о таких параметрах этих объектов, которые уже не носят пространственно-временного характера: скажем, о поляризациях частиц или проекциях их спинов, как в классическом опыте Штерна — Герлаха.

процессы анализируются только в терминах геометрических соотношений между явлениями, которые сами по себе остаются неопределенными” [НК]. Опыт существования алгебраического подхода, получаемые в нем результаты на практике подтверждают эти положения, наглядно показывая, что задания множества локальных наблюдаемых достаточно для восстановления всей физически существенной информации о системе. Как далее мы увидим, такое задание не только фиксирует результаты возможных экспериментов, но и дает возможность вывести более глубокие динамические сведения о механизмах взаимодействия в системе и отвечающих ей квантованных полях, хотя последние, вообще говоря, не принадлежат к наблюдаемым величинам.

* *

*

Итак, мы определили базисные физические величины алгебраического подхода — наблюдаемые и состояния — и выяснили, что основной особенностью формализма наблюдаемых и состояний в релятивистской квантовой теории является принцип локальности. В силу этого принципа все наблюдаемые локализованы в ограниченных областях пространства Минковского, и главным физическим объектом выступает не отдельная наблюдаемая, но объект, который было бы естественно называть локальной структурой — множество всех наблюдаемых определенной области O с наложенными на это множество фундаментальными физическими условиями (аксиомами).

В итоге алгебраический подход в своих основаниях может быть определен как общая алгебраическая теория локальных структур релятивистской квантовой физики, или, как говорят короче, подразумевая это же содержание, **локальная квантовая теория**. Как таковой, он фиксируется заданием всей совокупности указанных структур — фундаментальным соответствием

$$O \rightarrow \mathfrak{A}_{\text{obs}}(O),$$

сопоставляющим каждой ограниченной области пространства-времени множество всех наблюдаемых, которые можно определить посредством экспериментов в этой области.

Прежде чем переходить к математической формулировке теории, введем

Основные определения. А. *Алгебра* есть линейное пространство $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, наделенное ассоциативной и дистрибутивной операцией умножения: $A, B \in \mathcal{A} \rightarrow AB \in \mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *коммутативной* или *абелевой*, если $AB = BA$; *инволютивной* или **-алгеброй*, если в $\mathcal{A}$ существует *инволюция*, т.е. антилинейное отображение $A \rightarrow A^*$ из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$ такое, что $A^{**} = A$; $(AB)^* = B^* A^* \quad \forall B \in \mathcal{A}$; **-подалгеброй* *-алгебры $\mathfrak{B}$, если $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}$, и $\mathcal{A}$ — *-алгебра по отношению к операциям в $\mathfrak{B}$. Элемент $A \in \mathcal{A}$ называется *единицей*, если $AB = BA = A$ для всех $B \in \mathcal{A}$; *эрмитовым*, если $A^* = A$; *положительным* ($A \geq 0$), если $A = B^* B$, где $B \in \mathcal{A}$ (ср. однако с.176). Множество $\mathcal{A}^+$ всех положительных элементов назы-

(окончание сноски)

Такие параметры, естественно, также рассматриваются как измеримые на эксперименте.

вается *положительным конусом* $\mathcal{A}$. Подпространство $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ называется *левым (правым, двусторонним) идеалом*, если $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{I}$ влечет $AB \in \mathcal{I}$ (соответственно $BA \in \mathcal{I}$ и $AB \in \mathcal{I}$, $BA \in \mathcal{I}$); *максимальным (минимальным) идеалом*, если $\mathcal{I}$ не вложен в (соответственно в $\mathcal{I}$ не вложен) ни один идеал того же класса, отличный от $\{0\}$ и $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}$ есть $*$ -алгебра и банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Тогда $\mathcal{A}$ называется B^* -алгеброй, если $\|A^*\| = \|A\|$ для всех $A \in \mathcal{A}$; C^* -алгеброй, если $\|A^*A\| = \|A\|^2$; W^* -алгеброй, если $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_*)^*$ ($\mathcal{A}_*$ — некоторое банахово пространство, $(\mathcal{A}_*)^*$ — его топологически дуальное; при этом $\mathcal{A}_*$ называется *преддуалом* $\mathcal{A}$). Всякая W^* -алгебра есть и C^* -алгебра; всякая C^* -алгебра есть и B^* -алгебра. N^* -алгебра $\mathcal{A}$ ($N = B, C, W$) называется *простой*, если в ней нет замкнутых двусторонних идеалов, кроме $\{0\}$ и $\mathcal{A}$. Элементы дуального пространства $\mathcal{A}^*$ N^* -алгебры $\mathcal{A}$ — линейные непрерывные функционалы на $\mathcal{A}$. Функционал $\omega \in \mathcal{A}^*$ называется *положительным*, если $A \geq 0$ влечет $\omega(A) \geq 0$, *точным*, если $A \geq 0$, $\omega(A) = 0$ влечет $A = 0$, и *состоянием*, если ω положителен и его норма равна 1; множество всех положительных функционалов обозначается $\mathcal{A}^{*+}$, всех состояний — $\mathcal{A}_1^{*+}$. Если $\omega = \lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2$ (*), где $\lambda \in (0, 1)$, $\omega, \omega_{1,2} \in \mathcal{A}_1^{*+}$, то состояния $\omega_{1,2}$ называются *подчиненными* ω (символ: $\omega_{1,2} < \omega$); если (*) влечет $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, состояние ω называется *чистым* или *неразложимым*, в противном же случае — *смешанным* (смесью).

W. Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ — алгебры соответственно всех ограниченных и всех скалярных (кратных единичному I) операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. На $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ даны топологии: *равномерная, слабая, сильная, ультраслабая и ультрасильная*, определяемые соответственно операторной нормой и полунормами: $|(\xi, A\eta)|$,

$\|A\xi\|$, $\sum_{i=1}^{\infty} |(\xi_i, A\eta_i)|$, $(\sum_{i=1}^{\infty} \|A\xi_i\|^2)^{1/2}$, где $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; $\xi, \eta, \xi_i, \eta_i \in$

$\mathcal{H}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \|\eta_i\|^2 < \infty$, $\|\cdot\|$ — норма вектора или опера-

тора в $\mathcal{H}$. Для $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ множество $\mathcal{M}'$ всех элементов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, коммутирующих со всеми элементами $\mathcal{M}$, называется *коммутантом* $\mathcal{M}$. $*$ -подалгебра $R \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такая, что $R = R''$, называется *алгеброй фон Неймана*. Всякая W^* -алгебра $*$ -изоморфна некоторой алгебре фон Неймана, и оба термина будем употреблять синонимично. Множество $\mathcal{Z} = R \cap R'$ называется *центром* R ; если $\mathcal{Z} = \mathcal{C}(\mathcal{H})$, то R называется *фактором*. Если $\mathcal{A}$ — $*$ -подалгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathfrak{M}$ — линеал (линейное множество) в $\mathcal{H}$, пусть $P_{\mathfrak{M}}^{\mathcal{A}}$ — проектор на подпространство $\mathcal{H}_{\mathfrak{M}}^{\mathcal{A}} = \overline{L\{\mathcal{A}\mathfrak{M}\}}$ (черта — символ замыкания в $\mathcal{H}$, $L(X)$ — линейная оболочка множества X). Вектор $\Phi \in \mathcal{H}$ называется *тотализатором* или *циклическим вектором* R , если $\mathcal{H}_{\Phi}^R = \mathcal{H}$; *сепаратором* или *разделяющим вектором* R , если $A\Phi = 0$ для $A \in R$ влечет $A = 0$; *бициклическим*, если Φ — тотализатор и сепаратор. Говорят, что замкнутый оператор T *присоединен* к R , и пишут $T\eta R$, если T коммутирует со всеми унитарными операторами из R' . Для проектора $P \in R(R')$ множество R_P всех сужений $PAP|_{P\mathcal{H}}$, $A \in R$, есть алгебра фон Неймана, называемая *редукцией*

(индукцией) R ; обозначают $R'_P \equiv (R_P)'$. Проектор $P_{P\mathcal{H}}^{\mathcal{L}'} \in \mathcal{L}$ называется *центральным носителем* проектора $P \in R$. Пусть E, F, F' — проекторы в R . Говорят, что E эквивалентен F , и пишут $E \sim F \bmod R$, если $E = W^* W$, $F = W W^*$ для некоторого $W \in R$; E мажорирует F ($E \succ F \bmod R$), если $E \sim F' \geq F$ (т.е. $F'\mathcal{H} \supset F\mathcal{H}$) для некоторого F' . Проектор E называется *конечным*, если $E \sim F \leq E$ влечет $F = E$; *бесконечным* — в противном случае; *чисто бесконечным*, если E не мажорирует никакого конечного проектора; *абелевым*, если R_P абелева; *минимальным*, если $R_P = \mathcal{C}(\mathcal{H})$. R называется *конечной*, *бесконечной*, *чисто бесконечной*, если данное свойство имеет единичный проектор $I \in R$; *σ -конечной*, если любая система ее взаимно ортогональных проекторов не более чем счетна; *собственно бесконечной*, если все ненулевые проекторы из $\mathcal{L}$ бесконечны; *непрерывной*, если всякий ее проектор есть сумма двух эквивалентных взаимно ортогональных проекторов; *дискретной* или *типа I*, если R изоморфна W^* -алгебре с абелевым коммутантом; *типа II*, если R непрерывна и не чисто бесконечна; *типа I_n (I_∞)*, если R — типа I и конечна (бесконечна); *типа II_1 (II_∞)*, если R — типа II и конечна (бесконечна); *полуконечной*, если R — типа I или II; *типа III*, если R чисто бесконечна. Если Ω — бициклический вектор R , множество $\mathcal{U} = R\Omega$, снабженное умножением $\xi_i = A_i\Omega$ ($A_i \in R, i = 1, 2$) $\rightarrow \xi_1\xi_2 = A_1A_2\Omega$ и инволюцией $\xi = A\Omega \rightarrow \xi^\# = A^*\Omega$, называется *совершенной обобщенной гильбертовой алгеброй* (СОГА). Инволюция $\xi \rightarrow \xi^\#$ продолжима до замкнутого антилинейного оператора S , область определения которого, пополненная по скалярному произведению $(\xi_1, \xi_2)_\# = (\xi_1, \xi_2) + (S\xi_2, S\xi_1)$, есть гильбертово пространство $\mathcal{D}^\#$. Идентично, $S^* \equiv F$ определяет скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_\flat$, гильбертово пространство $\mathcal{D}^\flat$ и инволюцию $\eta = T\Omega \rightarrow \eta^\flat = F\eta = T^*\Omega$, $T \in R'$, в СОГА $\mathcal{U}' = R'\Omega$. В полярном разложении $S = J\Delta^{1/2}$ антиунитарный оператор J называется *модулярной инволюцией* пары (R, Ω) и таков, что $JRJ = R'$; положительный самосопряженный оператор Δ называется *модулярным оператором* пары (R, Ω) и таков, что $\Delta^{it} \cdot \Delta^{-it}$ ($t \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$) — ультраслабо непрерывная группа автоморфизмов R , оставляющая Ω инвариантным и называемая *модулярной группой* пары (R, Ω) [[T1; БР, § 2.5]]. Ультраслабо непрерывные функционалы на R называются *нормальными*; их множество совпадает с преддуалом $R_* \subset R^*$. Состояния на R вида $\omega_\Phi = (\Phi, \cdot\Phi)$, где $\|\Phi\| = 1$ (т.е. $\Phi \in S_1$, S_1 — единичная сфера в $\mathcal{H}$), называются *векторными*; проектор $P_\Phi^{R'}$ называется *носителем* ω_Φ , а множество $\mathfrak{M}_\Phi^R = \{\chi \in S_1 \mid (\chi, A\chi) = (\Phi, A\Phi) \ \forall A \in R\}$ — *прообразом* ω_Φ . Функция $\omega: R^+ \rightarrow [0, \infty]$ называется *весом* на R , если $\omega(A+B) = \omega(A) + \omega(B)$, $\omega(\alpha A) = \alpha\omega(A)$, $A, B \in R^+$, $\alpha \in \mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ (считаем $0 \cdot \infty = 0$); *следом* на R , если, кроме того, $\omega(A^*A) = \omega(AA^*) \ \forall A \in R$. Вес ω называется *нормальным*, если $A = \sum_{i=1}^\infty A_i$, $A, A_i \in R^+$, влечет $\omega(A) = \sum_{i=1}^\infty \omega(A_i)$; *полуконечным*, если линейная оболочка всех $A \in R^+$ таких, что $\omega(A) < \infty$, ультраслабо плотна в R ; *точным*, если $\omega(A) = 0$ влечет $A = 0$. Точный нор-

мальный полуконечный вес ω на R обобщением конструкции ГНС (см. п. С) определяет гильбертово пространство $\mathcal{H}_\omega$ и в нем алгебру фон Неймана R_ω , изоморфную R и обладающую бициклическим вектором Ω_ω ; пара $(R_\omega, \Omega_\omega)$ определяет модулярный оператор Δ_ω со спектром $\sigma(\Delta_\omega)$. Фактору R сопоставляется множество $S(R) = \bigcap_{\omega \in \Gamma} \sigma(\Delta_\omega)$ (Γ —

множество всех точных нормальных полуконечных весов на R), и говорят, что R — типа III_1 , если $S(R) = [0, \infty)$; типа III_λ , если $S(R) = \{0\} + \lambda^n$, $\lambda \in (0, 1)$, $n = 1, 2, \dots$; типа III_0 , если $S(R) = \{0, 1\}$ ([C]; [[БР]], § 2.7.3).

С. Отображение $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ C^* -алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ называется $*$ -морфизмом, если ρ линейно, сохраняет инволюцию и умножение; $*$ -изоморфизмом, если ρ , кроме того, взаимно однозначно; $*$ -автоморфизмом, если, кроме того, $\mathcal{B} = \rho(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Представление $\mathcal{A}$ есть пара $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$, где $\mathcal{H}_\pi$ — гильбертово пространство, π — $*$ -морфизм $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$; $\mathcal{H}_\pi$ называется пространством представления, алгебра $\pi(\mathcal{A})$ — его образом, множество $\ker \pi = \{A \in \mathcal{A} \mid \pi(A) = 0\}$ — его ядром. Представление называется точным, если π — $*$ -изоморфизм; невырожденным, если $\{\chi \in \mathcal{H}_\pi \mid \pi(\mathcal{A})\chi = \{0\}\} = \{0\}$; циклическим, если $\pi(\mathcal{A})$ имеет тотализатор; неприводимым, если $\pi(\mathcal{A})' = \mathcal{C}(\mathcal{H})$; факторным, если $\pi(\mathcal{A})''$ — фактор; нормальным, если $\mathcal{A}$ — W^* -алгебра и π ультраслабо непрерывно. Говорят, что представление $(\pi, \mathcal{H})$ — прямая сумма представлений $(\pi_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$, и пишут $\pi = \bigoplus_\alpha \pi_\alpha$, если $\mathcal{H} = \bigoplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha$, $\pi(A)|_{\mathcal{H}_\alpha} = \pi_\alpha(A) \quad \forall \alpha, \forall A \in \mathcal{A}$; аналогично определяется прямая сумма $\bigoplus_\alpha R_\alpha$ алгебр фон Неймана R_α . Каноническое соответствие $\omega \longleftrightarrow \pi_\omega$

между состояниями и циклическими представлениями C^* -алгебры [[Д, § 2.4]] называется конструкцией ГНС (Гельфанда–Наймарка–Сигала). Пусть $(\pi_i, \mathcal{H}_i)$, $i = 1, 2$, — представления $\mathcal{A}$. Ограниченный оператор $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ такой, что $T\pi_1(A) = \pi_2(A)T \quad \forall A \in \mathcal{A}$, называется оператором переплетения π_1 и π_2 . Проектор $P_i = P_{\mathcal{H}_i}^{\mathcal{Z}'}$ в $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, где $\mathcal{Z}'$ — центр $[(\pi_1 \oplus \pi_2)(\mathcal{A})]''$, называется центральным носителем π_i . Говорят, что π_1 и π_2 унитарно эквивалентны и пишут $\pi_1 \simeq \pi_2$, если существует изометрический оператор переплетения π_1 и π_2 ; квазиэквивалентны ($\pi_1 \approx \pi_2$), если $P_1 = P_2$; дизъюнктны ($\pi_1 \dot{\cup} \pi_2$), если $P_1 P_2 = 0$; слабо или физически эквивалентны ($\pi_1 \sim \pi_2$), если $\ker \pi_1 = \ker \pi_2$. Пусть $\mathcal{B} \subset \pi(\mathcal{A})'$ — абелева алгебра фон Неймана. Существуют борелевское пространство Z и положительная мера ν на Z такие, что пространство $\mathcal{H}$ и алгебра $\mathcal{B}'$, а также любая ее подалгебра фон Неймана, в частности $\pi(\mathcal{A})''$, могут быть представлены в виде интегральных разложений

$$\mathcal{H} \simeq \int^\oplus \mathcal{H}_\xi d\nu(\xi), \quad \mathcal{B}' \simeq \int^\oplus \mathcal{B}'_\xi d\nu(\xi), \quad \pi(\mathcal{A})'' \simeq \int^\oplus \pi(\mathcal{A})''_\xi d\nu(\xi), \quad \xi \in Z, \quad (1.1)$$

где наборы $\{\mathcal{H}_\xi\}$ и $\{\mathcal{B}'_\xi\}$, $\xi \in Z$, называются полями гильбертовых пространств и алгебр фон Неймана соответственно, а интегралы — прямыми интегралами этих полей; их точные определения см. [[Д, гл. II]]. Операторы из $\mathcal{B}$ скалярны в каждом из пространств $\mathcal{H}_\xi$ и называются диагона-

лизуемыми операторами для разложений (1.1), а операторы из $\mathcal{B}'$ — разложимыми операторами. Если $\mathcal{B}$ — максимальная абелева подалгебра $\pi(\mathcal{A})'$, (1.1) дает разложение представления π (алгебры $\pi(\mathcal{A})''$) на неприводимые представления (алгебры фон Неймана): $\pi(\mathcal{A})''_{\xi} = \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\xi})$ почти всюду по мере ν ; если $\mathcal{B}$ — центр $\pi(\mathcal{A})''$, (1.1) есть разложение представления π (алгебры $\pi(\mathcal{A})''$) на факторные представления (факторы): $\pi(\mathcal{A})''_{\xi}$ есть фактор почти всюду по мере ν ; в этом случае (1.1) называется *центральным разложением* π или $\pi(\mathcal{A})''$. В частном случае, когда Z — дискретное множество, разложения (1.1) принимают вид прямых сумм.

§ 2. АКСИОМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Мы выяснили вкратце физическую картину алгебраического подхода как формализма наблюдаемых и состояний. Следующим шагом должна быть проделана математическая идентификация этой картины: сопоставление ее основным структурным элементам определенных математических объектов. Идентификация, принимаемая в алгебраическом подходе, весьма проста, и мы могли бы сформулировать ее с самого начала: наблюдаемые отождествляются с эрмитовыми элементами C^* -алгебры или же алгебры фон Неймана; состояния же отождествляются с состояниями на этой алгебре. Однако возникает вопрос: является ли данная идентификация произвольной, принимаемой ради удобства, — или же она может быть дедуцирована из общих свойств квантовых процессов и квантовых измерений? Как известно, в квантовой механике подобная дедукция общепринятого математического формализма является центральной задачей особого направления, обычно называемого аксиоматической квантовой механикой. Здесь выдвинут ряд систем аксиом, фиксирующих основные особенности акта квантового измерения и позволяющих строго вывести из этих аксиом традиционную схему квантовой механики в гильбертовом пространстве (см., например, [[J]]). Для алгебраического подхода в квантовой теории поля аналогичная программа пока не осуществлена столь же систематически, и мы не будем подробно разбирать имеющиеся частичные результаты [H6; A10; Нер; Ва; ME; NW]. Вместо этого мы заметим, что нетрудно указать несколько простых физических свойств формализма наблюдаемых и состояний, которые в совокупности весьма близко подводят нас к математической структуре подхода, хотя и не дают еще ее однозначного вывода.

Основные структурные элементы формализма наблюдаемых и состояний уже выделены выше. Как мы видели, сюда входят: множество $\mathcal{A}$ наблюдаемых квантовой системы и множество Σ ее состояний — распределение вероятностей всех наблюдаемых во всех состояниях. Какие же ограничения на математическую идентификацию этих элементов накладываются физическими свойствами последних? Прежде всего, статистическая интерпретация квантовой теории говорит нам, что распределение вероятностей, описывая предсказания теории, выполняет роль связующего звена между наблюдаемыми и состояниями: каждой паре, состоящей из наблюдаемой и состояния, это распределение сопоставляет вещественное число — математическое ожидание данной наблюдаемой в данном состоянии. Иначе говоря, распределение вероятностей определяет некоторое отношение

двойственности между множеством наблюдаемых и множеством состояний. Благодаря этому, если выбрана математическая идентификация для множества наблюдаемых $\mathcal{A}$, то множество состояний Σ определится как дуальный объект в смысле указанного отношения двойственности, задаваемого вероятностной интерпретацией теории. Далее, трактовка состояний системы как статистических ансамблей предполагает, что состояния нормируемы, и на их множестве имеет место принцип суперпозиции: нормированные линейные комбинации состояний с положительными коэффициентами ("смеси") должны вновь принадлежать множеству состояний. Это означает, что множество всех состояний является выпуклым, а множество их линейных комбинаций с положительными коэффициентами образует выпуклый конус. Наконец, на множестве всех наблюдаемых должна быть определена композиция (поскольку последовательное определение наблюдаемой B и затем наблюдаемой A снова есть некоторая наблюдаемая), и эта композиция, в общем случае, должна быть некоммутативной (ибо квантовые наблюдаемые могут быть несовместимы между собой). В совокупности все эти условия существенно сужают набор приемлемых идентификаций и ясно показывают, что для множества наблюдаемых наиболее естественной является структура некоммутативной алгебры. Они, однако, не говорят ничего о том, из какого класса следует выбирать эти алгебры: должны ли они быть ассоциативными, инволютивными, нормированными и т.д. Чтобы продвинуться дальше, необходимо использовать более детальные свойства квантовых измерений; но даже и с привлечением такой информации в выборе математических объектов еще остается некоторый произвол, которым распоряжаются, исходя из соображений технического удобства. Как резюмировал Р.Хааг в одном из последних обсуждений этой проблемы, "математическая структура ортодоксальной квантовой теории возникает, если к основной концептуальной отправной точке, т.е. статистическому описанию идеализированных экспериментов, добавить принцип T -инвариантности и некоторые допущения максимальной простоты" [Н6].

Итак, соединение физических аргументов с аргументами удобства и простоты дает нам стандартный постулат идентификации: каждой наблюдаемой отвечает эрмитов элемент нормированной $*$ -алгебры, называемой *алгеброй наблюдаемых*; каждому состоянию отвечает состояние на этой алгебре, значения которого на элементах алгебры дают ожидания наблюдаемых. По сути этот постулат — тот же, что и в обычной квантовой механике, где еще Дираком и фон Нейманом была развита идея о том, что для множества наблюдаемых естественна структура алгебры, а каждой отдельной наблюдаемой можно сопоставить самосопряженный (ввиду вещественности измеряемых значений наблюдаемых) оператор в гильбертовом пространстве. Как было тогда же замечено, вводя на множестве $\mathcal{A}_h$ эрмитовых элементов алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$ операцию умножения $A, B \in$

$\mathcal{A}_h \rightarrow A \circ B = \frac{1}{2} (AB + BA)$, можно рассматривать в качестве алгебры

наблюдаемых непосредственно $\mathcal{A}_h$, не переходя к $\mathcal{A}$. Множество $\mathcal{A}_h$ с операцией $A \circ B$ есть коммутативная, неинволютивная и неассоциативная алгебра, называемая *йордановой алгеброй*. Однако подобные схемы не получили большого развития, ибо они встречают много математических трудностей, не окупаемых достаточными физическими преимуществами

(впрочем, успехи теории йордановых алгебр в последний период могут несколько изменить эту ситуацию; ср. [[Э; САХЧ]]). Другое замечание касается устранения из математической схемы неограниченных операторов. Понятно, что, выбирая алгебры наблюдаемых из класса нормированных алгебр, мы должны рассматривать в качестве операторов наблюдаемых только ограниченные операторы — но в квантовой теории, как известно, большинство важнейших наблюдаемых представляется неограниченными операторами, а для наблюдаемых типа координаты и импульса, удовлетворяющих каноническим перестановочным соотношениям, возможность представления ограниченными операторами заведомо исключена. Данное обстоятельство не вызывает проблем, если все операторы наблюдаемых самосопряжены: в этом случае можно взаимно однозначно сопоставить неограниченному оператору семейство ограниченных операторов — его спектральных проекций; последние будут порождать фон-нейманову алгебру наблюдаемых, а сами "неограниченные наблюдаемые" будут операторами, присоединенными к этой алгебре. Однако чаще всего операторы наблюдаемых бывают первоначально заданы только как симметрические операторы; обычно им можно сопоставить некоторые самосопряженные расширения, но это уже, по большей части, весьма неоднозначная процедура. В итоге можно считать, что принимаемое в алгебраическом подходе решение не рассматривать непосредственно неограниченные наблюдаемые и выбирать алгебры наблюдаемых квантовых систем из класса нормированных инволютивных алгебр не означает ограничения общности; но оно влечет, вообще говоря, утрату единственности описания.

Рассмотрим, какие дополнения к этой схеме возникают в релятивистской теории. Во-первых, как следствие фундаментального принципа локальности, постулат идентификации теперь относится, правильнее говоря, не к отдельной наблюдаемой, а к совокупности $\mathfrak{A}_{\text{obs}}(O)$ всех наблюдаемых ограниченной области O пространства Минковского M . Не конкретизируя других признаков наблюдаемой, помимо ее локализованности, и не вводя понятий, характеризующих индивидуальные отличия между наблюдаемыми из одной совокупности $\mathfrak{A}_{\text{obs}}(O)$, мы не можем провести математическую идентификацию поэлементно, как сопоставление каждой отдельной наблюдаемой определенного оператора. Вместо этого мы сопоставляем каждой совокупности $\mathfrak{A}_{\text{obs}}(O)$ определенную инволютивную алгебру $\mathfrak{A}(O)$, причем представителями физических наблюдаемых считаем лишь эрмитовы элементы этой алгебры. Кроме того, требуется уточнить и класс областей $O \subset M$. В пространстве Минковского мы вводим естественную топологию $\mathbb{R}^4$, порождаемую евклидовым расстоянием. Поскольку естественно предполагать, что для всякой открытой ограниченной области O задание совокупности ее наблюдаемых определяет и совокупность всех наблюдаемых ее замыкания $\bar{O}$, нам достаточно рассматривать только открытые либо только замкнутые области. В алгебраическом подходе делают выбор в пользу класса открытых областей (хотя можно указать и отдельные работы, исходящие из замкнутых областей). В итоге математический формализм алгебраического подхода задается фундаментальным соответствием

$$O \rightarrow \mathfrak{A}(O) \text{ для всех } O \in B(M)$$

($B(M)$ — множество всех ограниченных открытых областей пространства

Минковского). Алгебра $\mathfrak{A}(O)$ называется *алгеброй локальных наблюдаемых* (локальной алгеброй) области O . С учетом сказанного мы не считаем, что набор $\{\mathfrak{A}(O)\}_{O \in B(M)}$ алгебр наблюдаемых сопоставляется заданной физической системе единственным образом (хотя на исходном этапе каждое множество наблюдаемых $\mathfrak{A}_{\text{obs}}(O)$ для данной системы, конечно, единственно). Как мы увидим, различные наборы локальных алгебр, отвечающие одной и той же системе, могут различаться дополнительными структурными свойствами; в частности, особую роль играют наборы максимальных алгебр, не допускающих вложения в алгебры наблюдаемых никакого другого набора.

Далее, алгебры наблюдаемых уже не обязательно являются конкретными алгебрами операторов в гильбертовом пространстве, а могут быть и абстрактными C^* -алгебрами. Такое обобщение алгебраического формализма было предложено в 1964 г. Хаагом и Кастлером [НК] главным образом на том основании, что мы не можем из эксперимента определить состояние физической системы с абсолютной точностью. Любая совокупность измерений в состоянии ω , обладая конечной погрешностью, дает не точные значения ожиданий $\lambda_i = \omega(A_i)$ наблюдаемых A_i в этом состоянии, а только малые интервалы $(\lambda_i - \epsilon_i, \lambda_i + \epsilon_i)$ таких значений. Поэтому состояние ω нельзя различить на опыте от состояния ω' , если все ожидания в этих состояниях различаются лишь в пределах погрешностей ϵ_i ; такие неразличимые на опыте состояния называются *физически эквивалентными*. Нетрудно показать [НК; Ro 2], что физическая эквивалентность состояний ω и ω' равносильна слабой эквивалентности (§ 1) представлений, отвечающих этим состояниям; поэтому в физической литературе понятия физической и слабой эквивалентности употребляются как синонимы. Задавая алгебру наблюдаемых как абстрактную C^* -алгебру, мы не фиксируем ее определенного представления, учитывая этим допустимость различных физически эквивалентных представлений. Однако нужно заметить, что всю физическую информацию, заключенную в абстрактном алгебраическом описании, возможно выразить и в описании конкретном, например, перейдя от абстрактной алгебры наблюдаемых к ее универсальному представлению [[Д, 2.7.6]]. Выбор конкретных или абстрактных алгебр наблюдаемых — скорее вопрос удобства, не связанный с реальным различием в физическом содержании формализма. Такое различие возникает только в том случае, если мы используем представление алгебры наблюдаемых, выделенное какими-либо специальными свойствами (например, существованием циклического вакуумного вектора; см. ниже).

Итак, существуют два варианта алгебраического подхода: конкретный (или *теория Хаага–Араки*), в котором локальные алгебры являются алгебрами фон Неймана $R(O)$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и абстрактный (или *теория Хаага–Кастлера*), в котором локальные алгебры являются абстрактными C^* -алгебрами $\mathfrak{A}(O)$. Они задаются фундаментальным отображением

$$O \rightarrow R(O) \quad \text{или соответственно} \quad O \rightarrow \mathfrak{A}(O)$$

для всех $O \in B(M)$, которое подчиняется следующей системе фундаментальных физических условий — аксиом локальной структуры.

Аксиома I. Изотония.

$$O_1 \subset O_2 \Rightarrow R(O_1) \subset R(O_2) \quad (\text{соответственно } \mathfrak{A}(O_1) \subset \mathfrak{A}(O_2)).$$

С принятием этой аксиомы совокупность $\{R(O)\}_{O \in V(M)}$ или $\{\mathfrak{A}(O)\}_{O \in V(M)}$ получает структуру сети [[БР, с. 47]]. Поскольку для сетей C^* -алгебр определена операция индуктивного предела [[S, 1.23]], то, приближая произвольную неограниченную область $\tilde{O}$ последовательностями монотонно расширяющихся ограниченных областей, мы можем сопоставить алгебру наблюдаемых любой области $\tilde{O}$, в том числе и $\tilde{O} = M$. При этом для сети C^* -алгебр $\mathfrak{A}(O)$, $V(M) \ni O \subset \tilde{O}$, существует C^* -индуктивный предел — C^* -алгебра $\mathfrak{A}(\tilde{O})$, а для сети алгебр фон Неймана $R(O)$, $V(M) \ni O \subset \tilde{O}$, существуют как C^* -индуктивный предел $\mathfrak{A}(\tilde{O})$, так и W^* -индуктивный предел — алгебра фон Неймана $R(\tilde{O})$, причем $\mathfrak{A}(\tilde{O})'' = R(\tilde{O})$. В случае $\tilde{O} = M$ (конкретная или абстрактная) алгебра $\mathfrak{A}(M) \equiv \mathfrak{A}$ называется *квазилокальной C^* -алгеброй*; алгебра $R(M) \equiv R$ называется *глобальной алгеброй*. Нередко рассматривается также незамкнутая $*$ -алгебра $\mathcal{A} \equiv \bigcup_{O \in V(M)} R(O)$, определяемая как теоретико-множественное объедине-

ние всех $R(O)$ и называемая *алгеброй всех локальных наблюдаемых*. Состояния системы удобно представлять элементами дуального пространства $\mathfrak{A}^*$ квазилокальной алгебры. При этом множество S_{phys} "физических" состояний реально допустимых для изучаемой системы, не обязательно совпадает со множеством $\mathfrak{A}_+^{*+}$ всех состояний на $\mathfrak{A}$, но может составлять его часть, выделяемую какими-либо физическими условиями.

Аксиома Ia. Непрерывная изотония. Пусть $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность областей (открытых, но не обязательно ограниченных), сходящаяся к области O в следующем смысле:

$$\liminf O_i \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=k}^{\infty} O_i = \limsup O_i \equiv \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} O_i = O. \quad (2.1)$$

Тогда для монотонно возрастающей последовательности ($O_i \subset O_{i+1}$)

$$R(O) = \{R(O_i), i = 1, 2, \dots\}'' ,$$

а для монотонно убывающей последовательности ($O_i \supset O_{i+1}$)

$$R(O) = \bigcap_{i=1}^{\infty} R(O_i).$$

(При этом в первом случае область O называется *индуктивным пределом* последовательности O_i , а во втором — *проективным пределом* (ср. [[К, с. 12]]), и тогда условие ее открытости является, вообще говоря, ограничением на последовательность.)

Как мы увидим в § 3, это усиление постулата изотонии (выполнение обычной изотонии в форме I здесь предполагается) часто оказывается эффективным при доказательстве структурных теорем теории Хаага—Араки. Однако его физическая обоснованность, а также независимость от остальных аксиом пока остаются неисследованными.

Аксиома II. Слабая аддитивность.

$$\forall \overline{\bigvee_{O \in B(M)} R(O+a)}^u = \mathfrak{A} \quad (\text{соответственно} \quad \overline{\bigvee_{a \in M} \mathfrak{A}(O+a)}^u = \mathfrak{A}),$$

где $O+a$ есть трансляция области O на 4-вектор a , замыкание берется по C^* -норме, и все алгебры $\mathfrak{A}(O+a)$ рассматриваются как подалгебры $\mathfrak{A}$; символ $\bigvee_i \mathfrak{A}_i$ обозначает $*$ -алгебру, порождаемую $*$ -алгебрами $\mathfrak{A}_i$.

Аксиома IIa. Сильная аддитивность. Для любого набора $\{O_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ областей $O_i \in B(M)$

$$R(\bigcup_{i \in \mathcal{J}} O_i) = \{ \bigcup_{i \in \mathcal{J}} R(O_i) \}'' \quad (\text{соответственно} \quad \mathfrak{A}(\bigcup_{i \in \mathcal{J}} O_i) = \overline{\bigvee_{i \in \mathcal{J}} \mathfrak{A}(O_i)}^u).$$

Видно, что из этого условия вытекает выполнение как слабой аддитивности (аксиома II), так и изотонии (аксиома I). Тем не менее это сильное требование является вполне реалистическим для полевых систем: с учетом того, что в пространстве Шварца и других типичных пространствах основных функций имеется разложение единицы (т.е. для любого локально конечного покрытия $\{O_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ пространства Минковского и для любой основной функции f существует представление $f = \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i$, где основные

функции f_i сосредоточены в O_i), его выполнения естественно ожидать для сетей алгебр, порождаемых полевыми операторами $A(f)$. С другой стороны, известны и примеры нарушения аксиом IIa и II. Типичный такой пример — алгебры наблюдаемых ферми-систем, порождаемые билинейными комбинациями ограниченных полевых операторов типа $\bar{\psi}(f)\psi(g)$: алгебра $R(O_1 \cup O_2)$ включает образующие вида $\bar{\psi}(f)\psi(g)$, $\text{supp } f \subset O_1$, $\text{supp } g \subset O_2$, тогда как алгебра $R(O_1) \vee R(O_2)$, вообще говоря, не включает их. (Однако для свободного ферми-поля аксиома II все же имеет место [ДХ1].) Было показано также [PS], что если сеть $\{R(O)\}$ не удовлетворяет аксиоме IIa, то можно построить новые алгебры $R_1(O) \subset R(O)$, уже удовлетворяющие ей.

Аксиома III. Причинность (локальность).

$$\forall O_1 \subset O_2' \Rightarrow R(O_1) \subset R(O_2)'$$

$$(\text{соответственно} \quad [\mathfrak{A}(O_1), \mathfrak{A}(O_2)] = 0),$$

где

$$O' = \text{int} \{x \in M \mid (x-y)^2 < 0 \quad \forall y \in O\}.$$

Здесь int обозначает взятие совокупности всех внутренних точек некоторого множества, а множество под знаком int называется *пространственно-подобным дополнением* области O из M . Как и теоретико-множественное дополнение, пространственноподобное дополнение открытого множества O замкнуто, причем

$$\{x \in M \mid (x-y)^2 < 0 \quad \forall y \in O\} = \{x \in M \mid (x-y)^2 \leq 0 \quad \forall y \in O\},$$

а пространственноподобное дополнение замкнутого множества открыто. Отношение $O_1 \subset O_2'$ часто обозначается символом $O_1 \times O_2$; область O с $O' = \emptyset$ называется *пространственно полной*.

Аксиому III можно сформулировать и в следующем виде: для любой области O из M

$$R(O') \subset R(O)'.$$

Элементарно проверяется, что обе формулировки равносильны.

Как уже подчеркивалось, данная аксиома (называемая также причинностью Эйнштейна) выражает главнейшее физическое отличие релятивистских систем: взаимную совместимость любых наблюдаемых, которые относятся к областям, пространственноподобно разделенным друг от друга. Вообще говоря, она должна равным образом иметь место как для квантовых, так и для классических релятивистских систем. Однако в классической физике вообще нет несовместимых наблюдаемых, так что требование причинности Эйнштейна здесь не является ограничением и не вносит в теорию никакого содержания. Напротив, в релятивистской квантовой теории это требование служит единственным геометрическим условием, обеспечивающим совместимость наблюдаемых. Следует лишь учитывать, что его математическая формулировка, данная в аксиоме III, не является единственно возможной. Неоднократно предлагались ее различные модификации, ряд из которых мы рассмотрим ниже в этом разделе.

Аксиома IV. Примитивная причинность. Для каждого "полного пространственноподобного слоя"

$$S_\epsilon^{(n)} = \{x \in M \mid |n_\alpha x^\alpha| < \epsilon\},$$

задаваемого времениподобной 4-нормалью n_α , $(n_0)^2 + n^2 = 1$, $(n_0)^2 - n^2 > 0$,

$$R(S_\epsilon^{(n)}) = R \quad (\text{соответственно } \mathfrak{A}(S_\epsilon^{(n)}) = \mathfrak{A}).$$

Часто эта аксиома формулируется лишь для "временного слоя" S_ϵ , отвечающего случаю $n_\alpha = (1, 0, 0, 0)$. С учетом следующей ниже аксиомы V, обе формулировки эквивалентны.

Основанием для принятия данной аксиомы служат интуиции о причинном характере распространения, который должен быть присущ процессу: естественно предполагать, что величины, описывающие физическую систему, подчиняются некоторым динамическим уравнениям (пускай сколь угодно сложным и явно не формулируемым); тогда их поведение в любой момент времени однозначно определяется их заданием в какой-то начальный момент. С учетом того, что значения физических величин в квантовой теории (например, полевых операторов), вообще говоря, не определены корректно в фиксированный момент времени и, следовательно, могут задаваться лишь в некоторой окрестности гиперплоскости $t = t_0$, мы и приходим к аксиоме примитивной причинности. Она выражает, таким образом, еще один аспект причинности в физике, отличный от "причинности Эйнштейна" и свойственный как релятивистским, так и нерелятивистским системам. Однако, как и в случае аксиомы локальности, мы не можем утверждать, что физические аргументы, которыми обосновывается эта аксиома, однозначно приводят к формулировке, данной выше. Здесь также предлагался ряд различных модификаций, главные из которых мы и укажем сейчас.

А к с и о м а IVa. Для всякого семейства областей $\{O_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ такого, что $(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} O_i)' = \emptyset$

$$\{\bigcup_{i \in \mathcal{I}} R(O_i)\}'' = R \quad (\text{соответственно } \overline{\bigvee_{i \in \mathcal{I}} \mathfrak{A}(O_i)}'' = \mathfrak{A}).$$

Поскольку $S_\epsilon^{(n)'} = \emptyset$, то эта формулировка является прямым усилением аксиомы IV.

А к с и о м а IVб. Пусть для произвольной области $O \subset M$ определено следующее ее расширение:

$$O_c = \{x \in M \mid \lambda_{x,k} \cap O \neq \emptyset \quad \forall k \geq 1\},$$

$$\lambda_{x,k} = \{y \in M \mid (y^0 - x^0)^2 = k^2 (y - x)^2\},$$

называемое *причинной тенью* области O (а также "причинной оболочкой" или "причинно зависимой областью"; очевидно, O_c есть совокупность всех точек из M таких, что всякая времениподобная или изотропная прямая $\lambda_{x,k}$, проходящая через данную оболочку, пересекает O). Тогда

$$R(O) = R(O_c).$$

Поскольку, как легко видеть, $(S_\epsilon^{(n)})_c = M$, это условие также является усилением аксиомы IV. Оно может интерпретироваться как "локальная форма" примитивной причинности: если аксиому IV рассматривать как требование $R(O) = R(O_c)$ для полного пространственноподобного слоя $O = S_\epsilon^{(n)}$ с $O_c = M$ ("глобальная примитивная причинность"), то аксиома IVб есть обобщение этого требования для сколь угодно малых областей, выражающее примитивную причинность "в малом", "локально". Эта "локальная примитивная причинность" уже включает в себе определенные черты релятивистской динамики: аксиома IVб, очевидно, предполагает, что физический процесс распространяется по характеристикам, лежащим в световых конусах, или, иначе говоря, распространение носит гиперболический характер. Простейший пример области O_c показан на рис. 1.

А к с и о м а V. Релятивистская ковариантность.

В конкретном подходе: в $\mathcal{H}$ действует унитарное сильно непрерывное представление $U(a, \Lambda)$ связной компоненты $\mathcal{P}_+^\uparrow$ группы Пуанкаре такое, что для всех $O \in B(M)$

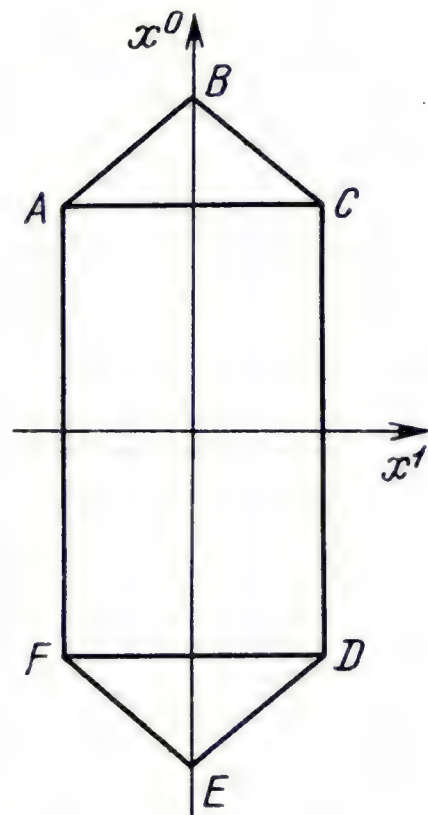
$$U(a, \Lambda) R(O) U(a, \Lambda)^{-1} = R(\Lambda^{-1}(O - a)).$$

В абстрактном подходе: существует представление группы Пуанкаре $\mathcal{P}_+^\uparrow$ автоморфизмами $\alpha_{a, \Lambda}$ квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$ такое, что

$$\alpha_{a, \Lambda} [\mathfrak{A}(O)] = \mathfrak{A}(\Lambda^{-1}(O - a)).$$

Данная аксиома вводит для алгебраической квантовой теории, в дополнение к алгебраической структуре сети $\{R(O)\}$, также групповую структуру. В физических терминах эта аксиома означает, что для любой системы преобразования Пуанкаре являются преобразованиями симметрии. Общий формализм описания физических симметрий в рамках алгебраического подхода мы будем рассматривать ниже (§ 3). Однако пуанкаре-симметрия

Рис. 1. Причинная тень $Z_c = ABCDEF$ цилиндрической области $Z = ACDF = \{x \in M \mid |x^0| < T, |x| < r\}$



выделена из всех других симметрий тем, что она выражает не свойства конкретной физической системы, а свойства самого пространственно-временного континуума, пространства Минковского. Иными словами, она является выражением принципа относительности, согласно которому результаты любого эксперимента не должны зависеть от выбора инерциальной системы отсчета, в которой проводится эксперимент. И именно по этой причине она, единственная из всех симметрий, включается в число фундаментальных аксиом в любой формулировке релятивистской квантовой теории.

Далее, в общей теории симметрий мы увидим, что наличие физической симметрии, вообще говоря, означает лишь существование некоторой пары отображений на множестве наблюдаемых и на множестве состояний, и совсем не обязательно эти отображения приводят к существованию унитарного представления соответствующей группы. Поэтому формулировка аксиомы V в теории Хаага–Араки является, вообще говоря, усилением физического условия. Однако в достаточно широком классе теорий, у которых глобальная алгебра R — прямая сумма дискретных факторов, эта формулировка может быть выведена из общих определений [3С].

Аксиома VI. Спектральность.

В конкретном подходе: спектр энергии-импульса системы, или, что то же, носитель спектральной меры $E(p)$ представления $T(a) \equiv U(a, 1)$ группы трансляций $\hat{M}^1$ заключен в замкнутом переднем световом конусе:

$$T(a) = \int e^{ip_a} dE(p), \quad \text{supp } E(p) \subset \bar{V}^+ \equiv \{p \in M \mid p^2 \geq 0, p_0 \geq 0\}.$$

Аксиома VIa. Сильная спектральность (наличие "массовой щели").

$$\text{supp } E(p) \subset \{p = 0\} \cup V_{(m)}^+, \quad V_{(m)}^+ \equiv \{p \in M \mid (p^2)^{1/2} = m > 0\}.$$

Это усиление аксиомы VI требует, очевидно, отсутствия безмассовых частиц.

В абстрактном подходе формулировка спектральности представляет собой проблему, поскольку в отсутствие унитарной группы $T(a)$ мы не можем сопоставить системе операторов энергии-импульса и массы. Предлагались различные решения этой проблемы [D1; Mon; Kr,3]. В основе всех их лежит та идея, что в качестве постулата спектральности в абстрактном подходе следует принимать то или иное достаточное условие существования такого представления квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$, которое является трансляционно ковариантным (т.е. в пространстве это-

¹⁾ Символом $\hat{M}$ обозначим группу трансляций M , т.е. M , рассматриваемое как аффинное пространство.

го представления автоморфизмы 4-трансляций реализуются унитарными операторами) и удовлетворяет требованию спектральности в обычной форме аксиомы VI (или VIa) конкретного подхода. Подобные представления называются обычно представлениями с положительной энергией или же просто положительными. Таким образом, "абстрактное условие спектральности" должно быть некоторым условием на алгебру $\mathfrak{A}$ с абелевой группой автоморфизмов α_a , обеспечивающим существование положительного представления $\mathfrak{A}$. (Заметим при этом, что существование трансляционно ковариантных представлений обеспечено без всяких условий: таковым будет любое представление, получаемое по трансляционно инвариантному состоянию на $\mathfrak{A}$; существование же трансляционно инвариантных состояний просто вытекает из теоремы Маркова–Какутани [[ДШ, с. 493]].) Искомое условие впервые было указано Доплихером [D1]: квазилокальная алгебра $\mathfrak{A}$ обладает хотя бы одним положительным представлением тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{L} \subsetneq \mathfrak{A}, \quad (2.2)$$

где $\mathcal{L}$ трансляционно инвариантный левый идеал в $\mathfrak{A}$, получаемый следующей явной конструкцией:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= L\{\mathfrak{A} \mathfrak{B}\}, \quad \mathfrak{B} \equiv \{B \in \mathfrak{A} \mid B = \\ &= \int f(x) \alpha_x(A) d^4 x, \quad A \in \mathfrak{A}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^4), \quad \tilde{f}(p) = 0 \quad \forall p \in V^+\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

(существование интеграла и свойство $B \in \mathfrak{A}$ здесь обеспечены тем, что автоморфизмы α_x сохраняют норму в $\mathfrak{A}$). Кроме того, если выполнено условие

$$L\{\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{A}\} = \mathfrak{A}, \quad (2.4)$$

то существует заведомо нетривиальное положительное представление $\mathfrak{A}$. Докажем этот критерий Доплихера.

Необходимость. Пусть состояние ω на $\mathfrak{A}$ отвечает положительному представлению π с вакуумным (т.е. трансляционно инвариантным) вектором Ω и операторами трансляций $T(a)$; тогда для любого $B \in \mathfrak{B}$ имеем

$$\begin{aligned} \pi(B) \Omega &= \int f(x) T(x) \pi(A) T(x)^{-1} d^4 x \Omega = \\ &= \int f(x) T(x) d^4 x \pi(A) \Omega = E(\tilde{f}) \pi(A) \Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где E — спектральная мера группы $T(a)$ (в силу спектральности для $T(a)$, $\text{supp } E \cap \text{supp } \tilde{f} = \emptyset$). Отсюда

$$\omega(B^* B) = \|\pi(B) \Omega\|^2 = 0. \quad (2.6)$$

Очевидно, что (2.6) будет верно и для всех $B \in \mathcal{L}$, а также и $B \in \bar{\mathcal{L}}^u$, и в силу неравенства Шварца

$$\omega(B) = 0$$

для всех $B \in \bar{\mathcal{L}}^u$. Но так как $\omega \neq 0$, то $\mathcal{L} \neq \mathfrak{A}$.

Достаточность. При $\mathcal{L} \neq \mathfrak{A}$ имеем $\bar{\mathcal{L}}^u \neq \mathfrak{A}$ [[Н, с. 159]], и множество S_{sp} всех состояний ω на $\mathfrak{A}$ таких, что $\omega(B^* B) = 0$ для всех $B \in \mathcal{L}$, не пусто. Множество S_{sp} выпукло и замкнуто в слабой топологии сопряжен-

ного пространства, т.е. слабо*-компактно¹⁾ (ибо при $\omega_\alpha \in S_{sp}$ из $\omega_\alpha(A) \rightarrow \omega(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$ следует $\omega \in S_{sp}$); из трансляционной инвариантности $\mathcal{L}$, а следовательно, и $\bar{\mathcal{L}}^u$ вытекает, что S_{sp} трансляционно инвариантно. Тем самым для S_{sp} выполнены условия теоремы Маркова—Какутани, и существует трансляционно инвариантное состояние $\omega_0 \in S_{sp}$. По определению S_{sp} для ω_0 имеет место (2.6), и с учетом цикличности вакуума в представлении π_{ω_0} из (2.5) получаем для спектральной меры E_0 унитарной группы трансляций в $\mathcal{H}_{\omega_0}$: $E_0(\tilde{f}) = 0$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R}^4)$, $\text{supp } f \cap \bar{V}^+ = \emptyset$, т.е. π_{ω_0} положительно. Наконец, условие (2.4) добавляется, чтобы исключить возможность тривиальности представления π_{ω_0} , которая возникает, если $\mathcal{L}$ вложен в некоторый собственный двусторонний идеал $\mathfrak{A}$: понятно, что при условии (2.4) такое вложение невозможно. $\square$

В итоге, в качестве формулировки аксиомы VI в абстрактном подходе могут служить условия (2.2) и (2.4). Свойства положительных представлений и критерии положительности исследовались в ряде работ (см., например, [B10; OP]). В частности, в [B10] Борхерсом был получен результат, в определенном смысле дополняющий условие Доплихера: необходимое и достаточное условие, при котором заданное трансляционно ковариантное представление π_0 является положительным представлением, $\pi_0 > 0$. Чтобы сформулировать его, введем обобщение идеала $\mathcal{L}$: для каждого $a \in V^+$ определим идеал $\mathcal{L}_a \subset \mathfrak{A}$ по формуле (2.3) с функциями $f \in L^1(\mathbb{R}^4)$, $\tilde{f}(p) = 0 \ \forall p \in -a + V^+$; и в пространстве $\mathcal{H}_0$ представления π_0 введем подпространство

$$\mathcal{H}_a \doteq \{ \xi \in \mathcal{H}_0 \mid \pi_0(B) \xi = 0 \ \forall B \in \mathcal{L}_a \}.$$

Тогда критерий Борхерса имеет следующий вид:

$$\pi_0 > 0 \iff \overline{L \left\{ \bigcup_{a \in V^+} \mathcal{H}_a \right\}} = \mathcal{H}.$$

Очевидно, что физическое содержание аксиомы спектральности в точности то же, что и в других формулировках квантовой теории поля: спектры энергии $\hat{p}_0$ и массы $m = (-\hat{p}^2)^{1/2}$ релятивистской квантовой системы должны быть неотрицательны. С математической же стороны, как и в вайтмановской теории, эта аксиома обеспечивает возможность комплексного продолжения по переменным в конфигурационном пространстве, и благодаря этому в числе математических средств теории появляется техника аналитических функций, весьма эффективно применяемая при доказательстве теорем алгебраического подхода (в чем мы немедленно убедимся в § 3).

* * *

Итак, мы завершили формулировку системы аксиом алгебраического подхода. Наиболее заметным отличием системы условий I—VI от системы аксиом вайтмановской теории является отсутствие постулата существования вакуумного состояния. Это — следствие большей общности алгебраического аппарата. Как мы только что видели, в абстрактном подходе квазилокальная алгебра $\mathfrak{A}$ всегда обладает трансляционно инвариантным сос

¹⁾ Предполагается наличие единичного элемента $I \in \mathfrak{A}$. — Примеч. ред.

тоянием, которому отвечает представление с циклическим вакуумом. В конкретном подходе в гильбертовом пространстве теории может и не быть вакуумного вектора; но подобные теории Хаага—Араки физически отнюдь не бессмысленны и могут возникать в целом ряде случаев. В теории канонических систем хорошо известно, что физическая модель нередко требует для своего описания нефоковского представления канонических коммутационных (или антикоммутационных) соотношений, не обладающего вакуумом (см., например, [[Э]], [PRS; KS]). В общем формализме мы встретимся с такими теориями в гл. 2, где увидим, что они отвечают зарядовым секторам систем с правилами суперотбора. В этом случае с теорией без вакуума ассоциирована некоторая теория с вакуумом ("вакуумный сектор"), и способ связи двух этих теорий есть одна из важнейших динамических характеристик системы (см. § 5; 6).

Опыт существования алгебраического подхода показал, что все аксиомы, включенные в данную систему (по крайней мере в их основных вариантах I—VI), являются достаточно общими и обоснованными физическими требованиями. Все они совместны друг с другом, что доказывается существованием моделей, удовлетворяющих всему набору аксиом I—VI, например, модели свободного нейтрального скалярного поля (см. § 9). Каждая из аксиом не является следствием остальных, но представляет собой независимое физическое условие. Это важное свойство устанавливается путем отыскания модельных примеров, удовлетворяющих всем аксиомам, кроме какой-либо одной из них. Так, для аксиомы примитивной причинности таким примером служит определенный класс обобщенных свободных полей (см. § 9). Для аксиомы спектральности первоначально высказывались гипотезы о возможности вывести ее из требований релятивистской ковариантности и локальности (см., например, [Ro2]). Эти гипотезы не оправдались. Независимость аксиомы спектральности доказывает геометрическая модель, построенная Доплихером, Редже и Сингером [DRS]. В этой модели используется сеть локальных C^* -подалгебр $\mathfrak{A}(O)$ C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ канонических антикоммутационных соотношений¹⁾ над специальным гильбертовым пространством $K = L^2(\mathcal{F}, du)$, где $\mathcal{F}$ — множество всех времениподобных или пространственноподобных прямых в пространстве Минковского, du — лебегова мера на $\mathcal{F}$. Алгебра $\mathfrak{A}$ порождается всеми четными полиномами по ферми-полям $\psi(f)$, $f \in K$. Будучи рассматриваемая как квазилокальная алгебра абстрактного подхода, она удовлетворяет аксиомам релятивистской ковариантности и локальности, однако, как показали Доплихер, Редже и Сингер, не имеет ни одного положительного представления.

Вместе с тем, как и в других направлениях аксиоматической квантовой теории поля, в алгебраическом подходе никогда не утверждалось, что система аксиом I—VI является единственно возможной, и только она приводит к физически приемлемому описанию релятивистских квантовых объектов. Не исключено, что развитие теории может привести к дополнению этой системы какими-либо новыми требованиями; с другой стороны, требования, уже входящие в нее, могут подвергаться различным модификациям. Выше мы уже привели некоторые, довольно часто используемые

¹⁾ Описание таких алгебр см. в книге [[Э, гл. 3]].

модификации условий изотонии, слабой аддитивности и примитивной причинности (аксиомы Ia, IIa, IVa, IVб). Во всех указанных случаях модификации являются усилениями основной формулировки, принимаемыми, как правило, ради возможности доказательства тех или иных структурных теорем. Иной характер носят многочисленные известные модификации аксиомы причинности (локальности). Принцип релятивистской причинности может выражаться в различных математических формулировках и в терминах различных объектов: наблюдаемых, состояний, элементарных наблюдаемых, отвечающих проекционным операторам; и относительно любой формулировки трудно утверждать, что она полностью исчерпывает собой все содержание этого общего физического принципа. По существу, всякое условие, утверждающее, что наборы объектов, относящихся ко взаимно пространственноподобным областям, в каком-либо смысле независимы друг от друга, может рассматриваться как одно из выражений релятивистской причинности. Сформулируем основные из таких "свойств типа причинности".

1) *Причинная независимость [НК]: говорят, что локальные алгебры $R(O_1)$ и $R(O_2)$ ($O_1 \times O_2$) причинно независимы, если для любой пары локальных состояний $\omega_1 \in R(O_1)_1^{*+}$, $\omega_2 \in R(O_2)_1^{*+}$ найдется глобальное состояние $\omega \in \mathfrak{A}_1^{*+}$ такое, что*

$$\omega|_{R(O_k)} = \omega_k, \quad k = 1, 2.$$

Нельзя не увидеть, что это условие, введенное Хаагом и Кастлером, является физически вполне обоснованным, представляя собой прямое выражение релятивистской причинности: если области O_1 и O_2 взаимно пространственноподобны, то любое состояние над O_1 совместимо с любым состоянием над O_2 .

2) *Строгая локальность (strict locality, [Kr1]): если $O_1 \times O_2$, то для любого нетривиального проектора $P_1 \in R(O_1)$ и любого вектора $\Phi \in \mathcal{H}$ найдется вектор $\Psi \in P_1 \mathcal{H}$ такой, что $(\Phi, A\Phi) = (\Psi, A\Psi)$ для всех $A \in R(O_2)$.*

3) *Свойство Шлидера [Sc3]: если $O_1 \times O_2$, то для любой пары ненулевых операторов $A \in R(O_1)$ и $B \in R(O_2)$ имеет место $AB \neq 0$.*

4) *Расширенная локальность (extended locality, [Sch]): если $O_1, O_2 \in \mathcal{B}(M)$ и $O_1 \times O_2$, то*

$$R(O_1) \cap R(O_2) = \mathcal{C}(\mathcal{H}).$$

5) *Дуальность (прямое усиление аксиомы III):*

$$R(O)' = R(O').$$

Все приведенные условия, а также и сама аксиома III, обладают сходным физическим содержанием, различным образом выражая релятивистскую причинность Эйнштейна. Тем самым каждое из них, вообще говоря, имеет какие-то основания служить формулировкой аксиомы причинности взамен аксиомы III. Однако взаимосвязи всех этих условий между собой вовсе не очевидны, и в ряде случаев они остаются невыясненными до сих пор. Для описания причинной структуры алгебраической квантовой теории требуется особое рассмотрение каждого из условий, что и будет сделано в следующем параграфе.

Что же касается возможности появления принципиально новых аксиом, то имеются основания к тому, чтобы постулировать как аксиому и некоторое такое условие, которое обеспечило бы для алгебраического подхода существование корпускулярной интерпретации и теории рассеяния. Необходимость дополнительного условия для обеспечения этих свойств выясняется, как обычно, из контрпримера: обобщенное свободное поле с быстро убывающей спектральной мерой удовлетворяет всем аксиомам I–VI (см. § 9), однако не обладает корпускулярной интерпретацией. В полевой теории для достижения последней с частицами ассоциируют неприводимые представления $[m, s]$ группы Пуанкаре. Такая концепция частицы, однако, не является вполне общей и может оказываться непригодной при наличии безмассовых частиц. В локальной квантовой теории поиск критерия корпускулярной интерпретации исходил из иной, более общей трактовки частицы как "асимптотически стабильного центра локализации". Этот путь не является простым, ибо способ математического выражения подобной концепции частицы неочевиден и, вероятно, неоднозначен. Из выдвигавшихся формулировок критерия корпускулярной интерпретации [Sc1; HSw; H7] приведем последнюю, наиболее сжатую, которую Хааг в [H7] и предлагает для добавления к системе аксиом алгебраического подхода.

К р и т е р и й к о м п а к т н о с т и. *Для всякой области $O \in V(M)$ и всякого конечного значения энергии E_0 множество состояний с энергией, меньшей E_0 , суженных на алгебру $R(O)$, является компактным в топологии банаховой нормы пространства $R(O)^*$.*

По смыслу этот критерий является обобщением известного квантово-механического принципа, согласно которому число состояний в конечном объеме фазового пространства должно быть конечно (в самом деле, для каждого $\epsilon > 0$ найдется, согласно критерию, конечный набор состояний $\omega_i^{(O)}$ на $R(O)$ такой, что любое состояние с энергией, меньшей E_0 , отстоит по норме менее чем на ϵ от какого-либо из состояний $\omega_i^{(O)}$). Изучение данного критерия пока только начато, но, по предварительным сообщениям, на его основе действительно удастся построить состояния с определенным числом частиц, а также установить ряд желательных структурных свойств формализма (в частности, так называемое свойство F , о котором см. п. 3.3, 3.4).

§ 3. СТРУКТУРА ЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ: ТЕОРЕМЫ, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ АКСИОМ

Набор алгебр $\{R(O)\}_{O \in V(M)}$ (или $\{\mathfrak{A}(O)\}_{O \in V(M)}$), удовлетворяющих системе аксиом I–VI, называется *сетью локальных алгебр*. Необходимо выяснить основные свойства этой сети. Перед нами определенная алгебраическая структура, заданная в аксиоматической форме, — и, стало быть, поставленная задача сводится к выводу строгих следствий из аксиом I–VI. Тем самым данный этап в развитии алгебраического подхода представляет собой этап чистой аксиоматики. Получение его основных результатов относится приблизительно к середине 60-х гг.

В алгебраической структуре, определяемой сетью $\{R(O)\}$ и аксиомами I–VI, естественно выделяются три вида свойств: локальные, которые связаны непосредственно с алгебрами $R(O)$; глобальные, которые связаны

с объединениями $R(O)$ по всему пространству Минковского — алгебрами $\mathcal{A}$, $\mathfrak{A}$, R ; и наконец, групповые, которые связаны с действующими в сети группами преобразований (помимо группы Пуанкаре и ее подгрупп, сюда могут входить и группы внутренней симметрии). В свою очередь локальные свойства подразделяются на свойства отдельной алгебры $R(O)$ и на соотношения между локальными алгебрами различных областей. Анализ всех этих свойств целесообразно начать с изучения центрального физического объекта алгебраического подхода — отдельно взятой локальной алгебры наблюдаемых.

3.1. Локальная алгебра. Итак, что же такое алгебра $R(O)$? В рамках конкретного подхода Хаага—Араки она принадлежит категории W^* -алгебр, так что ее исследование — это исследование структурных свойств некоторой алгебры фон Неймана. Прежде всего следует рассмотреть набор самых основных свойств: сюда входят строение множеств циклических и разделяющих векторов $R(O)$; строение центра $R(O)$ (и, прежде всего, выяснение того, является ли $R(O)$ фактором); принадлежность $R(O)$ к определенному типу. Большинство имеющихся результатов об этих свойствах опирается не только на аксиомы I–VI, но, кроме того, еще на некоторое глобальное условие — предположение о структуре глобальной алгебры R . Обычно таким условием служит неприводимость R или ее принадлежность классу факторов типа I_∞ . Как мы увидим в следующей главе, с физической точки зрения это условие означает отсутствие правил суперотбора, или же рассмотрение изучаемой системы только в одном фиксированном когерентном суперотборном секторе. Во многих случаях это глобальное условие можно ослабить до принадлежности R весьма общему классу глобальных алгебр систем с правилами суперотбора: $R = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} R_\gamma$, σ — произвольное множество, R_γ — факторы типа I_∞ .

Помимо глобального условия, при изучении локальных алгебр часто налагаются ограничения на класс рассматриваемых областей $O \in B(M)$. Это делается в основном по соображениям технического удобства, поскольку произвольная область O может в принципе состоять из многих компонент со сложной геометрией и топологией, что способно затруднить анализ структурных свойств $R(O)$. С другой стороны, существуют различные классы областей, специальные свойства которых облегчают получение таких свойств. Оптимальным, очевидно, являлся бы такой класс, который был бы удобен для вывода структурных свойств и в то же время достаточно широк — например, обеспечивал бы возможность покрытия и аппроксимации произвольной области из $B(M)$, позволяя однозначно восстановить всю сеть $\{R(O)\}_{O \in B(M)}$. Этим требованиям полностью удовлетворяет класс областей $D \in B(M)$, которые носят название "двойные конусы". Произвольный двойной конус D (рис. 2) задается парой взаимно времени-подобных точек $x, y \in M$ (где пусть $x^0 > y^0$) и представляет собой пересечение открытого верхнего светового конуса V_y^+ с вершиной в y и открытого нижнего светового конуса V_x^- с вершиной в x :

$$D = D_{x,y} = V_y^+ \cap V_x^- = \{z \in M \mid x - z \in V^+, z - y \in V^+\}.$$

Отрезок, соединяющий вершины x и y , называется *осью* двойного конуса $D_{x,y}$. Пересечение двойного конуса с пространственноподобной гипер-

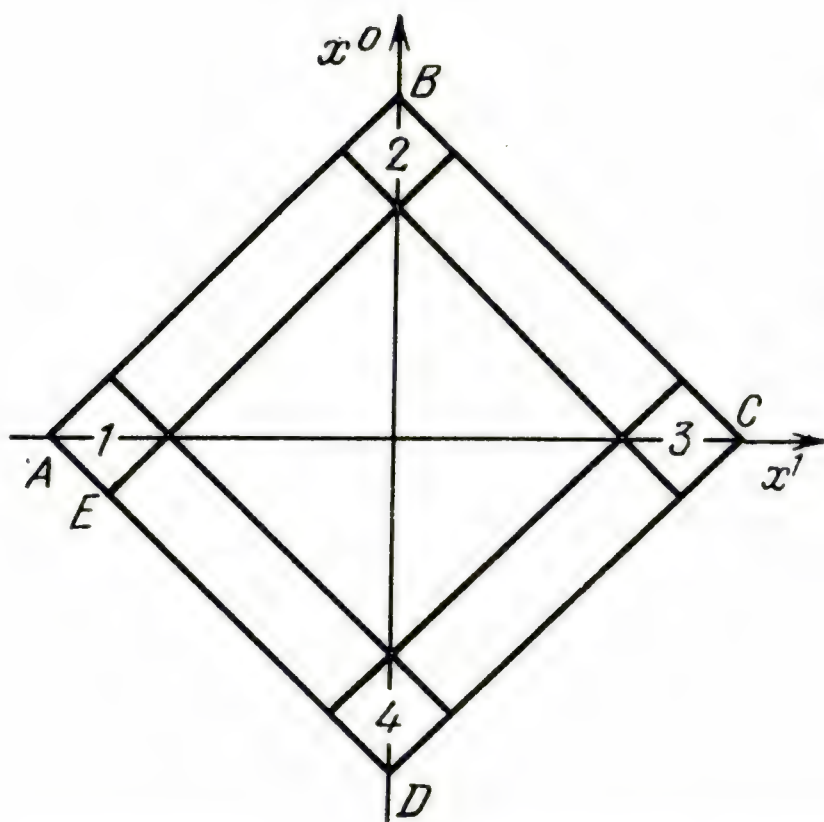


Рис. 2. Двойные конусы и алмазы. $O_1 = ABCD$; $D_i, i = 1, \dots, 4$, — симметричные двойные конусы; $O_2 = (D_1 \cup D_2)'' = V_E^+ \cap V_B^-$ — несимметричный двойной конус; $O_3 = D_1 \cup D_3$ — ограниченный несвязный алмаз, не являющийся двойным конусом

плоскостью $S_{x,y}$, нормальной к его оси, называется *базой* двойного конуса. Для симметричных двойных конусов $D_{x,y}$, определяемых условием $x=y$, базой служит трехмерный шар радиуса $|x^0 - y^0|/2$ с центром в точке $(x+y)/2$. Двойные конусы составляют подкласс более широкого класса областей, называемых "алмазами" и определяемых свойством $O = O''$ (напомним, что в наших обозначениях области O', O'' и т.д. всегда открыты). Так как $O \subset O''$ влечет $O' = O'''$, то для любой области $O \subset M$, области O' и O'' принадлежат классу алмазов; при этом, если $O \in B(M)$, то алмаз O' есть неограниченная область. Ограниченный алмаз $O = O'' \in B(M)$ также может не являться двойным конусом; простой пример такого алмаза показан на рис. 2. Двойные конусы необычайно широко применяются в алгебраическом подходе и служат для него стандартным базисным множеством областей, которыми (вместе с областями D') можно ограничиться при рассмотрении большинства проблем. Часто ограничиваются уже подклассом симметричных двойных конусов $D_{x,y}$, которые имеют простое представление:

$$D(t, 0), (-t, 0) = \{x \in M \mid |x^0| + |x| < t\}.$$

Изучение алгебры $R(O)$ мы начнем с анализа ее циклических и разделяющих векторов, поскольку наличие таких векторов, как мы убедимся ниже, является необходимым условием при выводе подавляющего большинства структурных свойств. Центральным результатом здесь выступает широко известная лемма или теорема Рее—Шлидера. В своей наиболее общей формулировке [B5] она использует аналитические векторы положительного самосопряженного (в силу аксиом V, VI) оператора энергии $\hat{p}_0$ — генератора подгруппы трансляций по времени.

Теорема 3.1 (Рее—Шлидера). Пусть выполнены аксиомы II, V, VI. Тогда для любого вектора Ψ , аналитического для $\hat{p}_0$ ¹⁾, и любой области

¹⁾ В ряде изложений (например, [W3], [[БЛТ]]) теорема Рее—Шлидера формулируется для так называемых векторов с компактной энергией, определяемых следующим свойством: если $E(p)$ — спектральная мера унитарной группы $T(a)$, то векторнозначная функция $E(p) \Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{H}$ имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^4$. Очевидно, что такие векторы составляют подмножество множества всех аналитических векторов

$O \subset M$ (возможно, неограниченной)

$$\mathcal{H}_{\Psi}^R(O) = \mathcal{H}_{\Psi}^R.$$

Если, кроме того, выполнена аксиома III, Ψ есть сепаратор для центра $\mathcal{L}$ глобальной алгебры R , а если область O пространственно неполна (т.е. $O' \neq \emptyset$), то Ψ есть сепаратор для $R(O)$, а также для $R(O)' \cap R$.

Доказательство. По предположению ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|\hat{p}_0^n \Psi\| z^n/n!$ сходится в некотором круге $|z| < c, c > 0$. В совокупности с аксиомой VI это дает, что векторнозначная функция $T(a)\Psi$ аналитически продолжается в трубчатую область $\mathcal{T} = \mathbf{R}^4 + i\Gamma$, $\Gamma = \{y \in M \mid y \in -ce^0 + V^+\}$, e^0 — единичный орт по оси x^0 . Для произвольной области $O \subset M$ выберем подобласть $O_1 \subset O$ такую, что $O_1 + a \subset O$ для всех a из некоторой окрестности $\mathcal{N}$ начала координат. Обозначив $A(a) = T(a)AT(-a)$ для $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, докажем, что для любого $\Phi \in \mathcal{H}$ равенство

$$(\Phi, A_1(a_1) \dots A_n(a_n) \Psi) = 0 \quad \forall A_k \in R(O_1), a_k \in \mathcal{N}, k = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

влечет $(\Phi, A\Psi) = 0 \quad \forall A \in R$. Для этого заметим, что в силу аксиомы VI, функция

$$(\Phi, T(a_1)A_1T(a_2 - a_1)A_2 \dots T(a_n - a_{n-1})A_nT(-a_n)\Psi) \quad (3.2)$$

есть граничное значение аналитической функции, голоморфной в трубе

$$\mathcal{T}_n = \mathbf{R}^{4n} + i\Gamma_n,$$

$$\Gamma_n = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^{4n} \mid y_1 \in V^+, y_2 - y_1 \in V^+, \dots, y_n - y_{n-1} \in V^+, y_n \in ce^0 + V^-\}.$$

В силу строгой положительности c область Γ_n заведомо не пуста и содержит открытую окрестность начала:

$$y_k = 0, 0 < y_1^0 < y_2^0 < \dots < y_n^0 < c, \quad k = 1, \dots, n.$$

Следовательно, по принципу аналитического продолжения из равенства (3.1) вытекает, что функция (3.2) тождественно равна 0 при любых $a_1, \dots, a_n \in M$. Но по аксиоме II $\{\bigcup_{a \in M} R(O_1 + a)\}'' = R$, откуда имеем первое утверждение теоремы.

Проведенное рассуждение показывает также, что из ортогональности вектора Φ множеству $\{R(O) \cup R'\}''\Psi$ вытекает и его ортогональность множеству $\{R \cup R'\}''\Psi = \mathcal{L}'\Psi$, т.е. цикличность Ψ для $\mathcal{L}'$ влечет его цикличность для $\{R(O) \cup R'\}''$ (третье утверждение теоремы). Наконец, если $O' \neq \emptyset$, то для некоторой области $O_1 \in B(M)$ имеем $R(O)' \supset \{R(O_1) \cup R'\}''$, и все циклические векторы для этой последней алгебры являются циклическими и для $R(O)'$ (второе утверждение теоремы). $\square$

Из этого доказательства непосредственно ясно, что имеет также место простое

$\hat{p}_0$: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|\hat{p}_0^n \Phi\| z^n/n!$ для них сходится в любом круге конечного радиуса в z -плоскости, а функция $T(a)\Phi$ аналитически продолжается по 4-векторному аргументу a до функции, голоморфной на всем пространстве $\mathbf{C}^4$.

С л е д с т в и е. Пусть Ψ — аналитический вектор $\hat{p}_0$, O_k , $k = 1, 2, \dots$, — произвольный набор областей из M . Тогда любое множество векторов

$$\mathcal{L} = \{ \Phi_n = A_1 \dots A_n \Psi, A_k \in R(O_k), k = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots \}$$

обладает "свойством Рее—Шлидера": $\overline{L\{\mathcal{L}\}} = \mathcal{H}_{\Psi}^R$.

Как видим, справедливость теоремы всецело обеспечивается свойствами трансляционных автоморфизмов $T(a) \cdot T(-a)$ глобальной алгебры R : спектральностью и слабой аддитивностью. Тесная связь свойства Рее—Шлидера (т.е. $\overline{R(O)}\Psi = \overline{R}\Psi$ для аналитических векторов $\hat{p}_0$) с этими постулатами проявляется в целом ряде фактов. Так, исходя из предложения 3.1, нетрудно вывести, что спектр представления $T(a)$ (спектр энергии-импульса локальной квантовой теории) не может быть ограничен; см. предложение 3.44. Далее, можно показать, что в классе представлений $T(a)$, удовлетворяющих спектральности, свойство слабой аддитивности является не только достаточным, но и необходимым условием для выполнения свойства Рее—Шлидера.

Предложение 3.2 ("обратная теорема Рее—Шлидера" [B9]). Пусть некоторая подалгебра фон Неймана $R_1 \subset R$ обладает свойством Рее—Шлидера

$$\mathcal{H}_{\Psi}^{R_1} = \mathcal{H}_{\Psi}^R$$

для каждого вектора, аналитического по энергии. Тогда для нее имеет место слабая аддитивность, т.е. $\bigcup_{a \in M} T(a) R_1 T(-a)'' = R$.

Доказательство будет использовать еще один важный факт, вытекающий лишь из условия спектральности: без ограничения общности, трансляционные автоморфизмы $T(a)$ можно считать внутренними автоморфизмами R , т.е. $T(a) \in R$ для всех $a \in M$ (см. предложение 3.43). Обозначим $R_1^T \equiv \bigcup_{a \in M} T(a) R_1 T(a)^{-1}$. Поскольку R_1^T инвариантна относительно действия $T(a)$, то из условия спектральности и общих свойств сильно непрерывных групп пространственных автоморфизмов алгебр фон Неймана [B7, леммы 3 и 4] следует, что группа $T(a)$ может быть представлена в виде $T(a) = T_1(a) T_2(a)$, где $T_1(a) \in R_1^T$, $T_2(a) \in (R_1^T)' \cap R$. Очевидно, что если E — один из спектральных проекторов унитарной группы $T_2(a)$, то E коммутирует с $T(a)$ и R_1^T . Отсюда получаем, что для любого аналитического по энергии вектора Ψ и $E\Psi$ также аналитичен по энергии. Поэтому

$$\overline{RE\Psi} = \overline{R_1 E\Psi} = \overline{ER_1\Psi} = \overline{ER\Psi}. \quad (3.3)$$

Поскольку множество $\mathfrak{N}$ всех аналитических по энергии векторов плотно в $\mathcal{H}$ и E коммутирует с $\hat{p}_0$, то множество векторов $\{E\Psi, \Psi \in \mathfrak{N}\}$ плотно в $E\mathcal{H}$. Поэтому (3.3) означает, что $E\mathcal{H}$ инвариантно относительно R , и $E \in R'$; так что $T_2(a) \in R' \cap R = \mathcal{L}$, и для всех $A \in R$ имеем $T(a) A T(-a) = T_1(a) A T_1(-a)$. Это значит, что мы можем полагать $T(a) \in R_1^T$. Но, если $\hat{p}_0$ присоединен к R_1^T и P — произвольный проектор из $(R_1^T)'$, то вектор $P\Psi$ снова будет аналитическим по энергии для любого аналитического по энергии $\Psi \in \mathcal{H}$. Отсюда с помощью равенств, аналогичных (3.3), мы полу-

чим, что $P \in R'$, а стало быть, и $(R_1^T)' \subset R'$. В совокупности с $R_1^T \subset R$ это дает $R_1^T = R$. $\square$

Изложенные результаты пока не решают вопроса о существовании и свойствах циклических векторов $R(O)$. Чтобы от свойства Рее–Шлидера перейти к таким векторам, нужно детальнее рассмотреть множество $\mathfrak{N}$ аналитических по энергии векторов и связать его с множеством C_R всех циклических векторов R : очевидно, что циклическими векторами для $R(O)$ являются, во всяком случае, все векторы из множества $\mathfrak{N} \cap C_R$, если таковое не пусто. Основные свойства множества $\mathfrak{N}$, существенные для нашей темы, устанавливаются весьма несложно.

Предложение 3.3. Пусть выполнены аксиомы V, VI. Тогда для множества $\mathfrak{N}$ имеют место следующие свойства:

1) для любого проектора $P \in R'$ множество $\mathfrak{N} \cap P\mathcal{H}$ линейно и плотно в $P\mathcal{H}$;

2) для любого $\Psi \in \mathfrak{N}$ $R'\Psi \subset \mathfrak{N}$;

3) если R — фактор типа I, то в $\mathfrak{N}$ найдутся векторы, отвечающие чистым состояниям на R ;

4) если вектор Φ циклический для R , то $e^{-\hat{p}_0} \Phi$ аналитичен по энергии и также циклический для R , т.е.

$$\Phi \in C_R \Rightarrow \exp(-\hat{p}_0) \Phi \in \mathfrak{N} \cap C_R;$$

5) если выполнены также аксиомы I–III и R — фактор, то нетривиальные локальные наблюдаемые не могут сохранять свойство аналитичности вектора по энергии:

$$\Psi \in \mathfrak{N}, A \in \mathcal{A}, A \neq \lambda I \Rightarrow A\Psi \notin \mathfrak{N}.$$

Доказательство. Свойства 1, 2, 4 получаются прямой проверкой с учетом уже упоминавшегося свойства $T(a) \in R$; свойство 3 следует из 1 с учетом того, что для любого вектора Φ , отвечающего чистому состоянию на алгебре фон Неймана R , все векторы из $\mathcal{H}_\Psi^R$ также отвечают чистым состояниям. Напротив, свойство 5, затрагивающее и локальную структуру теории, является следствием довольно технической и сложной теоремы Борхерса [B5, теорема 6], указывающей некоторые соотношения между векторами из $\mathfrak{N}$ и семействами операторов из $R(O)$ и из $\mathcal{L}$. $\square$

В итоге мы уже можем сформулировать ряд достаточных условий существования циклических (а с учетом второй части теоремы Рее–Шлидера и бициклических) векторов алгебры $R(O)$: а) если $R = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то все $\Psi \in \mathfrak{N}$ бициклически для любой $R(O)$ с $O' \neq \emptyset$; б) если существует циклический для R трансляционно инвариантный вектор Ω (вакуум и, возможно, не единственный), то Ω бициклический для всех $R(O)$ с $O' \neq \emptyset$ (так как трансляционно инвариантные векторы аналитичны по энергии); в) если существует циклический вектор Φ_0 для R , то вектор $\Psi = \exp(-\hat{p}_0) \Phi_0$ бициклический для всех $R(O)$ с $O' \neq \emptyset$. Последнее из этих условий наименее ограничительно: согласно известному критерию [D, с. 302], если алгебра R бесконечна (что, как мы увидим, всегда имеет место в нашей теории), то указанное условие равносильно σ -конечности коммутанта R' , и, следовательно, оно автоматически выполняется, например, в случае сепарабельного гильбертова пространства. Сформулируем полученный вывод как

Предложение 3.4. Пусть выполнены аксиомы I–III, V, VI и алгебра $\mathcal{L}'$ обладает циклическим вектором. Тогда существует общий сепаратор для всех $R(O)$ с $O' \neq \emptyset$. Если же глобальная алгебра R обладает циклическим вектором (когда R бесконечна, этому равносильна σ -конечность R'), то существует общий бициклический вектор для всех локальных алгебр $R(O)$ с $O' \neq \emptyset$.

К результатам о бициклических векторах $R(O)$ можно приходить и не используя векторов, аналитических по энергии, а опираясь на общие теоремы о циклических и разделяющих векторах алгебр фон Неймана. На этом пути достигается некоторое усиление предшествующего результата.

Предложение 3.5 [DM]. Пусть выполнены аксиомы I, III, все алгебры $R(O)$ бесконечны и их коммутанты $R(O)'$ σ -конечны. Тогда существует плотное G_δ ¹⁾ множество векторов, каждый из которых является бициклическим вектором одновременно для всех $R(O)$, $O \in B(M)$.

Доказательство. Обозначим $B_0(M)$ счетное подмножество $B(M)$, состоящее из всех открытых шаров в M с рациональным значением радиуса и рациональными координатами центра; пусть также $C \equiv \bigcap_{O \in B_0(M)} C_{R(O)}$.

Поскольку для любой области $O \in B(M)$ найдется $O_1 \in B_0(M)$ такая, что $O_1 \subset O$, то $C = \bigcap_{O \in B(M)} C_{R(O)}$. Согласно приводимому выше критерию

наличия тотализаторов, $C_{R(O)} \neq \emptyset$; тогда по обобщению этого критерия, полученному в [DM], C есть плотное G_δ -множество. Далее, для любой $O \in B(M)$ найдется $O_2 \in B_0(M)$, пространственноподобная к O , так что по аксиоме III $R(O_2) \subset R(O)'$. Следовательно, любой вектор из C есть сепаратор для $R(O)$. $\square$

В итоге мы видим, что наличие циклических и бициклических векторов у алгебры локальных наблюдаемых — достаточно простой и общий математический факт, к которому приводят как свойства трансляционных автоморфизмов, так и общие теоремы о бесконечных алгебрах фон Неймана (во втором случае аксиомы локальной структуры требуются для установления бесконечности $R(O)$). Но в то же время этот факт несет существенное физическое содержание: коль скоро произвольный вектор $\Phi \in \mathcal{H}$ можно приблизить векторами вида $A\Psi$, $A \in R(O)$, то это значит, что, совершая операции, локализованные в сколь угодно малой области O , мы можем приготовить (например, из вакуумного состояния) состояние, сколь угодно близкое к любому наперед известному векторному или нормальному состоянию.

* * *

Обратимся к рассмотрению свойства факторности локальных алгебр. Заметим сначала, что поскольку данное свойство инвариантно относительно унитарных преобразований, то по аксиоме V имеем

$$R(O) \text{ — фактор} \Rightarrow R(\Lambda(O + a)) \text{ — фактор для всех } (a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow.$$

Классом таких областей, для которых это свойство устанавливается наиболее легко, оказываются введенные выше двойные конусы.

¹⁾ То есть множество, представимое в виде пересечения счетного семейства открытых множеств.

Предложение 3.6 (ср. [Kr 1]). Пусть выполнены аксиомы Ia, IIa, III, IV, и D – двойной конус. Тогда

$$\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}(D') \subset \mathcal{L}, \quad (3.4)$$

где $\mathcal{L}(D)$, $\mathcal{L}(D')$ – центры D и D' соответственно. В частности, если R – фактор, то $R(D)$ и $R(D')$ – факторы.

Доказательство основано на приеме, ради которого в [Kr 1] и была в свое время введена аксиома Ia: область $D \cup D'$ представляем в виде проективного предела при $k \rightarrow \infty$, $\epsilon_k \rightarrow 0$ областей $S_k \supset S_{\epsilon_k}^{(n)}$, где $S_{\epsilon_k}^{(n)}$ – полный пространственноподобный слой, определяемый 4-нормалью n к базе двойного конуса D , т.е.

$$D \cup D' = \text{int} \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k \supset \text{int} \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{\epsilon_k}^{(n)}.$$

Отсюда в силу аксиом Ia, IV

$$R(D \cup D') = \bigcap_{k=1}^{\infty} R(S_k) = R,$$

а с учетом аксиомы IIa

$$R' = R(D)' \cap R(D')',$$

откуда аксиома III сразу дает (3.4). $\square$

Как видно из этого доказательства, в действительности мы получили несколько более широкий результат: $R(O)$ будет фактором (если R – фактор) при любой области O , для которой замыкание объединения $O \cup O'$ содержит полный пространственноподобный слой $S_{\epsilon}^{(n)}$, либо представляется как проективный предел областей, содержащих такой слой. Легко видеть, что такие области не исчерпываются двойными конусами. Более того, использованная схема доказательства автоматически дает факторность и для еще более широкого класса областей. В самом деле, если O_1 – некоторая область такая, что $R(O_1) = R(O)$ и замыкание $O_1 \cup O'$ содержит слой $S_{\epsilon}^{(n)}$, то, применяя доказательство к $O_1 \cup O'$, снова имеем $\mathcal{L}(O) \subset \mathcal{L}$, $\mathcal{L}(O') \subset \mathcal{L}$. Соотношения же типа $R(O_1) = R(O)$ при $O_1 \neq O$ в локальной квантовой теории возникают нередко: это – так называемые “соотношения зависимости”, которые мы будем рассматривать ниже. Каждое такое соотношение дает новое семейство областей O , для которых, по нашему доказательству, $R(O)$ будет фактором. Наиболее известное из таких соотношений – теорема Борхерса о пространственноподобной оболочке (предложение 3.14), и порождаемое этой теоремой семейство “факториальных” областей (в этом случае они носят специальное название “нормальных” областей) мы ниже рассмотрим особо (см. следствие 1 из предложения 3.14); существенно, что оно включает в себя важный класс областей – цилиндры. Наконец, глобальное условие, налагаемое на алгебру R , оказывается возможным значительно ослабить: при рассмотрении правил суперотбора в § 4 мы увидим, что алгебры $R(D)$ остаются факторами во всем широком классе теорий с произвольным множеством физически эквивалентных когерентных суперотборных секторов; в отличие от этого, алгебры $R(D')$ остаются факторами лишь в существенно более

узком классе теорий со множеством неограниченно квазиэквивалентных когерентных секторов.

Другие результаты о факторности локальных алгебр, которые удается получить в рамках чисто аксиоматической теории, относятся лишь к нескольким специальным классам неограниченных областей. Введем

О п р е д е л е н и е 3.1 [Dr1]. Открытая область $O \subset M$ называется *светоподобно монотонной*, если $O' \neq \emptyset$ и выполнено одно из следующих двух условий

(A₊) $O + a \subset O + b$ при $\lambda_a > \lambda_b$,

(A₋) $O + a \supset O + b$ при $\lambda_a > \lambda_b$,

где a, b — произвольные 4-векторы вдоль фиксированного светоподобного направления n : $a^\mu = \lambda_a n^\mu$, $b^\mu = \lambda_b n^\mu$, $\lambda_a, b \in \mathbb{R}$, $(n^\mu)^2 = 0$.

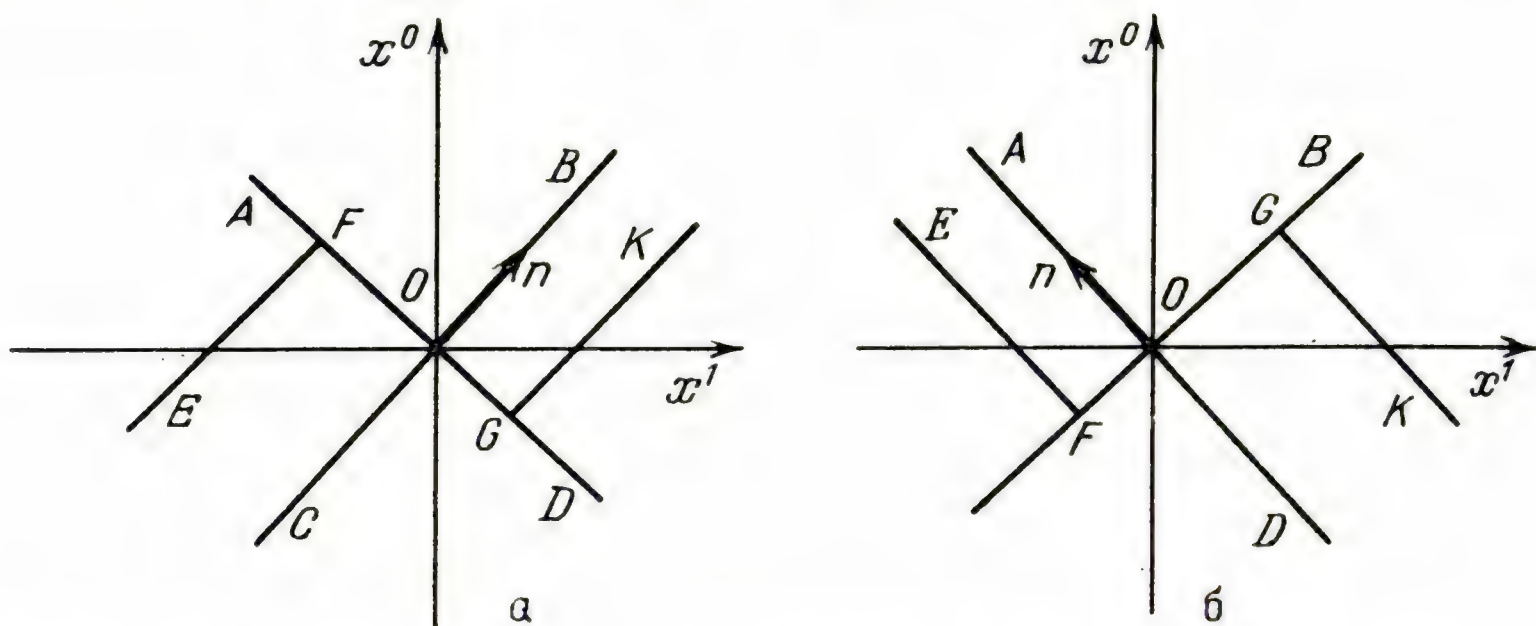


Рис. 3. Примеры светоподобно монотонных областей. а) $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$; области $AOC = W_L$ и $EFOC$ удовлетворяют условию (A₋), $BOD = W_R$ и $BOGK$ — условию (A₊). б) $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$; области W_L и $AOFE$ удовлетворяют условию (A₊), W_R и $KGOD$ — условию (A₋)

Как легко видеть, области, удовлетворяющие условию (A₊), должны быть неограничены в направлении n , области, удовлетворяющие (A₋), — в направлении $-n$ (рис. 3). Простыми примерами таких областей являются так называемые клиновидные области, или клинья:

$$W_R = \{x \in M \mid x^1 > |x^0|\}, \quad W_L = \{x \in M \mid x^1 < -|x^0|\}. \quad (3.5)$$

Области (3.5) и получаемые из них преобразованиями Пуанкаре выделяются целым рядом удобных свойств, и в дальнейшем мы еще не раз будем обращаться к ним (см. § 8).

П р е д л о ж е н и е 3.7 [Dr1]. Пусть выполнены аксиомы I–III, V, VI и, кроме того, существует единственный трансляционно инвариантный вектор $\Omega \in \mathcal{H}$, циклический для $\mathcal{L}$. Тогда для любой светоподобно монотонной области O $R(O)$ есть фактор.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, например, что O удовлетворяет условию (A₊); тогда для произвольного $a = \lambda_a n$ имеем $R(O + a) \subset R(O)$ при $\lambda_a > 0$ и $R(O) \subset R(O + a)$ при $\lambda_a < 0$ (в случае условия (A₋) включения противоположны). Если Q — произвольный проектор из $\mathcal{L}(O)$, то оба

включения равным образом дают свойство

$$Q(a)Q = QQ(a),$$

откуда имеем

$$(\Omega, QT(a)Q\Omega) = (\Omega, QT(-a)Q\Omega) \quad \forall a = \lambda_a n. \quad (3.5)$$

Как следствие спектральности, генератор однопараметрической подгруппы трансляций $T(\lambda_a n)$ есть положительный оператор, и за счет этого левая часть (3.6) допускает аналитическое продолжение по λ_a в верхнюю полуплоскость как ограниченная на бесконечности голоморфная функция; правая часть допускает аналогичное продолжение в нижнюю полуплоскость. В силу равенства граничных значений этих функций на вещественной оси мы получаем единую функцию, аналитичную и ограниченную во всей плоскости, и по теореме Лиувилля эта функция постоянна. При $a = 0$ значение функции есть $\|Q\Omega\|^2$; при $|a| \rightarrow \infty$ воспользуемся асимптотическим поведением операторов трансляций: как мы покажем в п. 3.5, при наличии единственного трансляционно инвариантного вектора Ω для произвольного направления e в M имеет место

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} T(\lambda e) = P_0, \quad (3.7)$$

где P_0 — проектор на отвечающий Ω луч, предел — в слабой операторной топологии. Отсюда имеем

$$\lim_{|\lambda_a| \rightarrow \infty} (\Omega, QT(\lambda_a n)Q\Omega) = (\Omega, QP_0Q\Omega) = (\Omega, Q\Omega)^2.$$

Приравнивая оба значения, получаем

$$\|Q\Omega\|^2 = (\Omega, Q\Omega)^2,$$

что может выполняться лишь при $Q = 0$ или $Q\Omega = \Omega$. Но если Ω циклический для $\mathcal{L}'$, то по теореме Рее—Шлидера Ω есть сепаратор для $R(O)$, и $(Q - I)\Omega = 0$ для $Q \in R(O)$ влечет $Q = I$. $\square$

Совершенно аналогичным методом, основанным на асимптотическом поведении (3.7) операторов трансляций и на свойствах аналитичности, обеспечиваемых спектральностью, можно доказать факторность и для несколько иного класса неограниченных областей — областей типа бесконечных пространственноподобных полос. Набор допущений при этом также остается прежним.

Предложение 3.8 [St φ 2]. Пусть выполнены все допущения предложения 3.7 и область $O \subset M$ с $O' \neq \emptyset$ удовлетворяет условию $O = O + \lambda e$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и некоторого пространственноподобного вектора e . Тогда $R(O)$ есть фактор.

Доказательство. Трансляции $T(\lambda e)$ образуют однопараметрическую группу автоморфизмов $R(O)$, и $\mathcal{B} = R(O) \cap \{T(\lambda e) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ — алгебра неподвижных точек этой группы автоморфизмов. Согласно (3.7) $P_0 \in \{T(\lambda e)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}''$, так что для произвольного проектора $E \in \mathcal{B}$ имеем

$$EP_0 = P_0E \neq 0,$$

поскольку Ω — сепаратор для $R(O)$ и, следовательно, $E\Omega \neq 0$. Отсюда,

так как P_0 — одномерный проектор, $E\Omega = \Omega$, а $(E - I)\Omega = 0$ влечет $E = I$. Таким образом, $\mathcal{B} = \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

Искомый результат получим теперь, доказав, что $\mathcal{L}(O) \subset \mathcal{B}$. Выберем произвольный эрмитов элемент $A = A^* \in \mathcal{L}(O)$ и область $O_1 \subset O$ такую, что для некоторой окрестности $\mathcal{N}$ нуля в M $O_1 + \mathcal{N} \subset O$. Рассмотрим функции

$$F(a) = (T(a)A\Omega, B\Omega), \quad G(a) = (T(-a)B^*\Omega, A\Omega), \quad B \in R(O_1).$$

В силу спектральности F есть граничное значение аналитической функции, голоморфной в трубе будущего $\mathcal{J}^+ = \mathbb{R}^4 + iV^+$; аналогично, G голоморфна в трубе прошлого $\mathcal{J}^- = \mathbb{R}^4 + iV^-$. При этом при $a \in \mathcal{N}$ $B(a)$ коммутирует с A , что дает $F(a) = G(a)$; следовательно, по теореме об острие клина имеем $F(a) = G(a)$ и для всех $a \in M$. Но $F(a)$ есть фурье-образ комплексной меры с носителем в V^+ , $G(a)$ — фурье-образ комплексной меры с носителем в V^- ; поэтому равенство $F(a) \equiv G(a)$ влечет $F = G = \text{const}$. Отсюда

$$(T(a)A\Omega, B\Omega) = (A\Omega, B\Omega) \quad \forall B \in R(O_1).$$

По теореме Рее—Шлидера Ω цикличен для $R(O_1)$, и потому отсюда $A(a)\Omega = A\Omega \quad \forall a \in M$. В частности, при $a = \lambda e$ имеем $A(\lambda e) \in R(O)$, и так как Ω — сепаратор для $R(O)$, то получаем $A(\lambda e) = A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, т.е. $A \in \mathcal{B}$. $\square$

Как мы увидим в п. 3.5, использованный здесь прием доказательства совершенно универсален: группа автоморфизмов W^* -алгебры, удовлетворяющая условию спектральности, всегда оставляет центр алгебры поточечно инвариантным. Мы также увидим (предложение 3.12), что для классов областей, рассмотренных в предложениях 3.7 и 3.8, удастся установить не только факторность $R(O)$, но и тип фактора.

* * *

К исследованию типа локальной алгебры мы и перейдем сейчас. Центральным исходным факт в этой теме — это то, что все алгебры $R(O)$ и все их коммутанты $R(O)'$ для любых областей $O \subset M$ являются бесконечными алгебрами фон Неймана. Доказательство данного факта вполне просто, однако оно опирается на существование бициклических векторов алгебр $R(O)$, что, как мы видели, требует некоторого глобального условия, наиболее слабая форма которого сформулирована в предложении 3.4.

Предложение 3.9. Пусть выполнены аксиомы I—III, V, VI и глобальная алгебра R обладает тотализатором. Тогда все алгебры $R(O)$ бесконечны. Для всех областей O с $O' \neq \emptyset$ коммутанты $R(O)'$ также бесконечны.

Доказательство. Основную часть доказательства составляет простая, но важная

Лемма 3.10 (неравенство Вайтмана). Пусть выполнены аксиомы I—III, V и области $O_1, O \subset M$ таковы, что $O_1 \subset O$ и евклидово расстояние между границами O_1 и O строго положительно (что будем обозначать $O_1 \ll O$):

$$d(O_1, O) = \inf_{\substack{x \in \partial O_1 \\ y \in \partial O}} [|x^0 - y^0|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2]^{1/2} \geq \epsilon > 0.$$

Тогда $R(O_1) \neq R(O)$.

Доказательство леммы 3.10. Допустим, что $R(O_1) = R(O)$. Свойству $O_1 \ll O$ равносильно наличие окрестности нуля $\mathcal{N} \subset M$ такой, что

$$R(O_1 + a) \subset R(O) = R(O_1) \quad \forall a \in \mathcal{N},$$

а отсюда и

$$R(O_1 + a + a') \subset R(O_1) \quad \forall a, a' \in \mathcal{N}.$$

Поскольку же любой вектор $b \in M$ можно представить в виде суммы конечного числа векторов из $\mathcal{N}$, то в силу аксиом II и V получаем

$$R(O_1) = R, \quad R(O_1 + a) = R \quad \forall a \in M.$$

Выбирая теперь $a \in M$ такой, что $O_1 + a \subset O'_1$, из этих равенств и аксиомы III имеем

$$R = R(O_1 + a) \subset R(O'_1)' = R',$$

т.е. глобальная алгебра R абелева. Однако это недопустимо, поскольку в нетривиальной квантовой теории заведомо должны присутствовать несовместимые наблюдаемые. $\square$

Возвращаясь к доказательству предложения 3.9, заметим, что при его допущениях, в силу теоремы Рее–Шлидера, алгебры $R(O_1)$ и $R(O)$ обладают общим бициклическим вектором. Тем самым к ним применима следующая теорема Кадисона (установленная им в [K2] специально для доказательства бесконечности $R(O)$): если R_1, R — алгебры фон Неймана, обладающие общим бициклическим вектором и такие, что $R_1 \subsetneq R$, то R_1 и R бесконечны. Этим доказана бесконечность $R(O)$; бесконечность $R(O)'$ при $O' \neq \phi$ вытекает из аксиомы локальности. $\square$

С л е д с т в и е. Пусть выполнены аксиомы Ia, IIa, III–VI и R — фактор, обладающий тотализатором. Тогда локальные алгебры $R(O)$, $O \in B(M)$, не могут быть абелевыми и не могут содержать вполне непрерывных операторов.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго заметим, что для любой области $O \in B(M)$ найдется двойной конус $D \supset O$, и при сделанных допущениях $R(D)$ есть фактор. Если $R(O)$ содержит вполне непрерывный оператор, то в $R(O)$, а следовательно, и в $R(D)$ — найдется конечномерный проектор P . Индукция $R(D)'_P$ фактора $R(D)'$ по этому проектору есть изоморфизм $R(D)'$ и конечного фактора $R(D)'_P$, откуда $R(D)'$ — конечный фактор, что невозможно в силу предложения 3.9. (Очевидно, что вывод об отсутствии вполне непрерывных операторов в $R(O)$ можно также получить, погружая O в клиновидную область вида $\Lambda(W_R + a)$ или в полосу $S = S + \lambda e$, $e^2 < 0$. В этом случае вместо аксиом Ia, IIa доказательство будет использовать более слабые аксиомы I, II и предположение о существовании единственного вакуумного вектора.) $\square$

В развитие этих начальных результатов, удастся явно указать обширные классы бесконечных проекторов в алгебре $R(O)$. Введем еще один вид "сильного вложения" областей $O_1, O \subset M$: будем обозначать $O_1 < O$, если $O_1 \subset O$ и существует открытая область O_2 такая, что $O'_1 \cap O \supset O_2 \neq \phi$. Тогда, следуя Борхерсу [B8], можно доказать

Предложение 3.11. Пусть выполнены аксиомы I–III, V, VI и области $O_1, O \subset M$ таковы, что $O_1 < O$ или $O_1 \ll O$. Тогда любой проектор

$E \in R(O_1)$ бесконечен в алгебре $R(O)$. При этом в случае $O_1 < O$ имеет место $E \sim F \bmod R(O)$, где F — центральный носитель E в $R(O)$; в случае $O_1 \ll O$, кроме того, $F \in R(O) \cap R'$.

Доказательство. Рассмотрим случай $O_1 < O$. Очевидно, что ввиду $F \geq E$ бесконечность E и F вытекает из $E \sim F$. Будем доказывать это соотношение, предполагая сначала, что R обладает тотализатором. Тогда в силу предложения 3.4 существует вектор $\Psi \in \mathcal{H}$, бициклический для всех локальных алгебр пространственно неполных областей. Возьмем проектор $F' = P_{E\Psi}^{R(O)}$ и покажем, что $F' = F$. По построению $F' \in R(O)'$. Выбирая область $O_2 \subset O \cap O_1'$, с учетом цикличности Ψ для $R(O_2)$ имеем

$$F'\mathcal{H} = \overline{R(O)E\Psi} = \overline{R(O)R(O_2)E\Psi} = \overline{R(O)ER(O_2)\Psi} = \overline{R(O)E\mathcal{H}},$$

т.е. F' мажорирует E . Кроме того, отсюда

$$\begin{aligned} R(O)'F'\mathcal{H} &= R(O)'\overline{R(O)E\mathcal{H}} = \overline{R(O)'R(O)E\mathcal{H}} = \\ &= \overline{R(O)ER(O)'\mathcal{H}} = \overline{R(O)E\mathcal{H}} = F'\mathcal{H}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

т.е. $F'\mathcal{H}$ — инвариантное подпространство $R(O)'$, откуда $F' \in R(O)$. Тем самым и $F' \in \mathcal{Z}(O)$, и в силу равенства третьего и шестого членов в (3.8) $F' = F$. Отсюда и из определения $F' = P_{E\Psi}^{R(O)} = P_{F\Psi}^{R(O)}$, так что заведомо и $P_{E\Psi}^{R(O)} \sim P_{F\Psi}^{R(O)} \bmod R(O)'$. Согласно [[D, с. 221]] последнее равносильно $P_{E\Psi}^{R(O)'} \sim P_{F\Psi}^{R(O)'} \bmod R(O)$. Но благодаря $E, F \in R(O)$ и цикличности Ψ для $R(O)'$, в этом соотношении левый проектор совпадает с E , а правый с F , так что мы доказали искомое: $E \sim F \bmod R(O)$.

Откажемся теперь от допущения о наличии R -тотализатора и рассмотрим разложение $\mathcal{H}$ в прямую сумму циклических подпространств R ; пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ — соответствующее разложение единицы из R' . Применяя вышедоказанный результат к циклическому подпространству $\mathcal{H}_\alpha = G_\alpha\mathcal{H}$, имеем $EG_\alpha \sim FG_\alpha \bmod R(O)G_\alpha$. Пусть F_α — центральный носитель G_α в $R(O)$; тогда с учетом [[D, с. 18]] получим и $F_\alpha E \sim F_\alpha F \bmod R(O)F_\alpha$. Взяв здесь объединение по α и учитывая, что $\sum_{\alpha \in \Delta} G_\alpha = I$ влечет

$$\bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha\mathcal{H} = \mathcal{H}, \text{ имеем снова } E \sim F \bmod R(O).$$

Для второго случая ($O_1 \ll O$) доказательство аналогичного результата довольно громоздко и опирается на ряд вспомогательных утверждений. Поэтому мы не приводим его здесь, отсылая читателя к оригинальной статье Борхерса [B8]. $\square$

Изложенные результаты оставляют пока для алгебр $R(O)$ возможность любого бесконечного типа — I_∞ , II_∞ или III , а также и любой комбинации этих типов, если $R(O)$ не есть фактор. Многие наводящие соображения, а также результаты, получаемые в моделях (§ 9), указывают на то, что наиболее вероятной для $R(O)$ является принадлежность к типу III . Уже и предложение 3.11 поддерживает подобные интуиции, поскольку, например, для многих областей O возможно их покрытие подобластями $O_i < O$ или $O_i \ll O$, так что $R(O)$ тут порождается такими своими подалгебрами, в которых все проекторы бесконечны для $R(O)$. Ни в аксиоматической

теории, ни в конкретных релятивистских моделях¹⁾ до сих пор неизвестно ни одного примера локальной алгебры, которая не принадлежала бы к типу III (свободные ферми-поля при некоторых условиях порождают алгебры $R(O)$ типа I, однако они не удовлетворяют аксиоме локальности; см. [DA2]). Тем не менее строго доказать принадлежность $R(O)$ к типу III в рамках чисто аксиоматического формализма удастся лишь в весьма редких случаях. К этим случаям относятся, прежде всего, рассмотренные выше классы светоподобно монотонных областей (предложение 3.7) и бесконечных пространственноподобных полос (предложение 3.8), а также небольшое обобщение последнего класса, получаемое, когда бесконечность области вдоль луча требуется лишь в одном направлении.

Предложение 3.12. [Dr1,2; Stф 2]. Пусть выполнены аксиомы I–III, V, VI и существует единственный трансляционно инвариантный вектор $\Omega \in \mathcal{H}$. Пусть область O принадлежит классу светоподобно монотонных областей или же классу бесконечных пространственноподобных полос. Тогда $R(O)$ есть фактор типа III; при этом в первом случае $R(O)$ принадлежит типу III₁. Если, далее, O есть область вида $O = \bigcup_{\lambda \geq 0} (O_1 + \lambda e)$,

где $O_1 \in \mathcal{B}(M)$, e – произвольный пространственноподобный вектор, то $R(O)$ – алгебра типа III.

Доказательство в первом случае использует простые элементы теории Томиты–Такесаки. Поскольку вектор Ω бициклический для $R(O)$, он однозначно определяет совершенную обобщенную гильбертову алгебру $R(O)\Omega$ и группу Γ_t , $t \in \mathbf{R}$, модулярных автоморфизмов $R(O)$. Согласно теореме Педерсена–Такесаки [PT], алгебра $R(O)^\Gamma \equiv R(O) \cap \{\Gamma_t, t \in \mathbf{R}\}'$ неподвижных точек преобразований Γ_t задается формулой

$$R(O)^\Gamma = \{A \in R(O) \mid (\Omega, AB\Omega) = (\Omega, BA\Omega) \quad \forall B \in R(O)\}.$$

С помощью трансляционной инвариантности Ω отсюда имеем

$$A \in R(O)^\Gamma \iff A(a) \in R(O+a)^\Gamma \quad \forall a = \lambda_a n,$$

что для всех $A \in R(O)^\Gamma$ дает

$$(\Omega, AT(-a)B\Omega) = (\Omega, BT(a)A\Omega) \quad \forall B \in R(O+a).$$

Замечая, что эта формула полностью аналогична (3.6), повторяем для нее то же рассуждение: применяя аналитическое продолжение по λ_a и теорему Лиувилля, заключаем, что $(\Omega, BT(a)A\Omega)$ не зависит от a ; приравнявая значения этой функции при $a=0$ и $a=\lambda_a n$, $|\lambda_a| \rightarrow \infty$, с помощью (3.7) получаем

$$(\Omega, AB\Omega) = (\Omega, A\Omega)(\Omega, B\Omega).$$

Поскольку Ω – тотализатор для $R(O+a)$, это влечет $A^*\Omega = (\Omega, A\Omega)\Omega$; поскольку же Ω – сепаратор для $R(O)$, то отсюда $A^* = (\Omega, A\Omega)I$ и $R(O)^\Gamma = \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

¹⁾ Напротив, в нерелятивистской теории во многих типичных ситуациях возникает изоморфизм между локальной алгеброй (сопоставляемой области трехмерного пространства или же конечной подрешетке решеточной системы) и глобальной алгеброй, и обе алгебры обычно принадлежат типу I. См., например, [[P]], [X4,5].

Допустим теперь, что $R(O)$ — полуконечный фактор. Тогда все автоморфизмы Γ_t , Γ_t^{-1} внутренние, и инвариант Конна T для $R(O)$ совпадает с $\mathbf{R}$. По теореме Конна [С, теорема 1.3.2] для всех $t \in T$, $\Gamma_t \cdot \Gamma_t^{-1} = u_t \cdot u_t^{-1}$, где u_t — операторы из центра алгебры $R(O)^\Gamma$. По доказанному все такие u_t тривиальны, откуда $R(O) = R(O)^\Gamma = \mathcal{C}(\mathcal{H})$ — противоречие, доказывающее, что $R(O)$ — фактор типа III. Применяя, далее, теоремы Конна 4.2.6 и 5.2.1, мы убеждаемся, что $R(O)$ не может принадлежать соответственно к классам III_λ , $\lambda \in (0, 1)$, и III_0 . В итоге $R(O)$ есть фактор типа III_1 .

Для другого класса областей ($O = O + \lambda e$, $e^2 < 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$) принадлежность $R(O)$ типу III выводится как простое следствие теоремы Стермера [Stφ2, теорема 2.2]: пусть N — полуконечная алгебра фон Неймана, G — группа автоморфизмов N , и N^G — алгебра неподвижных точек N относительно G . Пусть, далее, $N^G = \mathcal{L}$ и N G -конечна в смысле Ковача и Сюча [KoS], т.е. для каждого нетривиального положительного оператора $A \in N$ найдется нормальное G -инвариантное (см. с. 86) состояние ρ на N такое, что $\rho(A) \neq 0$. Тогда N конечна. В самом деле, рассматривая доказательство предложения 3.8, мы видим, что если $R(O)$ полуконечна, то эта теорема полностью применима к $R(O)$ с группой автоморфизмов $G = \{T(\lambda e)\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$, поскольку тогда алгебра неподвижных точек $R(O)^G = \mathcal{L}(O) = \mathcal{C}(\mathcal{H})$, и $R(O)$ G -конечна, ибо состояние ω_Ω осуществляет точное условное ожидание¹⁾ с $R(O)$ на $R(O)^G$, и тем самым выполняется основной критерий G -конечности [KoS, теорема 2]. Следовательно, если $R(O)$ полуконечна, то по теореме Стермера она будет и конечной, что противоречит предложению 3.9.

Рассмотрим последний случай [Dr2]. Выделив последовательность трансляций $T(ne)$, $n = 1, 2, \dots$, заметим, что алгебра $R(O)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $T(ne)R(O)T(-ne) \subset R(O)$;
- 2) $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} A(ne) = \omega_\Omega(A)I \quad \forall A \in R(O)$;
- 3) $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} [A(ne), B] = 0 \quad \forall A, B \in R(O)$

(предел в 3 — в сильной операторной топологии). Действительно, свойство 1 очевидно, свойство 2 — также, с учетом (3.7) и единственности вакуума, а свойство 3 мы легко проверим. Пусть $A, B \in R(O)$. По теореме Рее–Шлидера для любого $\epsilon > 0$ найдется элемент $B_\epsilon \in R(O)$ такой, что $\|(B_\epsilon - B)\Omega\| < \epsilon$. Тогда с учетом свойства 2 и аксиомы III

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \| [A(ne), B] \Omega \| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \| (A(ne)B_\epsilon - B_\epsilon A(ne)) \Omega \| + \\ &+ \epsilon \| A \| = \lim_{n \rightarrow \infty} \| A(-ne)(B - B_\epsilon)A \Omega \| + \epsilon \| A \| = \\ &= \| (B - B_\epsilon)\Omega \| \cdot \| A \Omega \| + \epsilon \| A \| \leq 2\epsilon \| A \|. \end{aligned}$$

1) Линейное отображение $E: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ — C^* -подалгебра C^* -алгебры $\mathcal{A}$) называется точным условным ожиданием, если $E(I) = I$, $E(A) > 0 \quad \forall A > 0$; $\|E(A)\| \leq \|A\|$, $E(SAT) = SE(A)T$, $E(A)^*E(A) \leq E(A^*A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$, $S, T \in \mathcal{B}$. См. [[S, с. 100–101]], [[T2, с. 332]].

Поскольку Ω — сепаратор для $R(O)$, а последовательность $\{[A(ne), B]\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена, имеем отсюда свойство 3.

Допустим теперь, что существует конечный проектор $E \in R(O)$. Тогда на конечной алгебре фон Неймана $R(O)_E = ER(O)E|_{E\mathcal{H}}$ имеется нормальный конечный след τ [[D, с. 97]]; поскольку же $R(O)_E$ обладает вектором-сепаратором $E\Omega$, то τ представим векторным функционалом ω_Ψ , $\Psi \in E\mathcal{H}$ [[D, с. 222]]. Из свойств 2,3 для любых $A, B \in R(O)$ получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Psi, A(ne)EB(ne)\Psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Psi, (AB)(ne)\Psi) = \omega_\Omega(AB).$$

По свойству следа τ отсюда имеем $\omega_\Omega(AB) = \omega_\Omega(BA)$ для всех $A, B \in R(O)$, так что ω_Ω — нетривиальный конечный след на $R(O)$. Но алгебра $R(O)$ бесконечна (предложение 3.9), и мы получили противоречие. $\square$

Что же касается наиболее существенного класса областей — двойных конусов D , то, хотя аксиоматического доказательства здесь не дано, однако при разных предположениях уже накоплено много результатов, говорящих о том, что для $R(D)$ также характерен тип III и, точнее, III_1 (см., например, [HL; L2; Fr 2]). Приведем самый простой результат.

Предложение 3.13 [CX5, Kr 1]. Пусть выполнены аксиомы I–IV, и $R = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Пусть также выполнено условие строгой локальности (см. § 2) для пары областей D, D' . Тогда $R(D)$ не может быть фактором типа I. Если, кроме того, выполнено условие дуальности, то $R(D)$ есть фактор типа III.

Доказательство. Как мы видели при доказательстве предложения 3.6, для двойных конусов D аксиомы Ia, IIa, IV дают

$$R(D \cup D') = \{R(D) \cup R(D')\}'' = R.$$

Отсюда, если $R(D)$ — фактор типа I, то из $R = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, аксиомы III и свойства нормальности дискретных факторов [[D, с. 128, 287]] получаем, что имеет место условие дуальности, $R(D) = R(D')'$. С другой стороны, как мы покажем ниже при анализе строгой локальности (предложение 3.31), строгая локальность для пары областей D, D' влечет следующее свойство: все проекторы из $R(D)$ бесконечны по отношению к алгебре $R(D')' \supset R(D)$. Тем самым, если фактор $R(D)$ удовлетворяет условию дуальности, то все его проекторы бесконечны и, следовательно, $R(D)$ — типа III. Этим доказаны оба искомых утверждения: предполагая, что $R(D)$ — типа I, мы приходим к противоречию; если же вместо этого предположим условие дуальности для $R(D)$ (наряду со строгой локальностью для D и D'), то получаем, что $R(D)$ — типа III. $\square$

Сейчас мы закончим на этом обсуждение свойств отдельной алгебры $R(O)$. Однако в дальнейшем, дополняя аксиоматический формализм новыми структурами или допущениями, мы еще не раз будем возвращаться к этим свойствам.

3.2. Соотношения зависимости. Наша очередная задача — рассмотрение соотношений, связывающих между собой локальные алгебры различных областей. Соотношения такого рода разделяются на две основные категории:

1) Соотношения, утверждающие, что наблюдаемые некоторой области O_2 определяются наблюдаемыми другой области O_1 или, что то же, наблюдаемые области $O = O_1 \cup O_2$ исчерпываются наблюдаемыми ее подобластями

$O_1, R(O) = R(O_1)$. (Отметим, что неравенство Вайтмана дает пример соотношения противоположного характера: если $O_1 \ll O$, то множества наблюдаемых области O и ее подобласти O_1 заведомо различны.) Такие соотношения означают, очевидно, что любыми измерениями в области O_2 невозможно получить никакой новой информации о системе, помимо той, которую дают измерения в O_1 , и, стало быть, физические процессы (воздействия, возмущения) могут приходить в область O_2 только из области O_1 . Или в терминах состояний: если два состояния системы нельзя различить с помощью измерений в O_1 , то их нельзя различить и с помощью измерений в O_2 . Поэтому можно говорить, что O_2 есть "область зависимости" для O_1 , а соотношения типа $R(O_1 \cup O_2) = R(O_1)$ естественно называть *соотношениями зависимости*. Эти соотношения между областями пространства-времени, выражающие свойства распространения квантовополевых процессов, весьма напоминают соотношения, известные в теории гиперболических уравнений (см., например, [[КГ, т. II]]: из совпадения гладких решений волновых уравнений в некоторых областях вытекает их совпадение и в определенных "областях зависимости"), и выражающие свойства распространения классических волновых процессов. Аналогичные соотношения возникают в теории аналитических функций многих комплексных переменных [[В, § 28, 29]], где они причисляются к разряду свойств квазианалитичности. В обоих случаях аналогия с квантовой теорией поля отнюдь не внешняя, а по существу, и упомянутые соотношения зависимости для квантовополевых процессов могут выводиться как на основе аппарата комплексного анализа, так и на основе теорем о поведении решений гиперболических уравнений (отчего иногда говорят, что они выражают гиперболический характер распространения релятивистских квантовых явлений, подобный характеру распространения классических волновых процессов).

2) Соотношения, утверждающие, что физические процессы, протекающие в некоторых областях O_1 и O_2 , взаимно независимы, не оказывают влияния друг на друга. Физической основой таких соотношений служит, разумеется, принцип причинности Эйнштейна, согласно которому события или процессы полностью независимы, если они локализованы во взаимно пространственноподобных областях (отчего такие области часто называют причинно разъединенными, *causally disjoint*). Но взаимная независимость — весьма широкое понятие, которое может выражаться в целом ряде различных конкретных требований. Поэтому соотношения данного типа могут не только выводиться из аксиом, но и предлагаться "непосредственно из физики" в качестве возможных формулировок принципа Эйнштейна. Главной из таких формулировок является аксиома локальности; ряд других мы указали в конце § 2. В противоположность соотношениям первой группы, все они показывают, куда и как не могут распространяться квантовополевые процессы, и поэтому их можно называть соотношениями независимости или же соотношениями причинности по их связи с принципом Эйнштейна. Однако следует подчеркнуть, что с причинностью связаны оба вида соотношений, различие же состоит лишь в том, что соотношения второй группы выражают по преимуществу квантовую причинность, тогда как первой — классическую (хотя они и не дают выполнения классического принципа причинности в его полном объеме: когда состояние системы в момент времени $t = t_1 > 0$ полностью определяется состоянием при $t = 0$).

В вопросе о соотношениях зависимости отчетливо выделяется один центральный факт, вокруг которого группируется большая часть остальных результатов. Это — "теорема о пространственноподобной оболочке", в наиболее простом варианте полученная впервые Борхерсом [B1] в 1961 г. и впоследствии обобщаемая и усиливаемая в работах Араки [A2], Владимирова [[B]], Вайтмана [W3], Крауса [Kr1]. Сейчас мы докажем это важное утверждение в варианте Вайтмана, где удачно сочетаются простота доказательства и сравнительная общность формулировки.

Теорема 3.14 ("о пространственноподобной оболочке"). Пусть выполнены аксиомы I, II, V, VI, и пусть для произвольной области $O \in B(M)$ $O_r \supset O$ есть ее "пространственноподобная оболочка", определяемая как объединение всех двойных конусов $D_{x,y}$, у которых ось $[x, y]$ лежит целиком в O :

$$O_r = \bigcup_{(x,y) \in \Sigma(O)} D_{x,y}; \quad (3.9)$$

$$\Sigma(O) = \{x, y \in M \mid x - y \in V^+, [x, y] \subset O\}.$$

Тогда $R(O_r) = R(O)$.

Доказательство. Пусть $[x, y]$ — времениподобный отрезок, лежащий целиком в O . Поскольку O открыта, то существует его окрестность $\mathcal{N}$, также лежащая в O . Выберем подокрестность $\mathcal{K} \subset \mathcal{N}$ такую, что $\mathcal{K} + a \subset \mathcal{N}$ для всех a из некоторой окрестности сегмента $\lambda(x - y)/2$, $\lambda \in [-1, 1]$. Тогда, если Φ, Ψ — векторы, аналитические для оператора энергии, и $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, то ожидания $(\Phi, A(a)B\Psi)$ и $(\Phi, BA(a)\Psi)$ суть непрерывные функции a . При этом в силу постулата спектральности первая функция есть граничное значение функции $(T(-(a + ib))\Phi, AT(-(a + ib))B\Psi)$, аналитической по $a + ib$ при $b \in V^-$; вторая функция — граничное значение функции $(\Phi, BT(a + ib)AT(-(a + ib))\Psi)$, аналитической по $a + ib$ при $b \in V^+$. Если здесь $A \in R(\mathcal{K})$, $B \in R(\mathcal{N})'$, то обе функции совпадают при $b = 0$ и a — из вышеуказанной окрестности. По теореме об острие клина, они тогда допускают общее аналитическое продолжение в некоторую окрестность двойного конуса $D_{(x-y)/2, -(x-y)/2}$, откуда мы получаем $R(\mathcal{N})' \subset R(D_{x,y})'$. С учетом $R(O)' \subset R(\mathcal{N})'$, беря здесь объединение по всем времениподобным $[x, y] \subset O$, имеем $R(O)' \subset R(O_r)'$. $\square$

Как указывалось выше, теоремы такого типа дают возможность расширить класс областей, для которых локальные алгебры являются факторами. Именно, назовем, следуя Краусу [Kr1], область $O \subset M$ *нормальной*, если для нее замыкание $O_r \cup O'$ содержит полный пространственноподобный слой $S_\epsilon^{(n)}$ либо может быть представлено в духе аксиомы Ia как проективный предел областей, содержащих такой слой. Тогда, с учетом сказанного после предложения 3.6, немедленно получаем

Следствие 1. Пусть выполнены аксиомы Ia, IIa, III–VI и область O нормальна. Тогда $\mathcal{L}(O) \subset \mathcal{L}$, $\mathcal{L}(O') \subset \mathcal{L}$. В частности, если R — фактор, то $R(O)$ и $R(O')$ — факторы.

Очевидно, что класс нормальных областей включает в себя области-цилиндры (рис. 4).

Далее, приведем важное

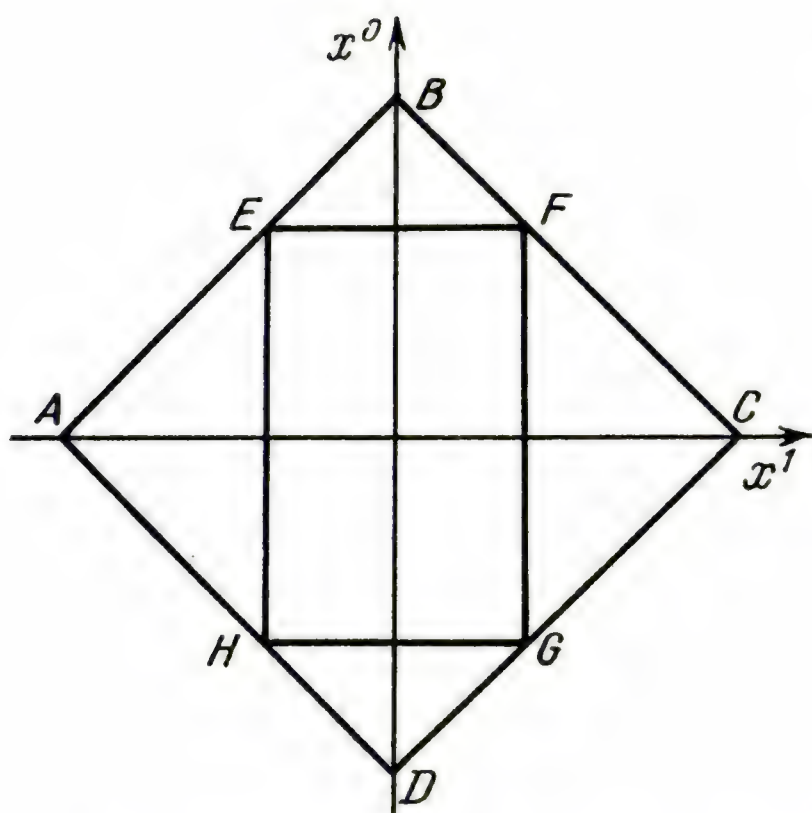


Рис. 4. Цилиндр Z и его пространственноподобная оболочка. $EFGH = Z$; $AEFCHG = Z_r$

Следствие 2 (теорема Борхерса о трубе). Пусть выполнены аксиомы I, II, V, VI и неограниченная область O есть "временноподобная труба" в смысле Борхерса, т.е. O содержит бесконечную временноподобную кривую

$$l = \{x \in M \mid x = x(s), s \in \mathbb{R} \quad \forall_{s_1 \neq s_2} (x(s_2) - x(s_1))^2 > 0,$$

$$\lim_{s \rightarrow \pm \infty} x^0(s) = \pm \infty, |x| \leq r < \infty\}.$$

Тогда $R(O) = R$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой точки $y \in M$ существует область $\tilde{O}$ такая, что $y \in \tilde{O}$ и $R(\tilde{O}) \subset R(O)$. Сопоставим указанной точке временной слой

$$S^{(y)} = \{x \in M \mid y^0 - (|y| + r + 1) < x^0 < y^0 + (|y| + r + 1)\}.$$

Для области $O \cap S^{(y)}$ построим пространственноподобную оболочку $(O \cap S^{(y)})_r$ согласно (3.9) и, применяя к ней теорему 3.14, получим $R((O \cap S^{(y)})_r) \subset R(O)$. Применяя повторно операцию перехода к пространственноподобной оболочке, после конечного числа шагов придем к области $(O \cap S^{(y)})_{rr \dots r}$, которая включает в себя весь двойной конус D_{x_1, x_2} , где x_1, x_2 — точки пересечения кривой l соответственно с верхней и нижней граничными гиперплоскостями слоя $S^{(y)}$. По построению слоя $S^{(y)}$ $y \in D_{x_1, x_2}$, откуда имеем искомое:

$$y \in (O \cap S^{(y)})_{rr \dots r}, \quad R((O \cap S^{(y)})_{rr \dots r}) \subset R(O). \quad \square$$

Имеются обобщения теоремы 3.14, основанные на различных модификациях определения пространственноподобной оболочки. В конструкции Араки [A2] оболочка $O_r^{(A)}$ определяется путем введения пятимерного пространства M_5 с дополнительной пространственной координатой s :

$$O_r^{(A)} = (\varphi O)_r^{(A)} \cap \{s = 0\}, \quad (3.10)$$

где φO — погружение области $O \subset M$ в M_5 , а $(\varphi O)_r^{(A)}$ — оболочка φO , определяемая как объединение двойных конусов, порождаемых всеми временноподобными отрезками из φO , а также всеми сферами из φO , лежащими на

пространственноподобных гиперплоскостях в M_5 (двойной конус, сопоставляемый такой сфере, имеет последнюю своей базой). В.С. Владимировым [[В, § 28, 29]] было введено понятие C -выпуклой оболочки области O : это есть объединение всех двойных конусов, вершины которых можно соединить времениподобной кривой, лежащей в O . Как оболочка Араки, так и C -выпуклая оболочка могут быть шире оболочки (3.9) — и, когда это так, с их помощью можно получать новые обобщения теоремы Борхерса.

Особый вид соотношений зависимости дают "тотальные области" (называемые так по аналогии с тотальными множествами в векторных пространствах): по определению $O \subset M$ есть тотальная область, если $R(O) = R$, т.е. все пространство Минковского есть область зависимости для O . Выше мы уже встречали примеры таких областей:

- полный времениподобный слой $S_\epsilon^{(n)}$ согласно аксиоме IV;
- область $D \cup D'$ для каждого двойного конуса D , если выполнены аксиомы Ia, IIa;
- несвязная область $Z \cup Z'$ для каждого цилиндра Z ;
- времениподобная труба согласно теореме Борхерса.

Получить новые классы тотальных областей и, в частности, нетривиальные усиления теоремы о трубе, позволяет достаточное условие тотальности, найденное Вороновичем и Садовским [SaW]. Оно не использует аксиомы локальности, но опирается на предположение о существовании единственного и циклического вакуумного вектора (влекущее, напомним, $R = \mathcal{B}(\mathcal{H})$).

Сопоставим спектральной мере $E(p)$ группы трансляций $T(a)$ класс "регулярных коммутаторных функций" $W(a)$ таких, что

$$W(a) = \int e^{-ip a} d\mu(p), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} W(b + \lambda a) = 0 \quad (3.11)$$

для всех $a, b \in M, a \neq 0$; здесь $d\mu(p)$ — конечная, не обязательно положительная мера с носителем во множестве $\Delta \cup (-\Delta)$, $\Delta = \text{supp } E(p) \subset \overline{V^+}$. Введенное название связано с тем, что к данному классу принадлежат вакуумные средние коммутаторов $[A, B(a)]$ при любых $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $a \in M$; действительно, функция $W(a) = (\Omega, [A, B(a)] \Omega)$ удовлетворяет первому из условий (3.11) с мерой

$$d\mu(p) = (A^* \Omega, dE(p) B \Omega) - (B^* \Omega, dE(-p) A \Omega) \quad (3.12)$$

и удовлетворяет второму из условий (3.11) в силу кластерного свойства, которое следует из единственности вакуума (см. предложение 3.42).

Предложение 3.15 [SaW]. Пусть выполнены аксиомы I, II, V, VI, и в $\mathcal{H}$ существует единственный и циклический вакуумный вектор Ω . Пусть, далее, множество $Q \subset M$ таково, что

$$W(a) = 0, \quad a \in Q \Rightarrow W(a) \equiv 0 \quad (3.13)$$

для любой регулярной коммутаторной функции W . Тогда для любой области $O \subset M$ область

$$O + Q = \bigcup_{a \in Q} (O + a) = \{x \in M \mid x = y + a, y \in O, a \in Q\} \quad (3.14)$$

является тотальной.

Доказательство. Докажем, что любой оператор $A \in R(O + Q)'$ тривиален, для чего рассмотрим регулярную коммутаторную функцию,

отвечающую коммутатору $[A, B(a)]$, $B \in R(O)$. При $a \in Q$ $B(a) \in R(O + Q)$, так что указанная функция равна 0 при $a \in Q$; тогда, согласно (3.13), она и тождественно равна 0. В силу (3.11) эта функция есть фурье-образ меры (3.12), равенство нулю которой дает

$$(A^* \Omega, dE(p) B \Omega) = (B^* \Omega, dE(-p) A \Omega).$$

Поскольку здесь левая часть имеет носитель в $\overline{V^+}$, а правая — в $\overline{V^-}$, то обе они имеют носитель лишь в $\{p = 0\}$, откуда имеем

$$\begin{aligned} (A^* \Omega, B \Omega) &= \int (A^* \Omega, dE(p) B \Omega) = \int_{\{0\}} (A^* \Omega, dE(p) B \Omega) = \\ &= (A^* \Omega, \Omega)(\Omega, B \Omega) = \alpha(\Omega, B \Omega), \quad \alpha \equiv (A^* \Omega, \Omega). \end{aligned}$$

В силу теоремы Рее-Шлидера $\{B \Omega, B \in R(O)\}$ есть плотное множество, так что полученное равенство дает $A^* \Omega = \bar{\alpha} \Omega$. Поскольку же последнее равенство будет выполняться на любом векторе $C \Omega$, $C \in R(O + Q)$, а множество таких векторов плотно, то получаем искомое: $A^* = c I$. $\square$

Этот критерий получает применение, когда мы находим примеры множеств, удовлетворяющих (3.13). Некоторые такие примеры указывает

Л е м м а 3.16. Пусть выполнена аксиома спектральности в сильной форме VIa. Тогда открытый конус прошлого V^- удовлетворяет (3.13). В случае обычной спектральности условию (3.13) удовлетворяют множества

$$Q_1 = \{x \in M \mid x^0 < -((x^2)^2 + (x^3)^2)^{1/2}\},$$

$$Q_2 = \{x \in M \mid |x^0 - x^1| < \tau\}$$

($\tau > 0$), а также любые множества, получаемые из Q_1 и Q_2 преобразованиями Пуанкаре.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представляя произвольную функцию $W(a)$ класса (3.11) в виде

$$W(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip_0 a^0} d\mu_a(p_0),$$

где $d\mu_a(p_0)$ — конечная проекция конечной меры $e^{ipa} d\mu(p)$ на ось p_0 , мы видим, что в случае сильной спектральности мера $d\mu_a(p_0)$ равна 0 в открытом промежутке $(0, E_0) \cup (0, -E_0)$, $E_0 = \inf\{p_0 \in \mathbb{R} \mid p_0 \in \Delta, p_0 \neq 0\}$. Если же $W(a) = 0$ при $a \in V^-$, то $d\mu_a(p_0)$ есть граничное значение функции, голоморфной в верхней полуплоскости, вследствие чего, по принципу аналитичности,

$$d\mu_a(p_0) = 0, \quad p_0 \in (0, E_0) \cup (0, -E_0) \Rightarrow d\mu_a(p_0) \equiv 0,$$

откуда и $W(a) \equiv 0$.

Пусть теперь $W(a) = 0$ при $a \in Q_1$. Для произвольной непрерывной ограниченной функции φ на $\mathbb{R}$ определим регулярную коммутаторную функцию

$$W_\varphi(a) \equiv \int e^{-ipa} d\mu_\varphi(p), \quad d\mu_\varphi(p) = \varphi(p_1) d\mu(p).$$

Из того, что область Q_1 инвариантна относительно трансляций вдоль оси x^1 , нетрудно вывести свойство

$$W(a) = 0, \quad a \in Q_1 \Rightarrow W_\varphi(a) = 0, \quad a \in Q_1.$$

Учитывая еще $V^- \subset Q_1$, мы видим, что если выбрать φ равной 0 в открытом промежутке $(-E_0, E_0)$, $E_0 \geq \epsilon > 0$, то $W_\varphi(a)$ будет обладать всеми свойствами функции $W(a)$, рассмотренной в предыдущем пункте. Результат этого пункта тогда дает $W_\varphi(a) \equiv 0$, а значит, и $\varphi(p_1) d\mu(p) \equiv 0$ для любой непрерывной ограниченной функции $\varphi(p_1)$, равной 0 в $(-E_0, E_0)$. Ввиду произвольности E_0 это означает

$$\text{supp } d\mu(p) \subset \{p \in M \mid p_1 = 0\},$$

и, следовательно, фурье-образ $W'(a)$ меры $d\mu(p)$ не зависит от a^1 . Второе из условий (3.11) дает тогда искомое, $W'(a) \equiv 0$.

В случае, когда $W'(a) = 0$ при $a \in Q_2$, вводя переменную $m = (p_0^2 - p_1^2)^{1/2}$, преобразуем $W'(a)$ к виду представления Йоста–Лемана–Дайсона:

$$W'(a) = \int_{\Delta} e^{i(p_2 a^2 + p_3 a^3)} W_{mp_2 p_3}(a^0, a^1) d\sigma(m, p_2, p_3),$$

$$W_{mp_2 p_3}(a^0, a^1) = \int e^{-i(p_0 a^0 - p_1 a^1)} d\mu_{mp_2 p_3}(p_0, p_1),$$

где $d\sigma(\cdot)$ — положительная мера на множестве $\Delta \subset \{(m, p_2, p_3) \mid m^2 \geq p_2^2 + p_3^2\}$, $d\mu_{mp_2 p_3}$ — конечная мера на гиперболах $m = \text{const}$ в плоскости (p_0, p_1) . Функция $W_{mp_2 p_3}$ удовлетворяет двумерному уравнению Клейна–Гордона с массой m ; кроме того, если $W'(a) = 0$ при $a \in Q_2$, то из представления Йоста–Лемана–Дайсона для $W'(a)$ вытекает, что $W_{mp_2 p_3}(a^0, a^1) = 0$ в области $\{(a^0, a^1) \in \mathbb{R}^2 \mid |a^0 - a^1| < \tau\}$. Но всякое решение двумерного уравнения Клейна–Гордона, равное 0 в указанной области, также и тождественно равно 0, откуда следует, что вклад в интеграл для $W'(a)$ по мере $d\sigma$ дает только точка $m = p_2 = p_3 = 0$. Опять используя второе из условий (3.11), отсюда имеем $W'(a) \equiv 0$.

Последнее утверждение леммы вытекает из того, что выполнение (3.13) для некоторого множества Q влечет за собой выполнение этого условия и для любого множества $\Lambda Q + a$, $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$. $\square$

Результат этой леммы дает, наконец, возможность указать различные новые примеры тотальных областей.

Предложение 3.17 [SaW]. Пусть выполнены аксиомы I, II, V, VI и в $\mathcal{H}$ существует единственный и циклический вакуумный вектор Ω . Тогда следующие области O пространства Минковского являются тотальными ($R(O) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$):

$O_1 = s + V^-$, где s — пространственноподобная прямая в M ;

$O_2 = \mathcal{N}(s \cup l_x)$, где s — пространственноподобная прямая, l_x — времениподобная кривая, идущая из $x^0 = -\infty$ в некоторую точку $x \in s$, и $\mathcal{N}$ — любая открытая окрестность $s \cup l_x$;

$O_3 = x + Q_2$, $x \in M$;

$O_4 = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} (O_1 + \lambda n)$, $O_1 \subset M$, $n^2 = 0$ (труба, получаемая трансляциями

произвольной области O_1 вдоль изотропного направления n).

Если выполнена аксиома VIa, то тотальными являются также следующие области:

$O_5 = x + V^-$, $x \in M$;

$O_6 = \mathcal{N}(l_x)$, где l_x — времениподобная кривая, идущая из $x^0 = -\infty$ в произвольную точку $x \in M$, $\mathcal{N}$ — любая открытая окрестность l_x .

Для тех из перечисленных областей, которые релятивистски инвариантны, тотальными являются также все области, получаемые из них преобразованиями Пуанкаре.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что каждую из областей O_i , $i = 1, \dots, 6$, с помощью леммы 3.16 можно представить в виде (3.14). В случае O_1 без ограничения общности можно считать, что прямая s параллельна оси x^1 ; тогда

$$O_1 = O_1 + Q_1.$$

Случай O_2 сводится к предыдущему: действуя, как в доказательстве теоремы Борхерса о трубе, мы расширяем область O_2 без изменения локальной алгебры и в итоге получаем

$$R(O_2) \supset R(s + V^-) = \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

В случае O_3 , явно выделяя зависимость Q_2 от параметра τ , имеем

$$Q_2 = Q_2(\tau) = Q_2(\tau/2) + Q_2(\tau/2),$$

откуда

$$O_3 = O + Q_2(\tau/2), \quad O = x + Q_2(\tau/2).$$

Случай O_4 сводится к предыдущему, как случай O_2 — к O_1 : расширяя O_4 , как в доказательстве теоремы о трубе, получим

$$R(O_4) = R(O + Q_2(\tau = 0)) = \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Наконец, если выполнена аксиома VIa, то V^- удовлетворяет (3.13), и тогда

$$O_5 = O + Q, \quad O = x + V^-, \quad Q = V^-.$$

В случае O_6 , подобно O_4 и O_2 , получаем

$$R(O_6) \supset R(x + V^-) = \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Предложение доказано, поскольку последнее его утверждение очевидно. $\square$

В дополнение к исследованию тотальных областей $O \subset M$, $R(O) = R$, естественно поставить вопрос: существуют ли области с прямо противоположным свойством, $R(O) = \mathcal{C}(\mathcal{H})$? Ответ на этот вопрос положителен.

Первым результатом в данном направлении было доказанное Вайтманом

Предложение 3.18. Пусть выполнены аксиомы II, III, V, VI и, кроме того, теория обладает единственным вакуумным вектором Ω , циклическим для $\mathcal{L}'$. Тогда для любой точки $\hat{x} \in M$

$$R(\{\hat{x}\}) = \bigcap_{O \ni \hat{x}} R(O) = \mathcal{C}(\mathcal{H}).$$

Доказательство. Для произвольного оператора $B \in R(\{\hat{x}\})$, полагая по определению

$$B(y + \hat{x}) = T(y)BT(-y),$$

замечаем, что операторнозначная функция $B(y)$ обладает свойством

$$y \in O \Rightarrow B(y) \in R(O)$$

и, значит, в силу локальности

$$[B(x), B(y)] = [B(x), B(y)^*] = 0 \text{ при } (x - y)^2 < 0. \quad (3.15)$$

Тривиальность указанной функции доказывается стандартной техникой аналитического продолжения (ср., например, доказательство предложения 3.15). Вводя непрерывные функции

$$F(x - y) = (\Omega, B(x)^* B(y)\Omega) = (\Omega, B^* T(y - x)B\Omega),$$

$$G(x - y) = (\Omega, B(y)B(x)^*\Omega) = (\Omega, BT(x - y)B^*\Omega),$$

замечаем, что они являются функциями положительного типа и по теореме Бохнера представимы в виде

$$F(x - y) = \int e^{-ip(x-y)} d\mu(p), \quad G(x - y) = \int e^{-ip(x-y)} d\nu(p),$$

где μ и ν — положительные меры, носители которых в силу спектральности лежат в $\overline{V^+}$ и $\overline{V^-}$ соответственно. Поэтому F допускает аналитическое продолжение как голоморфная функция в трубу прошлого $\mathcal{T}^- = \mathbf{R}^4 - iV^+$, G — в трубу будущего $\mathcal{T}^+$, а в силу (3.15) $F(x) = G(x)$ при $x^2 < 0$.

Отсюда вытекает, что $F = G$ всюду, так что меры μ и ν имеют носитель лишь в $\{p = 0\}$. В свою очередь это дает

$$F(x - y) = \text{const} = F(0),$$

а отсюда сразу имеем

$$T(y - x)B\Omega = B\Omega \quad \forall x, y \in M. \quad (3.16)$$

Благодаря единственности вакуума, это означает, что $B\Omega = \lambda\Omega$, $\lambda \in \mathbb{C}$, а так как Ω — сепаратор для всех $R(O)$ с $O' \neq \phi$, то имеем $B = \lambda I$. $\square$

Как видно из доказательства, его главную часть составляет установление факта тривиальности всякого "ограниченного операторного поля", т.е. функции $B: M \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, удовлетворяющей условиям трансляционной ковариантности, спектральности и локальности (в смысле (3.15)): наше утверждение вытекает из этого факта с помощью простого замечания, что наблюдаемые "точечной области" $B \in R(\{\hat{x}\})$ своими сдвигами $B(x)$ порождают ограниченное операторное поле. Несложное обобщение данного результата было получено Вороновичем [Wo], который заметил, что наблюдаемые некоторого класса двумерных ограниченных областей также порождают, в определенном смысле, аналог ограниченного операторного поля.

Предложение 3.19. Пусть выполнены аксиомы II, III, V, VI и, кроме того, теория обладает единственным вакуумным вектором Ω , циклическим для $\mathcal{L}'$. Пусть, далее, компактная область $K \subset M$ удовлетворяет следующему условию: существуют два пространственноподобных орта $n_1, n_2, n_1^2 = n_2^2 = -1$, $(n_1 - n_2)^2 \geq 0$, такие, что для любых $a, b \in K$, $(a - b)^2 \leq 0$, имеет место

$$|(a - b)n_i| \leq \sqrt{-(a - b)^2}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$R_K = \bigcap_{O \supset K} R(O) = \mathcal{C}(\mathcal{H}).$$

Доказательство по своей схеме целиком подобно доказательству предыдущего предложения. Применимость этой схемы обеспечивается следующим свойством областей K : если $|x^0| < |\alpha x^1|$, $\alpha \in (0, 1)$, то множества K и $K + (x^0, x^1, 0, 0)$ имеют открытые окрестности O и O_1 , соответственно такие, что $O \times O_1$. Подобно (3.15), это свойство обеспечивает совпадение функций $F(x)$ и $G(x)$ в некоторой открытой окрестности (именно, при $x = (x^0, x^1, 0, 0)$, $|x^0| < |\alpha x^1|$, $\alpha \in (0, 1)$), откуда, как в предложении 3.18, выводим тождественное равенство этих функций и аналог формулы (3.16):

$$T(x)B\Omega = B\Omega, \quad x = (x^0, x^1, 0, 0).$$

Учитывая, что для любого вектора инвариантность относительно трансляций по времени влечет в силу спектральности полную трансляционную инвариантность, получаем $B = \lambda I$. $\square$

Как показано в [Wo], примерами областей, удовлетворяющих условиям этого предложения, могут служить, в частности, ограниченные подобласти двумерных пространственноподобных гиперплоскостей. В рамках формализма полевых алгебр (см. § 8) радикально иной техникой удастся еще несколько расширить класс областей с тривиальным множеством наблюдае-

мых (а также полей): согласно результату Дрисслера и Саммерса [DrS1], тривиальны алгебры наблюдаемых и полевые алгебры любых областей, которые пространственноподобны к области $(a, \Lambda)(W_R \cup W_L)$ для какого-либо преобразования Пуанкаре (a, Λ) (здесь W_R, W_L — клиновидные области (3.5)). Этому последнему классу областей принадлежат, в частности, любые двумерные пространственноподобные плоскости и любые их подобласти.

Рассмотренными свойствами не исчерпываются соотношения зависимости, обсуждавшиеся в теории Хаага — Араки. Очевидно, что к разряду таких соотношений принадлежит "локальная аксиома примитивной причинности" (аксиома IVб): $R(O) = R(O_c)$, где O_c — причинная тень области O ; сюда же относится и "гипотеза об алмазе", высказанная Араки: предположение о том, что в локальной квантовой теории должно выполняться соотношение $R(O) = R(O'')$, т.е. область O'' должна быть областью зависимости для всякой $O \in B(M)$. Это последнее соотношение является усилением аксиомы IVб: ввиду очевидного включения $O \subset O_c \subset O''$ равенство $R(O) = R(O'')$ влечет и $R(O) = R(O_c)$. Обратно, "гипотеза об алмазе" следует из аксиомы IVб и других аксиом для класса областей $O \in B(M)$, для которых объединение их причинной тени с пространственноподобной оболочкой дает область-алмаз, т.е. $O_r \cup O_c = D = D''$ (такие области изучались в [X1]). Помимо этого, гипотеза об алмазе, а с нею и аксиома IVб вытекают из условия дуальности $R(O') = R(O)'$: с учетом $O' = O'''$, дуальность сразу дает $R(O) = R(O')' = R(O'')$. Вывести же эти свойства непосредственно из (остальных) аксиом Хаага — Араки в общем случае не удастся, хотя такие надежды высказывались неоднократно.

3.3. Дуальность. Из всего комплекса локальных свойств сети $\{R(O)\}$ нам остается рассмотреть лишь соотношения независимости. Основные из них были указаны в конце § 2: это — причинная независимость, строгая локальность, свойство Шлидера, расширенная локальность и дуальность. Все они могут расцениваться как физически естественные свойства, выражающие те или иные стороны принципа причинности Эйнштейна. Нам следует установить критерии их выполнения и их связи между собой, а также с аксиомой локальности — центральным из всех причинных свойств.

Из перечисленных свойств наибольшее внимание уделялось условию дуальности. Оно теснее других связано с остальными структурными свойствами локальной квантовой теории и, кроме того, играет важную роль в ее дальнейшем развитии (см. § 6, 8). В § 9 мы увидим, что из аксиом Хаага — Араки заведомо не вытекает выполнения дуальности для произвольной области $O \in B(M)$, и потому впредь будем понимать под дуальностью, как правило, дуальность для двойных конусов D . Что же касается других областей, то в отдельных случаях (в частности, для обобщенных свободных полей, см. § 9) удастся вывести дуальность для цилиндров Z . Отметим простые следствия такой дуальности. Поскольку область Z'' — двойной конус, то дуальность для цилиндров влечет дуальность для двойных конусов, а также гипотезу об алмазе (часто именуемую теоремой об алмазе) для цилиндров; последняя же в свою очередь влечет

примитивную причинность:

$$\begin{array}{c}
 R(D)' = R(D') \\
 \nearrow \\
 R(Z)' = R(Z') \\
 \searrow \\
 R(Z) = R(Z'') \implies R(S_\varepsilon) = R.
 \end{array}
 \tag{3.17}$$

Последняя импликация здесь очевидна, если рассмотреть последовательность цилиндров высоты ε и возрастающего радиуса.

Простые соображения поясняют смысл условия дуальности. Вообще говоря, сеть локальных алгебр сопоставляется физической системе не единственным образом (§ 2); но все же естественно ожидать, что если сети $\{R_1(O)\}$ и $\{R_2(O)\}$ отвечают одной и той же системе, то они являются взаимно локальными, $R_1(O_1) \subset R_2(O_2)'$ при $O_1 \times O_2$, т.е., иначе говоря, данные сети принадлежат одному классу Борхерса [[СВ, гл. 4]]. С учетом этого имеем элементарное

Предложение 3.20. Пусть в классе Борхерса локальных квантовых теорий $\{R_\gamma(O)\}$ $O \in B(M)$, $\gamma \in \Gamma$ имеется хотя бы одна теория $\{R_\beta(O)\}$, $\beta \in \Gamma$, удовлетворяющая дуальности. Тогда сеть $\{R_\beta(O)\}$ является в данном классе максимальной в смысле

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad \forall D \in B(M) \quad R_\gamma(D) \subset R_\beta(D)$$

и единственной в смысле

$$\exists \gamma \in \Gamma \quad \forall D \in B(M) \quad R_\gamma(D)' = R_\gamma(D') \Rightarrow R_\gamma(O) = R_\beta(O) \quad \forall O \in B(M).$$

Доказательство. Второе утверждение вытекает из первого, а первое — из взаимной локальности:

$$R_\gamma(D) \subset R_\beta(D')' = R_\beta(D). \quad \square$$

Как видно из доказанного, сеть $\{R(O)\}$, удовлетворяющая дуальности, максимальна еще и в том смысле, что она не может служить подсетью никакой другой локальной сети $\{\hat{R}(O)\}$, т.е.

$$R(O) \subset \hat{R}(O) \quad \forall O \in B(M) \Rightarrow R(O) = \hat{R}(O) \quad \forall O \in B(M).$$

(Действительно, локальная сеть и ее подсеть всегда взаимно локальны.) Является также очевидным различие между предложением 3.20 и частным утверждением о том, будто бы все поля из одного класса Борхерса порождают одну и ту же сеть алгебр локальных наблюдаемых. Такое утверждение верно лишь при существенном дополнительном условии: поля должны не только лежать в одном классе Борхерса, но и удовлетворять условию дуальности. В общем же случае класс Борхерса, наряду с данным полем, включает в себя и все локальные функции, которые можно из него построить (например, виковы полиномы, если поле свободно). Дуальность исходного поля, вообще говоря, не влечет дуальности его локальных функций, так что последние, входя в класс Борхерса исходного поля, в то же время имеют в случае отсутствия дуальности строго меньшие локальные алгебры, нежели это поле.

Хотя условие дуальности изучали усердно, в чисто аксиоматической теории очень мало нетривиальных результатов, касающихся этого свойства. Отсюда напрашивается вывод, что дуальность затрагивает какие-то более детальные и глубокие свойства квантовополевых систем, нежели свойства, выражаемые аксиомами Хаага — Араки. Такое предположение вполне подтверждается результатами изучения дуальности в формализме полевых алгебр (§ 8), для алгебр канонических систем и для различных моделей. В рамках же чистой теории Хаага — Араки имеем, прежде всего, элементарное необходимое условие дуальности, показывающее ее тесную связь с глобальной структурой.

Предложение 3.21. Пусть выполнены аксиомы Ia, IIa, IV, и хотя бы для одного двойного конуса D имеет место дуальность. Тогда алгебра R' абелева.

Доказательство. При доказательстве предложения 3.6 показано, что принятые допущения влекут $R' = R(D)' \cap R(D')'$. С учетом дуальности это дает $R' \subset R$. $\square$

Когда R — фактор или же $R(D)$ — фактор хотя бы для одного двойного конуса D , это условие сразу усиливается до $R = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Однако и с этим условием дуальность не удается вывести из аксиом (хотя неизвестно и контрпримера, который показывал бы возможность ее нарушения для двойных конусов в неприводимой теории Хаага — Араки). Более того, до сих пор неизвестны никакие достаточные условия дуальности, выражаемые лишь в терминах общей теории Хаага — Араки. Исключением служит лишь следующее достаточное условие: $R = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $R(D)$ — фактор типа I. Оно сразу вытекает из только что применявшейся формулы $R' = R(D)' \cap R(D')'$: при $R = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ эта формула означает, что $R(D)$ и $R(D')$ образуют факторизацию [[Н, с. 405]], а если $R(D)$ — фактор типа I, то, в силу свойства нормальности дискретных факторов [[D, с. 128, 287]], эта факторизация парная, т.е. $R(D') = R(D)'$. Но по всем данным, и аксиоматическим, и модельным, тип I невозможен для локальных алгебр квантовой теории поля, хотя прямое доказательство этого пока отсутствует. Удалось только найти критерий, при котором условие дуальности является "не зависящим от представления", т.е. его выполнение в каком-либо неприводимом локально нормальном¹⁾ представлении π квази-локальной C^* -алгебры влечет его выполнение и во всех других представлениях этого класса. Такой критерий выделяет класс теорий, где дуальность не связана ни с какими зависящими от представления свойствами, в частности, с наличием вакуума. Его формулировка, хотя отчасти перегружена техническими условиями, однако согласована со свойствами реальных моделей, и критерий находит в них применение. Сравнительная же сложность доказательства вообще характерна для нетривиальных результатов, связанных с дуальностью.

Предложение 3.22 [Dr 5; Su]. Пусть выполнены аксиомы I—III, а также следующее условие, называемое "свойством F ": для любой пары D_1, D_2 двойных конусов таких что $D_1 \ll D_2$ существует дискретный

¹⁾ Представление π называется локально нормальным, если его сужение на любую локальную подалгебру $R(O)$ алгебры $\mathfrak{A}$ есть нормальное представление последней [[БР, с. 131]].

фактор M , для которого

$$R(D_1) \subset M \subset R(D_2).$$

Пусть, далее, существует неприводимое локально нормальное представление π_0 алгебры $\mathfrak{A}$, обладающее следующим свойством: для любых двойных конусов $D_1, D_2, D_1 \ll D_2$, найдется двойной конус $D_3, D_2 \ll D_3$, такой, что

$$\pi_0[R(D_1)' \cap R(D_2)] \subset \overline{\pi_0[\mathfrak{A}(D_1') \cap R(D_3)]}^w \quad (3.18)$$

(замыкание – в слабой операторной топологии). Тогда выполнение дуальности в представлении π_0 :

$$\overline{\pi_0(\mathfrak{A}(D'))}^w = \pi_0(R(D))',$$

влечет ее выполнение в любом неприводимом локально нормальном представлении $\mathfrak{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксировав произвольный двойной конус D , введем сужающуюся последовательность двойных конусов $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ таких, что $D_{n+1} \ll D_n$, $\bigcap_{n=1}^\infty D_n = \bar{D}$. По предположению существует последовательность дискретных факторов $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $R(D_{n+1}) \subset M_n \subset R(D_n) \subset M_{n-1} \subset \dots$. Затем выберем последовательность $\{\hat{D}_i\}_{i=1}^\infty$ двойных конусов, расширяющихся в пределе на все пространство Минковского и таких, что $\hat{D}_i \ll \hat{D}_{i+1}$, $\hat{D}_i \gg D_n$ для всех $i, n = 1, 2, \dots$, и сопоставим ей последовательность дискретных факторов $\{N_i\}_{i=1}^\infty$, для которой $R(\hat{D}_i) \subset N_i \subset R(\hat{D}_{i+1}) \subset N_{i+1} \subset \dots$. Убедимся, что для любого N_i найдется двойной конус $\tilde{D}_i$ такой, что

$$\pi_0[\mathfrak{A}(D') \cap \overline{R(\tilde{D}_i)}^w] \cap \pi_0(N_i) = \pi_0[R(D') \cap N_i]. \quad (3.19)$$

В самом деле, имеем

$$\pi_0[R(D)' \cap N_i] \subset \pi_0[R(D') \cap R(\hat{D}_{i+1})] \subset \overline{\pi_0[\mathfrak{A}(D') \cap R(\tilde{D}_i)]}^w,$$

где первое включение вытекает из $N_i \subset R(\hat{D}_{i+1})$, а второе – из $D \ll \hat{D}_{i+1}$ и (3.18), причем $\tilde{D}_i \gg \hat{D}_{i+1}$. Беря здесь $\cap N_i$, получаем вложение справа налево в (3.19). Обратное вложение очевидно в силу локальности.

Заметим теперь, что фигурирующие в (3.19) сужения π_0 являются нормальными и, следовательно, ультраслабо непрерывными представлениями (локальная нормальность по отношению к $\{N_i\}$ вытекает из локальной нормальности по отношению к сети $\{R(O)\}$); кроме того, они являются точными, так как N_i – фактор и всякое его нормальное представление – изоморфизм. С учетом этого, применяя к (3.19) отображение $\pi \circ \pi_0^{-1}$, являющееся точным и нормальным на каждой алгебре $\pi_0(N_i)$, получаем, что (3.19) верно и в каждом локально нормальном представлении π :

$$\pi[\mathfrak{A}(D') \cap \overline{R(\tilde{D}_i)}^w] \cap \pi(N_i) = \pi[R(D)' \cap N_i]. \quad (3.20)$$

Искомую дуальность в представлении π получим, переходя в этом равенстве к пределу при $i \rightarrow \infty$. Чтобы найти предел правой части, покажем, что

$$\pi[R(D)' \cap \mathfrak{A}] = \overline{\bigcup_{i=1}^\infty \pi[R(D)' \cap N_i]}^u. \quad (3.21)$$

Нам нужно доказать, что для любых $\epsilon > 0$ и $A \in \pi[R(D)' \cap \mathfrak{A}]$ найдутся индекс $i \in \mathbb{N}$ и оператор $C \in \pi[R(D)' \cap N_i]$ такие, что $\|A - C\| \leq \epsilon$. Поскольку $\mathfrak{A} = \bigcup_{i=1}^\infty N_i$

и $\pi(\mathfrak{A}) = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \pi(N_i)}$ и, то существуют индекс $i \in \mathbb{N}$ и оператор $C_1 \in \pi(N_i)$ такие, что

$\|A - C_1\| \leq \epsilon/2$. Отсюда легко проверить, что нужным оператором может служить $C = E(A)$, где $E: \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi) \rightarrow \pi(N_i)$ есть условное ожидание с алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ на дискретный фактор $\pi(N_i)$. Действительно, по стандартным свойствам условного ожидания (см. например, [S, с. 101–102])

$$\|E(A) - C_1\| = \|E(A - C_1)\| \leq \|A - C_1\| \leq \epsilon/2;$$

далее, если $B \in \pi[R(D)] \subset \pi(N_i)$, то

$$[E(A), B] = E([A, B]) = 0,$$

так что

$$E(A) \in \pi[R(D)]' \cap \pi(N_i) = \pi[R(D)' \cap N_i].$$

Кроме того,

$$\|A - E(A)\| = \|A - C_1 + C_1 - E(A)\| \leq \epsilon,$$

и формула (3.21) доказана. Поскольку последовательность $\{N_i\}$ монотонно возрастающая, и для любого $r \in \mathbb{N}$

$$\pi[R(D)' \cap N_r] = \bigcup_{i=1}^r \pi[R(D)' \cap N_i],$$

мы заключаем, что последовательность C^* -алгебр в правой части (3.20) имеет C^* -индуктивный предел при $i \rightarrow \infty$, равный $\pi[R(D)' \cap \mathfrak{A}]$.

В левой части с учетом $N_i \subset R(\tilde{D}_i)$ обе последовательности $\pi(N_i)$ и $\pi(R(\tilde{D}_i))$ имеют C^* -индуктивный предел, равный $\pi(\mathfrak{A})$, откуда для всей левой части этот предел равен $\pi[\overline{\mathfrak{A}(D')}]^w \cap \pi(\mathfrak{A})$. Итак, в пределе при $i \rightarrow \infty$ (3.20) дает

$$\overline{\pi(\mathfrak{A}(D'))}^w \cap \pi(\mathfrak{A}) = \pi(R(D)' \cap \mathfrak{A}),$$

откуда в силу $\overline{\pi(\mathfrak{A})}^w = \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$

$$\overline{\pi(\mathfrak{A}(D'))}^w = \overline{\pi(R(D)' \cap \mathfrak{A})}^w.$$

Осталось лишь доказать, что

$$\overline{\pi(R(D)' \cap \mathfrak{A})}^w = \pi(R(D))'. \quad (3.22)$$

Используем для этого введенную выше сужающуюся последовательность дискретных факторов $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$. Применяя дуальность в представлении π_0 , мы получаем свойство

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = R(D),$$

откуда

$$\pi[R(D)]' = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi(M_n)' \right\}''. \quad (3.23)$$

Для дальнейшего преобразования докажем, что

$$\pi(M_n)' = \overline{\pi(M_n' \cap \mathfrak{A})}^w. \quad (3.24)$$

Поскольку $\hat{D}_i \geq D_n$, $i, n = 1, 2, \dots$, то $M_n \subset N_i$, и по свойству нормальности дискретного фактора M_n' с подалгеброй фон Неймана N_i' имеем

$$N_i = \{M_n \cup (M_n' \cap N_i)\}'' \subset \{M_n \cup (M_n' \cap \mathfrak{A})\}'', \quad i = 1, 2, \dots$$

Это соотношение сохраняется и в представлении π , так как оно локально нормально по отношению к $\{M_n\}$ и $\{N_i\}$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} \pi(N_i) \right\}'' &= \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi) = \left\{ \pi(M_n) \cup \pi(M'_n \cap \mathfrak{A}) \right\}'' = \\ &= \left\{ \pi(M_n) \cup \overline{\pi(M'_n \cap \mathfrak{A})}^w \right\}'', \end{aligned}$$

т.е. коммутирующие алгебры фон Неймана $\pi(M_n)$ и $\overline{\pi(M'_n \cap \mathfrak{A})}^w$ составляют факторизацию, которая является парной ввиду дискретности фактора $\pi(M_n)$, и тем самым эти алгебры удовлетворяют (3.24). Подставляя (3.24) в (3.23) и учитывая, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$M'_n \cap \mathfrak{A} \subset R(D)' \cap \mathfrak{A},$$

получаем вложение справа налево в (3.22). Обратное вложение тривиально. $\square$

Введенное выше свойство F (от английского funnel — воронка: при его выполнении $\mathfrak{A}$ есть C^* -алгебра с сетью подалгебр, именуемой "воронка типа I" [НКК]) еще встретится нам (п. 3.4, § 9). В последние годы оно вызывает все больший интерес, так как обнаруживаются его связи со многими важными проблемами алгебраического подхода, в частности, корпускулярной интерпретацией [Н7] и построением локальных операторов заряда [D6; DL1]. Намеченная в [AL; DL2] общая теория "расщепленных W^* -включений", т.е. пар W^* -алгебр со свойством F , чревата ценными приложениями. Выполнение свойства F доказано в целом ряде моделей, "близких к физике" [ГД; F5, 6; Su; Dr5], нарушение — в ряде моделей с нефизическими свойствами (например, для обобщенного свободного поля с непрерывным распределением массы [DL2]), так что это свойство служит и неким критерием отбора. Что касается дополнительного условия (3.18), то, как отмечается в [Dr5], оно означает отсутствие в теории определенного класса наблюдаемых типа магнитного потока.

Понятно, что полученный критерий может быть применен для доказательства дуальности в таких моделях, которые, обладая нетривиальным взаимодействием, в то же время строятся как представления алгебры некоторой канонической системы, удовлетворяющей дуальности; ср. § 9 (каковы, в частности, локально фоковские модели конструктивной теории поля). Именно таким путем были получены единственные имеющиеся пока доказательства дуальности в моделях с нетривиальным взаимодействием $(P(\varphi)_2)$ и $(\text{Юкава})_2$, причем в связи с анализом модели Юкавы было дано обобщение критерия в рамках формализма полевых алгебр общих Бозе—Ферми систем [Su].

Ввиду отсутствия в аксиоматической теории Хаага—Араки как доказательств, так и реалистических достаточных условий дуальности, неоднократно предлагались различные ослабления последней. Первым из таких ослаблений было следующее условие, названное "слабой дуальностью":

$$\overline{R(D)' \cap \mathfrak{A}}^w = R(D)' \cap R. \quad (3.25)$$

Как легко видеть, обычная дуальность влечет слабую дуальность, поскольку из определения $R(D')$ следует

$$R(D') = \overline{R(D') \cap \mathfrak{A}}^w \subset \overline{R(D)' \cap \mathfrak{A}}^w.$$

Условие (3.25) было введено Борхерсом [B6] в 1965 г. в связи с проблемой построения полей как операторов переплетения когерентных суперот-

борных секторов (см. гл. 2); затем оно обсуждалось в работах Доплихера, Хаага и Робертса по данной проблеме, где было найдено "недостаточно сильным требованием" для получения искомых полевых объектов. Тем не менее в недавних исследованиях Бухгольца и Фреденхагена [BF3] оно оказалось весьма полезным если не для построения самих полей, то, по меньшей мере, на предшествующих этапах реконструкции полевых свойств локальной квантовой теории: как было показано, условие (3.25), подобно дуальности, также исключает неабелевы когерентные секторы (в которых глобальная алгебра приводима), а тем самым и системы с неабелевыми калибровочными группами и аномальными статистиками (см. § 6).

Вполне содержательным является и другое ослабление дуальности — так называемая "существенная дуальность".

О п р е д е л е н и е 3.2 [L3]. Будем говорить, что сеть локальных алгебр $\{R(O)\}$ удовлетворяет условию *существенной дуальности*, если алгебры $\hat{R}(D) \equiv R(D)'$, сопоставляемые двойным конусам D , удовлетворяют обычному условию дуальности: $\hat{R}(D) = \hat{R}(D)'$.

Очевидно, что выполнение обычной дуальности влечет и существенную дуальность. Обратное же, вообще говоря, не так, что устанавливается с помощью модели обобщенных свободных полей: как можно показать (см. § 9), существенная дуальность имеет место для любого обобщенного свободного поля, тогда как обычная дуальность нарушается для некоторых классов таких полей. Тем самым существенная дуальность есть заведомое ослабление дуальности.

П р е д л о ж е н и е 3.23. Локальная сеть $\{R(O)\}$ удовлетворяет *существенной дуальности* тогда и только тогда, когда алгебры $\hat{R}(D)$ удовлетворяют локальности, т.е. множество $\{\hat{R}(O)\}_{O \in V(M)}$ есть также локальная сеть. При этом сеть $\{\hat{R}(O)\}$ есть максимальное локальное расширение сети $\{R(O)\}$, а на неограниченных областях обе сети совпадают: $R(D') = \hat{R}(D')$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В первом утверждении необходимость очевидна, достаточность же вытекает из соотношений

$$\hat{R}(D) \subset \hat{R}(D')' = R(D) \subset R(D')' = \hat{R}(D).$$

Максимальность сети $\{\hat{R}(O)\}$ следует из предложения 3.20, а последнее утверждение очевидно. $\square$

Как явствует из этого предложения, по своему физическому содержанию существенная дуальность представляет собой не что иное, как свойство транзитивности локальности: мы вводим новую сеть $\hat{R}(D)$, локальную по отношению к исходной локальной сети: для всех $O_1, O_2 \in V(M)$, $O_1 \times O_2$,

$$\hat{R}(O_1) \subset R(O_2)',$$

и выполнение существенной дуальности равносильно тому, что эта новая сеть также оказывается локальной. Соответственно все утверждения, устанавливающие выполнение существенной дуальности при тех или иных достаточных условиях, могут рассматриваться как обобщения известной теоремы о классах Борхерса [[CB, теорема 4-21, следствие]], доказывающей транзитивность локальности в вайтмановской теории.

Преимуществом существенной дуальности является то, что для полевых алгебр оказывается возможным вывести это условие из допущений вайтмановского подхода (см. § 8), а в теории Хаага—Араки — указать физически осмысленные достаточные условия, обеспечивающие ее выполнение. Такие условия выводятся в рамках формализма Бизоньяно—Вичмана, эксплуатирующего специальные свойства клиновидных областей W_R , W_L . Разработка данного формализма составляет одно из главных технических достижений алгебраического подхода за последние годы. Оставляя более подробный его разбор до § 8, мы приведем сейчас лишь некоторые его начальные элементы, необходимые для проблемы существенной дуальности.

Как следует из определений (3.5),

$$W'_R = W_L, \quad W'_L = W_R \quad (3.26)$$

(и, таким образом, эти области — еще один пример алмазов, которые не являются двойными конусами). Области W_R и W_L инвариантны относительно целого ряда подгрупп группы Пуанкаре $\mathcal{P}_+^\uparrow$: 1) подгруппа трансляций вдоль осей x^2 и x^3 ; 2) подгруппа вращений $R(e^1, \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ в плоскости (x^2, x^3) (e^1 — единичный орт в направлении x^1); 3) подгруппа лоренцевых или гиперболических вращений $\Lambda(e^1, t)$, $t \in \mathbb{R}$, в плоскости (x^0, x^1) . Соответствующие подгруппы унитарной группы $U(a, \Lambda)$ задают группы пространственных автоморфизмов алгебр $R(W_R)$ и $R(W_L)$. Из этих подгрупп подгруппа $V(t) \equiv U(0, \Lambda(e^1, t))$, $t \in \mathbb{R}$, отвечающая лоренцевым поворотам, играет особую роль, поскольку комплексификация подгруппы $\{\Lambda(e^1, t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ включает преобразование

$$G: (x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (-x^0, -x^1, x^2, x^3)$$

(отражение в плоскости (x^0, x^1)), отображающее W_R на W_L : действительно, мы можем полагать $G = \Lambda(e^1, i\pi)$. За счет этого свойства при определенных дополнительных условиях оказывается возможным показать, что унитарные группы $V(\pm t)$ совпадают с группами модулярных автоморфизмов $R(W_R)$ и $R(W_L)$, а сами эти алгебры удовлетворяют условию дуальности. Указанный результат получается как следствие нижеследующей теоремы, дающей характеристику модулярной группы двух коммутирующих алгебр фон Неймана с общим бициклическим вектором.

Т е о р е м а Р и г о т т и [Rig]. Пусть R_1 и R_2 — алгебры фон Неймана, коммутирующие между собой и обладающие общим бициклическим вектором χ . Пусть также сильно непрерывная унитарная группа $W(t) = \exp(-itA)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $W(t)R_i W(t)^* = R_i$, $i = 1, 2$, $t \in \mathbb{R}$;
- 2) $W(t)\chi = \chi$, $t \in \mathbb{R}$;
- 3) $R_1\chi \subset \mathcal{D}[W(i)]$, $W(i)R_1^h\chi \subset R_2^h\chi$, где R_i^h ($i = 1, 2$) — эрмитова часть алгебры R_i , и $W(i) = \exp A$ — замкнутый неограниченный оператор из комплексификации группы $W(t)$; $\mathcal{D}(W_i)$ — область W_i ;

Тогда $R_1 = R_2'$ и $W(t) = \Delta^{-it/2}$, где Δ — модулярный оператор алгебры R_1 .

Данная теорема непосредственно применима к группе $V(t)$ и алгебрам $R(W_R)$ и $R(W_L)$ теории Хаага—Араки с циклическим вакуумом: очевидно, что аксиомы теории обеспечивают выполнение всех условий теоремы, за

вычетом, возможно, последнего. Пусть $V(t) \rightarrow V(t + i\lambda)$ — комплексификация унитарной группы $V(t)$, представимой по теореме Стоуна в виде $V(t) = \exp(-itK)$ с самосопряженным генератором K ; операторы $V(\tau)$, $\tau \in \mathbb{C}$, суть замкнутые операторы с областями, зависящими только от $\text{Im } \tau$. ($V(\tau)$ осуществляют представление соответствующей подгруппы комплексной группы Лоренца, однако, вообще говоря, уже не задают автоморфизмов R или $R(W_{R,L})$, поскольку аксиома релятивистской ковариантности не распространяется на комплексные преобразования Пуанкаре.) Тогда имеет место

Предложение 3.24 [Rig]. Пусть выполнены аксиомы II, III, V, VI, и теория обладает циклическим вакуумным вектором Ω . Пусть, далее, подгруппа $V(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и оператор $V(i\pi)$ из ее комплексного продолжения $V(\tau)$, $\tau \in \mathbb{C}$, удовлетворяют условию

$$R(D)\Omega \in \mathcal{D}[V(i\pi)], \quad V(i\pi)R(D)^h\Omega \subset R(W_L)^h\Omega \quad (3.27)$$

для любого двойного конуса $D \subset W_R$. Тогда алгебры $R(W_R)$ и $R(W_L)$ удовлетворяют дуальности:

$$R(W_R)' = R(W_L), \quad R(W_L)' = R(W_R),$$

сеть $\{R(O)\}$ удовлетворяет существенной дуальности:

$$\hat{R}(D) = \hat{R}(D')' \quad \forall D \in B(M),$$

и $V(\pm t)$ совпадает с модулярной группой соответственно алгебры $R(W_R)$ или $R(W_L)$:

$$V(\pm t) = \Delta^{\mp it/2\pi},$$

где $\Delta^{\pm 1} = \exp(\pm 2\pi K)$ — модулярный оператор (отвечающий бициклическому вектору Ω) алгебры $R(W_R)$ или $R(W_L)$ соответственно.

Доказательство. С учетом теоремы Рее—Шлидера, пара алгебр $R(W_R)$, $R(W_L)$ удовлетворяет условиям теоремы Риготти, а группа $V(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 этой теоремы. В то же время условие (3.27) не совпадает с критерием 3, выделяющим модулярную группу из всех унитарных групп автоморфизмов, оставляющих инвариантным заданный бициклический вектор. Однако, как легко заметить, из (3.27) вытекает условие 3 для пары алгебр $\bigvee_{D \subset W_R} R(D)$, $R(W_L)$, которая удовлетворяет

и остальным условиям теоремы, а, согласно [Rig], теорема справедлива в случае, когда R_1 — неслабозамкнутая $*$ -алгебра и дает при этом

$$R(W_L)' = \left(\bigvee_{D \subset W_R} R(D) \right)'' = R(W_R),$$

что в силу (3.26) есть условие дуальности для $R(W_R)$ и $R(W_L)$.

Осталось доказать лишь существенную дуальность. Она является следствием формализма Бизоньяно—Вичмана, который мы рассматриваем в п.8.2. Там показывается, что в теории, которая задана исходной локальной сетью Ор $*$ -алгебр $\{\mathcal{P}(O)\}$ вайтмановских полевых операторов $A(f)$ и удовлетворяет, помимо аксиом релятивистской квантовой теории, также дополнительному условию типа (3.27), можно ввести сеть алгебр фон Неймана по формулам $F(O) = L(O')'_N$ (где $L(O)$ — множество всех полевых операторов $A(f)$ с $\text{supp } f \subset O$ и $L(O')'_N$ — коммутант в смысле фон Неймана для

этого множества), и доказать локальность этой сети (предложение 8.10). Наше же утверждение получим, применив предложение 8.10 вместо сети $\{F(O)\}$ к сети $\hat{R}(O) = R(O')'$, где $\{R(O)\}$ — обычная сеть Хаага—Араки с дополнительным условием (3.27). В самом деле, связь сетей $\{F(O)\}$ и $\{\mathcal{P}(O)\}$ — такая же, как и связь сетей $\{\hat{R}(O)\}$ и $\{R(O)\}$, и, повторяя доказательство предложения 8.10, мы из локальности $\{R(O)\}$ при условии (3.27) выведем локальность $\{\hat{R}(O)\}$, т.е. существенную дуальность для $\{R(O)\}$ согласно предложению 3.23. $\square$

Сравнивая полученный результат с предложением 3.22, мы видим, что оба предложения относятся к различным классам локальных квантовых теорий: если в классе, описываемом предложением 3.22, дуальность является не зависящей от представления, то в случае предложения 3.24 она обеспечивается свойствами, заведомо зависящими от представления (как то, существование циклического вакуума), и, вообще говоря, не переносится в другие представления квазилокальной алгебры.

Как мы увидим в § 8, допущение (3.27) связано с существованием *CPT*-оператора Θ . В рамках вайтмановской теории, где оператор Θ имеется (в силу *CPT*-теоремы Паули—Людерса—Йоста), с его помощью будет доказано выполнение (3.27) для полевой Op^* -алгебры $\mathcal{P}(W_R)$, а также и для полевой алгебры фон Неймана $F(W_R)$, т.е. в данной теории (3.27) есть следствие существования *CPT*-оператора. Неясно, справедлив ли этот вывод также и в теории Хаага—Араки: иными словами, достаточно ли дополнить такую теорию лишь условием существования Θ , чтобы получить в ней условие (3.27), а с ним и все утверждения предложения 3.24 (а также другие структурные свойства, которые вытекают из существования Θ в рамках полевой теории; см. теорему 8.7). Причина состоит в том, что для вывода (3.27) и связанных с ним свойств применяется техника вайтмановской теории, основанная на аналитическом продолжении функций Вайтмана и векторнозначных функций вида $A(f_1) \dots A(f_n) \Omega$ по параметрам как группы трансляций, так и группы Лоренца: в рамках же теории Хаага—Араки аналогичная техника пока не была развита. Удалось, однако, показать, что некоторое усиление (3.27) является уже и достаточным условием существования *CPT*-оператора в теории Хаага—Араки: именно таким условием служит [Rig]:

$$R(D) \Omega \subset \mathcal{D}[V(i\pi)], \quad V(i\pi) R(D)^h \Omega \subset R(D^j)^h \Omega, \quad (3.28)$$

$$D^j = \{x \in M \mid (-x^0, -x^1, x^2, x^3) \in D\}$$

для любого двойного конуса $D \subset W_R$. При этом *CPT*-оператором будет $\Theta = U(0, R(e^1, \pi)) J$, где J — модулярная инволюция для алгебры $R(W_R)$ с бициклическим вектором Ω . Математический смысл условий такого рода будет вполне раскрыт лишь в § 8, когда мы полностью опишем модулярную структуру алгебр областей $W_{R,L}$.

Возвращаясь же к условию дуальности, мы можем заключить, что возможность ее вывода в предложении 3.24 возникает, по существу, за счет внесения в формализм Хаага—Араки добавочных допущений о свойствах симметрии системы. С математической точки зрения эти допущения означают усиление аксиомы релятивистской ковариантности за счет требования определенных свойств аналитичности по отношению к параметрам группы

Лоренца: чтобы условие $U(0, \Lambda) R(O) U(0, \Lambda)^{-1} = R(\Lambda^{-1} O)$ можно было аналитически продолжить на Λ из комплексной группы Лоренца (об этом см. также в п. 3.5). Другой путь дополнения аксиоматического формализма новыми элементами возникает в теории канонических систем — и в рамках нее также оказывается возможным вывести условие дуальности (§ 9).

Наконец, еще упомянем, что существенная дуальность использовалась также Робертсом [R4—6] в его попытках найти обобщение математического аппарата алгебраического подхода, более адекватное для описания суперотборной структуры, на основе теории эрмитовых модулей над пучками алгебр фон Неймана. В этих же построениях Робертса им вводилось и еще одно довольно сходное ослабление дуальности, названное "внутренней дуальностью":

$$\mathfrak{A}(O) = \mathfrak{A}(O)^{cc}, \quad (3.29)$$

где $\{\mathfrak{A}(O)\}_{O \in B(M)}$ — сеть локальных C^* -алгебр, которые могут считаться слабо плотными подалгебрами $R(O)$; и $\mathfrak{A}(O)^c = \mathfrak{A}(O)' \cap \mathfrak{A}$ — "относительный коммутант" $\mathfrak{A}(O)$ в $\mathfrak{A}$. Как нетрудно проверить, (3.29) есть, действительно, ослабление дуальности: если для некоторой области $O \in B(M)$ дуальность имеет место хотя бы в одном точном локально нормальном представлении π квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$, то внутренняя дуальность имеет тогда место для самой алгебры $\mathfrak{A}(O)$. В самом деле, так как $\mathfrak{A}(O') \subset \mathfrak{A}(O)^c$, то отсюда $\pi(\mathfrak{A}(O)^{cc}) \subset \pi(R(O'))' \cap \pi(\mathfrak{A})'' = \pi(R(O))$ (последнее равенство — дуальность для $\pi(R(O))$). Поскольку π — точное представление, то это включение означает, что и

$$\mathfrak{A}(O)^{cc} \subset R(O) \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(O).$$

Так как обратное включение тривиально, имеем внутреннюю дуальность для $\mathfrak{A}(O)$. Полученный результат означает также, что, в отличие от дуальности, внутренняя дуальность всегда является не зависящей от представления.

3.4. Причинная независимость и другие причинные свойства. Перейдем к рассмотрению свойства причинной независимости (иногда называемого также статистической или локальной независимостью). Это — одно из не столь многих свойств локальной квантовой теории, по отношению к которым картина Хаага—Араки и картина Хаага—Кастлера обладают заметными различиями не только формального, но и физического характера. Главным источником таких различий служит различная трактовка множества физических состояний: как мы указывали в § 2, для теории Хаага—Кастлера естественно считать физическими состояниями все состояния на абстрактной C^* -алгебре наблюдаемых $\mathfrak{A}$, тогда как для теории Хаага—Араки, которая может рассматриваться как определенное представление абстрактной теории, физическими состояниями естественно считать нормальные состояния (матрицы плотности) данного представления. В итоге возникают две формулировки причинной независимости соответственно для абстрактной и для конкретной алгебраической квантовой теории поля:

$$(CI) \quad \forall_{O_1 \times O_2} \quad \forall_{\omega_i \in \mathfrak{A}(O_i)^{**}} \quad \exists_{\omega \in \mathfrak{A}_1^{**}} \quad \omega|_{\mathfrak{A}(O_i)} = \omega_i, \quad i = 1, 2,$$

$$(CI)_N \quad \forall_{O_1 \times O_2} \quad \forall_{\omega_i \in N[R(O_i)]} \quad \exists_{\omega \in N[R]} \quad \omega|_{R(O_i)} = \omega_i, \quad i = 1, 2,$$

где для алгебры фон Неймана M $N[M] = M_* \cap M_1^{*+}$. Разумеется, в рамках теории Хаага–Араки имеют смысл как первое, так и второе из этих условий, причем, вообще говоря, они оба независимы друг от друга.

Очевидно, что оба условия (CI) и $(CI)_N$ можно обобщенно трактовать как чисто математические свойства, не связанные с формализмом локальной квантовой теории: для этого лишь нужно в их формулировках вместо локальных алгебр $\mathfrak{A}(O_i)$ или $R(O_i)$ полагать произвольные коммутирующие C^* - или W^* -алгебры. Математическое содержание этого обобщенного условия причинной независимости раскрывается благодаря его тесной связи с тремя другими структурными свойствами пары коммутирующих C^* - или W^* -алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Первым из этих свойств служит еще одно "соотношение независимости", введенное в § 2, а именно, "свойство Шлидера". Сейчас мы и его сформулируем обобщенно, как чисто математическое условие: если $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — коммутирующие C^* - или W^* -алгебры, то будем говорить, что пара $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ обладает свойством Шлидера, если имеет место

$$(S) \quad \forall_{\substack{A \in \mathcal{A}_1 \\ A \neq 0}} \quad \forall_{\substack{B \in \mathcal{A}_2 \\ B \neq 0}} \quad AB \neq 0.$$

Другим структурным свойством является существование на алгебре $\mathcal{A}_{12}$ — C^* - или W^* -алгебре, натягиваемой на $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$; — так называемого *факторизуемого состояния* (product state) φ , для которого, по определению,

$$\varphi(AB) = \varphi(A) \varphi(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2$$

(если здесь φ — состояние на некоторой алгебре $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_{12}$, то будем говорить, что φ есть *факторизуемое состояние для пары $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$*). И, наконец, последнее структурное свойство из этого комплекса — изоморфизм алгебры $\mathcal{A}_{12}$ и C^* - или W^* -тензорного произведения алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Взаимосвязи перечисленных структурных свойств мы рассмотрим сначала для случая абстрактных C^* -алгебр (и условия (CI)), а затем — для случая алгебр фон Неймана (и условия $(CI)_N$). Напомним предварительно основные понятия, связанные с тензорными произведениями C^* - и W^* -алгебр (см. [[БР, разд. 2.7.2]] и подробнее — [[Т2, гл. IV]]). Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — подалгебры с единицей абстрактной C^* -алгебры $\mathfrak{A}$. Обозначим $\mathfrak{A}_1 \odot \mathfrak{A}_2$ *прямое алгебраическое произведение $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$* —

множество всех конечных сумм вида $\sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i$, $A_i \in \mathfrak{A}_1, B_i \in \mathfrak{A}_2$. На

$\mathfrak{A}_1 \odot \mathfrak{A}_2$ можно вводить различные топологии τ , затем пополняя это множество до топологического тензорного произведения $\mathfrak{A}_1 \otimes_{\tau} \mathfrak{A}_2$. В частности, в числе τ существуют C^* -нормы, пополнения по которым являются C^* -алгебрами, а также кросс-нормы, определяемые свойством $\|A \otimes B\| = \|A\| \cdot \|B\|$; особую роль среди них играет так называемая инъективная C^* -кросс-норма $\|\cdot\|_{\alpha}$ (или же кратко, " α -норма"), наименьшая из всех C^* -норм. Если $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ — операторные C^* -алгебры в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то $\|\cdot\|_{\alpha}$ совпадает с естественной операторной

нормой в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. В случае же алгебр фон Неймана R_1 и R_2 (действующих, вообще говоря, в различных гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$), определено W^* -тензорное произведение $R_1 \bar{\otimes} R_2$, совпадающее с алгеброй фон Неймана в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, порождаемой всеми операторами вида $A \otimes I_2$, $A \in R_1$ и $I_1 \otimes B$, $B \in R_2$ (I_i — единичные операторы в $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$).

Следующее утверждение дает достаточно полный комплекс свойств, связанных с условием причинной независимости в абстрактном алгебраическом подходе.

Т е о р е м а 3.25 [Roo]. Пусть $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ — коммутирующие C^* -подалгебры с единицей 1 C^* -алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ причинно независимы в смысле (CI);
- 2) $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ обладают свойством Шлидера (S);
- 3) для любой пары состояний φ_i на $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$, существует факторизуемое состояние φ на $\mathfrak{A}$ такое, что

$$\varphi(AB) = \varphi_1(A) \varphi_2(B) \quad \forall A \in \mathfrak{A}_1, B \in \mathfrak{A}_2;$$

- 4) существует алгебраический $*$ -изоморфизм $\Phi: \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_1 \odot \mathfrak{A}_2$ такой, что для всех $A_i \in \mathfrak{A}_1, B_i \in \mathfrak{A}_2$

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^n A_i B_i\right) = \sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i, \quad (3.30)$$

и влекут свойство

- 5) существует непрерывный $*$ -гомоморфизм

$$\bar{\Phi}: \overline{\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2}^u \rightarrow \mathfrak{A}_1 \otimes_{\alpha} \mathfrak{A}_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы установим импликации $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ и $4 \rightarrow 5$. Из них наиболее нетривиальны те, которые связаны с тензорным произведением: $2 \rightarrow 4$ и $4 \rightarrow 5$; их доказательства мы приведем схематически, отсылая за полным изложением к оригинальной работе Рооса [Roo].

$1 \rightarrow 2$. Допустим, что найдутся ненулевые $A \in \mathfrak{A}_1, B \in \mathfrak{A}_2$ такие, что $AB = 0$. Тогда для элементов $A' = \beta^{-1} A^* A \in \mathfrak{A}_1$ (где $\beta \in \sigma(A^* A)$, $\beta \neq 0$, $\sigma(\cdot)$ — спектр элемента C^* -алгебры; см. [[Д, § 1]]) и $B' = BB^* \in \mathfrak{A}_2$ имеет место

$$A'B' = 0, A' \neq 0, B' \neq 0, A'^* = A', 1 \in \sigma(A'),$$

откуда

$$C \equiv (I - A')^2 \geq 0, 0 \in \sigma(C), \beta \in \sigma(C + \beta). \quad (3.31)$$

На подпространстве алгебры $\mathfrak{A}$, порождаемом операторами I, C , определим функционал $\tilde{\varphi}_1$ условиями

$$\tilde{\varphi}_1(I) = 1, \tilde{\varphi}_1(C) = 0.$$

Это — положительный функционал, так как в силу (3.31) $\lambda I + \mu C \geq 0$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+$, влечет $\tilde{\varphi}_1(\lambda I + \mu C) = \lambda \geq 0$. Следовательно, $\tilde{\varphi}_1$ можно продолжить до состояния φ_1 на $\mathfrak{A}_1$, для которого $\varphi_1((I - A')^2) = 0$; кроме того, ввиду неравенства $|\varphi_1(A)|^2 \leq \|\varphi_1\| \varphi_1(A^* A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}_1$, имеем также $\varphi_1(I - A') = 0$.

Выберем теперь состояние φ_2 на $\mathfrak{A}_2$ такое, что $\varphi_2(B') \neq 0$ и покажем, что φ_1 и φ_2 не могут иметь общего расширения на $\mathfrak{A}$. Действительно, если такое расширение φ существует, то по неравенству Шварца

$$|\varphi((I - A')(I + B'))|^2 \leq \varphi((I - A')^2) \varphi((I + B')^2) = \\ = \varphi_1((I - A')^2) \varphi_2((I + B')^2) = 0.$$

Но, с другой стороны,

$$\varphi((I - A')(I + B')) = \varphi(I - A' + B') = \\ = \varphi_1(I - A') + \varphi_2(B') = \varphi_2(B') \neq 0,$$

и мы получили, что нарушение (S) влечет и нарушение (CI).

$2 \rightarrow 4$. Как легко проверить, отображение Φ , определенное согласно (3.30), будет представлять собой искомый изоморфизм $*$ -алгебр $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_1 \odot \mathfrak{A}_2$, если имеет место следующее свойство, называемое "алгебраической независимостью" $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$: пусть $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$, $\{B_k\}_{k=1, \dots, m}$ — множества линейно независимых элементов соответственно из $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$; тогда $\{A_i B_k\}_{i=1, \dots, n, k=1, \dots, m}$ есть множество линейно независимых элементов

из $\mathfrak{A}$. Поэтому достаточно доказать, что свойство Шлидера влечет алгебраическую независимость $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Довольно громоздкое, хотя идейно простое, доказательство этого факта [Roо, королларий] распадается на ряд утверждений о свойствах линейной зависимости наборов элементов из $\mathfrak{A}$ вида $A_i B_i$, $A_i \in \mathfrak{A}_1$, $B_i \in \mathfrak{A}_2$; согласно основному из них, если выполняется

свойство Шлидера, то свойство $\sum_{i=1}^n A_i B_i = 0$ влечет линейную зависимость как набора $\{A_i\}$, так и набора $\{B_i\}$, $i = 1, \dots, n$.

$4 \rightarrow 3$. Для произвольных состояний φ_1 на $\mathfrak{A}_1$ и φ_2 на $\mathfrak{A}_2$ введем функционал $\tilde{\varphi} = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ на $*$ -алгебре $\mathfrak{A}_1 \odot \mathfrak{A}_2$ и заметим, что он также является состоянием (см., например, [Т2, гл. IV, § 4]). В силу 4 $\tilde{\varphi}$ определяет на $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$ функционал φ_{12} , задаваемый формулой

$$\varphi_{12}(\cdot) = \varphi(\Phi(\cdot)) = \varphi_1 \otimes \varphi_2 \cdot \Phi,$$

и этот функционал также является состоянием, поскольку его положительность вытекает из того, что при $A \in \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$, $A \geq 0$, имеем и $\Phi(A) \geq 0$. Очевидно, что свойство (3.30) обеспечивает факторизуемость состояния φ_{12} :

$$\varphi_{12}(AB) = (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \Phi(AB) = \varphi_1(A) \varphi_2(B) \quad \forall A \in \mathfrak{A}_1, B \in \mathfrak{A}_2.$$

Наконец, φ_{12} обладает продолжением до состояния φ на $\mathfrak{A}$, и условие 3 получено.

Импликация $3 \rightarrow 1$ очевидна.

$4 \rightarrow 5$. Нетрудно показать, что изоморфизм Φ , удовлетворяющий (3.30), непрерывен по отношению к α -норме. Для этого на $\mathfrak{A}_1 \odot \mathfrak{A}_2$ введем "β-норму":

$$\left\| \sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \right\|_{\beta} = \left\| \sum_{i=1}^n A_i B_i \right\|.$$

Это норма благодаря условию 4, и можно прямо проверить, что она удов-

летворяет C^* -условию, т.е.

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \right)^* \left(\sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \right) \right\|_\beta = \left\| \sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \right\|^2.$$

Поскольку же α -норма является наименьшей из всех C^* -норм, то

$$\begin{aligned} \left\| \Phi \left(\sum_{i=1}^n A_i B_i \right) \right\|_\alpha &= \left\| \sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \right\|_\alpha \leq \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \right\|_\beta = \left\| \sum_{i=1}^n A_i B_i \right\|, \end{aligned}$$

что и означает непрерывность Φ по отношению к $\|\cdot\|_\alpha$. В результате Φ допускает продолжение до гомоморфизма

$$\bar{\Phi}: \overline{\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2}^u \rightarrow \mathfrak{A}_1 \otimes_\alpha \mathfrak{A}_2,$$

и теорема доказана. $\square$

Понятна причина, по которой условие 5 этой теоремы, вообще говоря, слабее 1—4: если задан произвольный гомоморфизм $\bar{\Phi}$, то мы не можем доказать, что его сужение на $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$ будет обладать свойством (3.30) (при наличии которого отображение $\bar{\Phi}$ можно называть "естественным"); за счет этого из 5 не удастся получить ни 4, ни 3. В случае W^* -алгебр ситуация, однако, оказывается иной: аналогом условия 5 там служит не гомоморфность, а изоморфность соответствующих алгебр, и удастся указать достаточное условие, при котором упомянутый изоморфизм является естественным (см. предложение 3.27).

Прямое дополнение к теореме 3.25 служит

Предложение 3.26 [Roo]. Пусть $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ — коммутирующие C^* -подалгебры с единицей C^* -алгебры $\mathfrak{A}$, удовлетворяющие условию (CI). Тогда для любой пары чистых состояний φ_1 на $\mathfrak{A}_1$ и φ_2 на $\mathfrak{A}_2$ существует чистое состояние φ на $\mathfrak{A}$, являющееся их общим продолжением.

Доказательство. Обозначая $\ker \bar{\Phi}$ ядро гомоморфизма $\bar{\Phi}$ и $\mathfrak{A}_{12} \equiv \overline{\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2}^u$, имеем, что алгебры $\mathfrak{A}_{12}/\ker \bar{\Phi}$ и $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ изоморфны и, следовательно, дуальное отображение $\Phi^*: \tilde{\varphi} \rightarrow \tilde{\varphi} \circ \bar{\Phi}$ осуществляет изоморфизм множеств состояний:

$$\Phi^*: (\mathfrak{A}_1 \otimes_\alpha \mathfrak{A}_2)_1^{*+} \rightarrow S_{\bar{\Phi}} \doteq \{ \varphi \in (\mathfrak{A}_{12})_1^{*+} \mid \varphi|_{\ker \bar{\Phi}} = 0 \} \simeq (\mathfrak{A}_{12}/\ker \bar{\Phi})_1^{*+},$$

переводящий чистые состояния в чистые состояния на $\mathfrak{A}_{12}/\ker \bar{\Phi}$. Тем самым, поскольку для чистых состояний φ_1 на $\mathfrak{A}_1$ и φ_2 на $\mathfrak{A}_2$ состояние $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \in (\mathfrak{A}_1 \otimes_\alpha \mathfrak{A}_2)_1^{*+}$ также чисто, то функционал $\varphi_{12} = \varphi_1 \otimes \varphi_2 \circ \bar{\Phi}$ есть чистое состояние на $\mathfrak{A}_{12}/\ker \bar{\Phi}$. Рассмотрим φ_{12} как состояние на $\mathfrak{A}_{12}$ (т.е. как элемент из $S_{\bar{\Phi}} \subset (\mathfrak{A}_{12})_1^{*+}$) и допустим, что в этом случае φ_{12} не является чистым, т.е. существует подчиненное чистое состояние $\varphi' < \varphi_{12}$, $\varphi' \in (\mathfrak{A}_{12})_1^{*+}$. Тогда из $\varphi_{12}(A) = 0 \quad \forall A \in \ker \bar{\Phi}$ следует, что и $\varphi'(A) = 0 \quad \forall A \in \ker \bar{\Phi}$, т.е. $\varphi' \in S_{\bar{\Phi}}$ и тем самым определяет чистое состояние на алгебре $\mathfrak{A}_{12}/\ker \bar{\Phi}$, подчиненное φ_{12} уже в смысле этой последней. Но φ_{12} чисто на $\mathfrak{A}_{12}/\ker \bar{\Phi}$ и, следовательно, $\varphi' = \varphi_{12}$, и φ_{12} чисто как состояние на $\mathfrak{A}_{12}$. Продолжая φ_{12} до чистого состояния на $\mathfrak{A}$, получаем искомое чистое состояние, являющееся общим расширением φ_1 и φ_2 . $\square$

Возвращаясь к физической ситуации ($\mathfrak{A}_{1,2} = \mathfrak{A}(O_{1,2}), O_1 \times O_2$), мы видим, что полученные результаты еще отнюдь не означают выполнения (CI) в локальной квантовой теории, а только дают ряд необходимых и достаточных условий этого выполнения. В рамках абстрактной теории Хаага—Кастлера (а только для нее, как мы указывали, (CI) служит адекватной формулировкой причинной независимости), ни одно из этих условий не удалось вывести из аксиом теории; так что причинная независимость по-прежнему остается здесь только постулатом, одним из физически естественных причинных свойств, связь которого с системой аксиом Хаага—Кастлера еще не выяснена до конца. Напротив, в теории Хаага—Араки, как мы увидим ниже (предложение 3.34 и следствие из него), свойство S удается вывести из аксиом (при некоторых ограничениях на пару областей O_1, O_2). Соответственно условие (CI) в теории Хаага—Араки также оказывается следствием аксиом — но это, однако, еще не решает вопроса о причинной независимости, поскольку ее адекватной формулировкой является здесь не (OI), а $(CI)_N$.

Что же касается условия $(CI)_N$, то для него возникает несколько иной комплекс результатов, нежели в случае (CI). В целом этот комплекс более тесно связан "с физикой", со структурой локальной квантовой теории; однако и в нем возможно — и целесообразно — выделить ряд результатов, которые из всех физических свойств затрагивают только аксиому локальности, и потому могут быть сформулированы безотносительно к теории Хаага—Араки.

Предложение 3.27. Пусть R_1 и R_2 — коммутирующие алгебры фон Неймана, $R_{1,2} = \{R_1 \vee R_2\}''$. Тогда каждое из ниже перечисленных условий влечет все следующие за ним:

1) R_1 и R_2 обладают свойством F: найдутся дискретные факторы M_1 и M_2 такие, что

$$R_1 \subset M_1 \subset M_2' \subset R_2';$$

2) существует изоморфизм алгебр фон Неймана

$$\Phi: R_{1,2} \rightarrow R_1 \bar{\otimes} R_2,$$

обладающий "свойством естественности" (3.30);

3) для любой пары нормальных состояний ω_i на $R_i, i = 1, 2$, существует нормальное состояние ω на $R_{1,2}$ такое, что

$$\omega(AB) = \omega_1(A)\omega_2(B) \quad \forall A \in R_1, B \in R_2;$$

4) на $R_{1,2}$ существует нормальное состояние ω , факторизуемое по отношению к R_1 и R_2 :

$$\omega(AB) = \omega(A)\omega(B) \quad \forall A \in R_1, B \in R_2.$$

Кроме того, если алгебры R_1 и R_2 — факторы, то имеет место импликация $4 \rightarrow 3$, а если $R_{1,2}$ — фактор, то все условия 2 — 4 эквивалентны.

Доказательство. Чтобы вывести отношение $1 \rightarrow 2$, покажем, что свойство 2 всегда имеет место для пары M_1, M_2 .

Лемма 3.28. Пусть M_1, M_2 — коммутирующие алгебры фон Неймана, и хотя бы одна из них является фактором типа I. Тогда существует естественный (в смысле (3.30)) изоморфизм

$$\psi: M_{1,2} \rightarrow M_1 \bar{\otimes} M_2, \quad M_{1,2} \equiv \{M_1 \vee M_2\}''.$$

Доказательство леммы. Пусть M_1 — дискретный фактор; тогда существуют гильбертовы пространства $\tilde{\mathcal{H}}$, $\tilde{\mathcal{H}}'$ и изометрия $U: \mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} \otimes \tilde{\mathcal{H}}'$ такие, что

$$UM_1U^* = \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}) \bar{\otimes} \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{H}}'). \quad UM'_1U^* = \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{H}}) \otimes \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}'), \quad (3.32)$$

откуда и

$$UM_2U^* = \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{H}}) \otimes \tilde{M}_2, \quad (3.33)$$

где $\tilde{M}_2$ — алгебра фон Неймана в $\tilde{\mathcal{H}}'$. Простое вычисление дает также

$$UM_{1,2}U^* = \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}) \otimes \tilde{M}_2. \quad (3.34)$$

Далее, введем отображения $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ и $\tilde{M}_2$ в $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}} \otimes \tilde{\mathcal{H}}')$:

$$\pi_1: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A} \otimes I_{\tilde{\mathcal{H}}'}, \quad \forall \tilde{A} \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}),$$

$$\pi_2: \tilde{B} \rightarrow I_{\tilde{\mathcal{H}}} \otimes \tilde{B} \quad \forall \tilde{B} \in \tilde{M}_2.$$

Поскольку π_1 и π_2 — изоморфизмы, в силу (3.32) и (3.33) их композиция с пространственным изоморфизмом $U \cdot U^*$ дает изоморфизмы

$$\chi_1: \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}) \rightarrow M_1, \quad \chi_1(\cdot) = U^* \pi_1(\cdot) U,$$

$$\chi_2: \tilde{M}_2 \rightarrow M_2, \quad \chi_2(\cdot) = U^* \pi_2(\cdot) U.$$

Как известно (см. например, [Т2, следствие IV.5.3]), в этом случае существует и изоморфизм соответствующих W^* -тензорных произведений:

$$\begin{aligned} \chi: \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}) \bar{\otimes} \tilde{M}_2 &\rightarrow M_1 \otimes M_2, \quad \chi(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) = \\ &= \chi_1(\tilde{A}) \otimes \chi_2(\tilde{B}) \quad \forall \tilde{A} \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}), \quad \tilde{B} \in \tilde{M}_2, \end{aligned}$$

который и порождает, с учетом (3.34), искомый изоморфизм ψ . Действительно, полагая $\psi = \chi \circ (U \cdot U^*)$, тривиально проверяем, что ψ является естественным: для любых $A = U^* \tilde{A} \otimes I_{\tilde{\mathcal{H}}}, U \in M_1, B = U^* I_{\tilde{\mathcal{H}}} \otimes \tilde{B} U \in M_2$

$$\psi(A \otimes B) = \chi(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) = A \otimes B. \quad \square$$

Возвращаясь к доказательству $1 \rightarrow 2$ в предложении 3.27, рассмотрим сужение Φ изоморфизма ψ на подалгебру $R_{1,2} \subset M_{1,2}$:

$$\Phi = \psi|_{R_{1,2}}: R_{1,2} \rightarrow M_1 \bar{\otimes} M_2.$$

Очевидно, что, благодаря естественности ψ , Φ есть отображение на $R_1 \bar{\otimes} R_2$, и поскольку нормальность и изоморфность отображения сохраняются при сужении, то условие 2 получено.

$2 \rightarrow 3$. Как известно (см., например, [D, с. 67]), для любой пары нормальных состояний ω_i на R_i существует единственное нормальное состояние $\tilde{\omega}$ на $R_1 \bar{\otimes} R_2$ такое, что

$$\tilde{\omega}(A \otimes B) = \omega_1(A) \omega_2(B) \quad \forall A \in R_1, B \in R_2.$$

Легко видеть, что функционал $\omega = \tilde{\omega} \circ \Phi$ есть нормальное состояние на $R_{1,2}$, удовлетворяющее условию 3.

Поскольку $3 \rightarrow 4$ очевидно, то первая часть утверждений доказана. Пусть теперь R_1 и R_2 — факторы, и на $R_{1,2}$ существует нормальное факторизуемое состояние ω . Заметим, что всякая пара состояний ω_i на R_i определяет состояние $\omega_1 \tilde{\times} \omega_2$ на $*$ -алгебре $A_{1,2} = R_1 \vee R_2$ по формуле

$$\begin{aligned} (\omega_1 \tilde{\times} \omega_2) \left(\sum_{i=1}^n A_i B_i \right) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_1(A_i) \omega_2(B_i) \quad \forall A_i \in R_1, B_i \in R_2, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Если ω_i нормальны, то это состояние ультраслабо непрерывно и продол-

жается единственным образом до некоторого состояния $\omega_1 \times \omega_2$ на R_{12} , которое по построению является факторизуемым и удовлетворяет равенству в условии 3. Поэтому достаточно показать, что при сделанных допущениях состояние $\omega_1 \times \omega_2$ будет нормальным.

Обозначая $\varphi_i = \omega|_{R_i}$, $i = 1, 2$ (очевидно, что $\varphi_i \in R_{i*}$), рассмотрим множества функционалов

$$V_1 = L \{ \varphi_1(a_1 \cdot a_2), a_1, a_2 \in R_1 \} \subset R_{1*},$$

$$V_2 = L \{ \varphi_2(b_1 \cdot b_2), b_1, b_2 \in R_2 \} \subset R_{2*}.$$

По построению V_i есть линеал в R_{i*} , $i = 1, 2$, инвариантный относительно действия $R_i \subset R_i^{**}$ на R_i^* [[T2, с. 123]]; если R_i — фактор, то всякий такой линеал плотен в R_{i*} по его банаховой норме [[T2, теорема III.2.7]]. Но, как легко проверить, для любых $\chi_i \in V_i$, $i = 1, 2$, состояние $\chi_1 \times \chi_2$ на R_{12} является нормальным. Действительно, с учетом (3.35) и $\varphi_1 \times \varphi_2 = \varphi \in R_{12*}$ имеем

$$\chi_1 \times \chi_2 = \varphi_1(a_1 \cdot a_2) \times \varphi_2(b_1 \cdot b_2) = \varphi(a_1 b_1 \cdot a_2 b_2) \in R_{12*}.$$

Поэтому плотность V_1 в R_{1*} и V_2 в R_{2*} дает искомое: состояние $\omega_1 \times \omega_2$ будет нормальным при любых $\omega_1 \in R_{1*}$ и $\omega_2 \in R_{2*}$.

Осталось доказать импликацию $3 \rightarrow 2$, предполагая, что R_{12} — фактор (в этом случае коммутативность R_1 и R_2 сразу дает, что и R_1, R_2 — также факторы). Определим отображение $\psi: R_1 \odot R_2 \rightarrow R_1 \vee R_2$ естественным образом:

$$\psi\left(\sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i\right) = \sum_{i=1}^n A_i B_i \quad \forall A_i \in R_1, B_i \in R_2, i = 1, \dots, n, n = 1, 2, \dots$$

Поскольку пара коммутирующих факторов R_1 и R_2 обладает свойством Шлидера (лемма 3.33), то в силу теоремы 3.25 отображение ψ есть алгебраический изоморфизм. Докажем, что ψ изометрично. Обозначая $R_{1*} \times R_{2*}$ множество рассмотренных выше функционалов $\omega_1 \times \omega_2$ и учитывая, что это множество инвариантно относительно алгебры A_{12} , ультраслабо плотной в R_{12} , из теоремы III.2.7 [[T2]] получаем, что если R_{12} — фактор, то $R_{1*} \times R_{2*}$ плотно в R_{12*} . С учетом этого имеет место следующая цепочка равенств (где $\mathfrak{A}_{12} = \overline{A_{12}}^u$, $\text{Rep } \mathfrak{A}_{12}$ — множество всех представлений $\mathfrak{A}_{12}$ и P, Q — аргументы соответственно числителя и знаменателя в четвертом члене цепочки):

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n A_i B_i \right\| = \sup \left\{ \left\| \pi \left(\sum_{i=1}^n A_i B_i \right) \right\|, \pi \in \text{Rep } \mathfrak{A}_{12} \right\} = \\ & = \sup \left\{ \left\| \pi_\omega \left(\sum_{i=1}^n A_i B_i \right) \right\|, \omega \in \mathfrak{A}_{12}^* \right\} = \\ & = \sup \left\{ \frac{\omega \left[\left(\sum_{j=1}^m a_j^* b_j^* \right) \left(\sum_{i=1}^n A_i^* B_i^* \right) \left(\sum_{i=1}^n A_i B_i \right) \left(\sum_{j=1}^m a_j b_j \right) \right]^{1/2}}{\omega \left[\left(\sum_{j=1}^m a_j^* b_j^* \right) \left(\sum_{j=1}^m a_j b_j \right) \right]^{1/2}}, \omega \in \mathfrak{A}_{12}^* \right\} = \\ & \in \mathfrak{A}_{12}^*, a_j \in R_1, b_j \in R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup \left\{ \frac{\omega(\Pi)^{1/2}}{\omega(Q)^{1/2}}, \omega \in R_{12}^{*+} \right\} = \sup \left\{ \frac{(\omega_1 \times \omega_2)(\Pi)^{1/2}}{(\omega_1 \times \omega_2)(Q)^{1/2}}, \omega_1 \in R_1^{*+}, \omega_2 \in R_2^{*+} \right\} = \\
&= \sup \left\{ \frac{((\omega_1 \otimes \omega_2) [(\sum_{j=1}^m a_j \otimes b_j)^* (\sum_{i=1}^n A_i^* \otimes B_i^*)^* (\sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i) (\sum_{j=1}^m a_j \otimes b_j)]^{1/2}}{(\omega_1 \otimes \omega_2) [(\sum_{j=1}^m a_j \otimes b_j)^* (\sum_{j=1}^m a_j \otimes b_j)]^{1/2}}, \omega_1 \in \right. \\
&\left. \in R_1^*, \omega_2 \in R_2^* \right\} = \left\| \sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \right\|,
\end{aligned}$$

где мы использовали явный вид α -нормы на тензорном произведении C^* -алгебр (см., например, [Т2, теорема IV. 4.9]).

В силу своей изометричности отображение ψ продолжается до изометрического изоморфизма C^* -алгебр $\bar{\psi}: R_1 \otimes_\alpha R_2 \rightarrow \mathfrak{A}_{12}$; однако, чтобы доказать изоморфность и слабых замыканий, придется переходить в сопряженное пространство. Дуальное отображение

$${}^t\bar{\psi}: \mathfrak{A}_{12}^* \rightarrow (R_1 \otimes_\alpha R_2)^*$$

также является изометрическим. Мы покажем, что этим отображением порождается изометрическое отображение

$$\rho: R_{12*} \rightarrow (R_1 \bar{\otimes} R_2)_*.$$

Чтобы убедиться в существовании ρ , достаточно указать два множества функционалов V и $V_\otimes$ такие, что: 1) V плотно в R_{12*} , а $V_\otimes$ плотно в $(R_1 \bar{\otimes} R_2)_*$; 2) сужения функционалов из V на $\mathfrak{A}_{12}$ и функционалов из $V_\otimes$ на $R_1 \otimes_\alpha R_2$ переводятся друг в друга отображением ${}^t\bar{\psi}$:

$${}^t\bar{\psi}[V|_{\mathfrak{A}_{12}}] = V_\otimes|_{R_1 \otimes_\alpha R_2} \quad (3.36)$$

(в самом деле, тогда (3.36) естественным образом определяет отображение $\tilde{\rho}: V \rightarrow V_\otimes$, которое по непрерывности продолжается до искомого ρ). Как легко видеть, в качестве таких множеств могут служить

$$V = R_{1*} \times R_{2*},$$

$$V_\otimes = R_{1*} \odot R_{2*}.$$

Действительно, плотность V в R_{12*} уже отмечалась выше; плотность $V_\otimes$ (алгебраического тензорного произведения преддуалов R_1 и R_2) в $(R_1 \bar{\otimes} R_2)_*$ очевидна из определения [[Т2, с. 221]]: $(R_1 \bar{\otimes} R_2)_* = R_{1*} \bar{\otimes} R_{2*}$. Свойство (3.36) проверяется явно: для всех $\varphi_i \in R_{i*}$, $i = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned}
({}^t\bar{\psi}[\varphi_1 \times \varphi_2]) \left(\sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \right) &= (\varphi_1 \times \varphi_2) [\bar{\psi} \left(\sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \right)] = \\
&= (\varphi_1 \times \varphi_2) \left(\sum_{i=1}^n A_i B_i \right) = (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \left(\sum_{i=1}^n A_i \otimes B_i \right),
\end{aligned}$$

и существование ρ доказано. Изометричность ρ нетрудно проверить на множестве V : она вытекает из того, что нормы функционалов из V и $V_\otimes$ совпадают с нормами их сужений на соответствующие C^* -алгебры: действи-

тельно, с учетом теоремы плотности Капланского, для всех $\varphi \in V$

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(A)|, A \in R_{12}, \|A\| = 1\} = \sup\{|\varphi(A)|, A \in \mathfrak{A}_{12}, \|A\| = 1\} = \|\varphi|_{\mathfrak{A}_{12}}\|,$$

и аналогично для $\varphi \in V_{\otimes}$. Благодаря плотности V в R_{12*} , отсюда следует изометричность ρ .

Таким образом, для ρ существует дуальное отображение

$${}^t\rho: R_1 \overline{\otimes} R_2 \rightarrow R_{12},$$

являющееся изометрическим изоморфизмом и по своей связи с $\bar{\psi}$ наследующее свойство (3.34). Обратное отображение $({}^t\rho)^{-1}: R_{12} \rightarrow R_1 \overline{\otimes} R_2$ есть требуемый условием 2 естественный изоморфизм, и предложение доказано. $\square$

Как очевидно, свойство 3 в этом предложении есть прямое усиление свойства причинной независимости $(CI)_N$, так что имеет место тривиальное следствие:

каждое из структурных свойств 1–3 в предложении 3.27 является достаточным условием выполнения $(CI)_N$; если же локальные алгебры $R(O_1)$ и $R(O_2)$, $O_1 \times O_2$, суть факторы, то таким достаточным условием является и свойство 4.

Однако этим следствием отнюдь не исчерпываются все выводы, которые можно сделать, рассматривая свойства 1–4 в рамках теории Хаага–Араки. За счет конкретных особенностей локальной квантовой теории в ней возникают новые соотношения между этими свойствами, так что в итоге все они оказываются эквивалентными между собой (хотя по-прежнему лишь достаточными для $(CI)_N$). В частности, таким образом мы получим необходимые и достаточные условия, при которых в теории Хаага–Араки выполняется свойство F (если сейчас мы получили, что оно служит достаточным условием причинной независимости, то, согласно предложению 3.22, оно также служит основным дополнительным условием, обеспечивающим выполнение дуальности).

Прежде чем перейти к получению этих результатов, заметим, что существование нормального факторизуемого состояния $\omega^{(p)}$ для локальных алгебр $R(O_1)$ и $R(O_2)$ ($O_1 \times O_2$) при малоограничительном условии $(O_1 \cup O_2)' \neq \emptyset$ (исключая, однако, пары областей $O_1 = D$, $O_2 = D'$, D – двойной конус) и при наличии тотализатора для $\mathcal{Z}'$, эквивалентно существованию векторного факторизуемого состояния $\omega_{\Phi}^{(p)}$. Действительно, $\omega^{(p)}$ имеет своим сужением нормальное состояние на алгебре $R(O_1 \cup O_2)$, которое ввиду $R(O_1 \cup O_2) \supset \overline{R(O_1) \vee R(O_2)}^w$ также является факторизуемым состоянием для $R(O_1)$ и $R(O_2)$. Но, кроме того, это состояние является также и векторным, поскольку при $(O_1 \cup O_2)' \neq \emptyset$ и существовании тотализатора для $\mathcal{Z}'$, W^* -алгебра $R(O_1 \cup O_2)$ обладает сепаратором (предложение 3.4), а на таких алгебрах все нормальные состояния векторны [[D, с. 222]]. Продолжение указанного векторного состояния с $R(O_1 \cup O_2)$ на R дает векторное состояние $\omega_{\Phi}^{(p)}$, являющееся факторизуемым состоянием для $R(O_1)$ и $R(O_2)$. По тем же причинам, при том же допущении наличия тотализатора для $\mathcal{Z}'$ и $(O_1 \cup O_2)' \neq \emptyset$, условие $(CI)_N$, т.е. причинная независимость в классе нормальных со-

стояний, оказывается эквивалентным причинной независимости в классе векторных состояний, т.е. условию

$$(CI)_V \quad \forall_{O_1 \times O_2} \quad \forall_{\Phi_1, \Phi_2 \in S_1} \quad \exists_{\Phi \in S_1} \quad \omega_\Phi|_{R(O_i)} = \omega_{\Phi_i}^{(O_i)}, \quad i = 1, 2,$$

где $\omega_\Phi^{(O)}$ обозначает векторное состояние на алгебре $R(O)$. Действительно, при указанном допущении все нормальные состояния на всех $R(O)$, $O' \neq \emptyset$, векторны, что дает $(CI)_V \Rightarrow (CI)_N$. Обратно, при выполнении $(CI)_N$ для любой пары векторных состояний $\omega_{\Phi_i}^{(O_i)}$, $i = 1, 2$, существует общее расширение $\omega \in N[R]$; его сужение на $R(O_1 \cup O_2)$ есть векторное состояние $\omega_\Phi^{(O_1 \cup O_2)}$, расширение которого до векторного состояния ω_Φ на R есть также общее расширение "локальных состояний" $\omega_{\Phi_1}^{(O_1)}$ и $\omega_{\Phi_2}^{(O_2)}$. В итоге

$$(CI)_N \iff (CI)_V.$$

Обратимся теперь к установлению упомянутых связей между структурными свойствами из предложения 3.27, а также условием $(CI)_N$ в случае сети локальных алгебр. Такие связи обнаруживаются достаточно просто с помощью следующей (уже не столь простой) леммы Бухгольца.

Л е м м а 3.29 [Bu 1]. Пусть задана теория Хаага-Араки, удовлетворяющая аксиомам I–III, V, VI и такая, что $R = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Пусть области O_1 и O_2 таковы, что $O_1 \times O_2$ и, кроме того, существует окрестность $\mathcal{N}$ нуля в M , для которой $(O_1 + \mathcal{N}) \times (O_2 + \mathcal{N})$ (подобное отношение будем обозначать $O_1 \bowtie O_2$). Тогда существование нормального факторизуемого состояния ω для алгебр $R(O_1 + \mathcal{N})$, $R(O_2 + \mathcal{N})$ влечет существование векторного факторизуемого состояния ω_χ для алгебр $R(O_1)$, $R(O_2)$ такого, что вектор χ бициклический для $\overline{R(O_1) \vee R(O_2)}^w$ и, кроме того,

$$\omega_\chi|_{R(O_i)} = \omega_\xi|_{R(O_i)}, \quad i = 1, 2, \quad (3.37)$$

где ξ – любой наперед заданный вектор из множества общих бициклических векторов всех локальных алгебр¹⁾.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначая $O_i + \mathcal{N} \equiv \hat{O}_i$, $i = 1, 2$, замечаем, что, уменьшая окрестность $\mathcal{N}$, можно всегда достичь $(\hat{O}_1 \cup \hat{O}_2)' \neq \emptyset$, так что без ограничения общности можно считать, что $R(\hat{O}_1 \cup \hat{O}_2)$ обладает сепаратором, и состояние ω является векторным: $\omega = \omega_\Psi$. Обозначая далее, $P_i = P_\Psi^R(\hat{O}_i)$, $i = 1, 2$, и используя свойство факторизуемости

$$(\Psi, AB\Psi) = (\Psi, A\Psi)(\Psi, B\Psi) \quad \forall A \in R(\hat{O}_1), B \in R(\hat{O}_2),$$

получаем соотношения

$$\begin{aligned} P_1 B P_1 &= \omega_\Psi(B) P_1 \quad \forall B \in R(\hat{O}_2), \\ P_2 A P_2 &= \omega_\Psi(A) P_2 \quad \forall A \in R(\hat{O}_1). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Отсюда нетрудно вывести, что $\omega_{P_1 \xi / \|P_1 \xi\|}$ есть также факторизуемое состояние для $R(\hat{O}_1)$ и $R(\hat{O}_2)$. Действительно, при $A \in R(\hat{O}_1)$, $B \in R(\hat{O}_2)$ из (3.38) имеем

$$(P_1 \xi, ABP_1 \xi) = (P_1 \xi, AP_1 \xi)(\Psi, B\Psi),$$

¹⁾ В частности, если существуют вакуумные векторы, то для любого такого вектора Ω_j найдется ω_χ , удовлетворяющий (3.37) с $\xi = \Omega_j$.

а взяв здесь $A = I$, получаем $\omega_{\Psi}(B) = \omega_{P_1 \xi / \|P_1 \xi\|}(B)$. Далее, состояние $\omega_{P_1 \xi / \|P_1 \xi\|}^{(O_1)}$ является точным, ибо для любого $A \in R(O_1)$ условие

$$\omega_{P_1 \xi / \|P_1 \xi\|}^{(O_1)}(A^*A) = \|AP_1 \xi\|^2 = 0$$

ввиду цикличности ξ для всех локальных алгебр влечет $AP_1 = 0$; поскольку же при сделанных допущениях в теории выполнено свойство Шлидера (см. предложение 3.34), то отсюда и $A = 0$. Точное нормальное состояние может быть представлено циклическим вектором $[[S, \text{с. 104}]]$, так что существуют вектор $\Phi \in S_1$ такой, что

$$\mathcal{H}_{\Phi}^{R(O_1)} = \mathcal{H}, \quad \omega_{\Phi}^{(O_1)} = \omega_{P_1 \xi / \|P_1 \xi\|}^{(O_1)}.$$

Равенство функционалов здесь означает, что вектор $P_1 \xi / \|P_1 \xi\|$ лежит в прообразе локального состояния $\omega_{\Phi}^{(O_1)}$; тем самым, согласно [CX3], найдется частично изометрический оператор $U_1 \in R(O_1)'$ такой, что

$$U_1^* U_1 = P_{\Phi}^{R(O_1)} = I, \quad U_1 U_1^* = P_{P_1 \xi / \|P_1 \xi\|}^{R(O_1)} = P_1,$$

если учесть, что $R(O_1) \subset R(\hat{O}_1)$. Подставляя вторую из этих формул в (3.38), с учетом первой получим

$$U_1^* B U_1 = \omega_{\Psi}(B) I, \quad B \in R(\hat{O}_2).$$

Отсюда для $A \in R(O_1)$, $B \in R(\hat{O}_2)$ имеем

$$(U_1 \xi, AB U_1 \xi) = (\xi, A \xi) (\Psi, B \Psi), \quad (\xi, A \xi) = (U_1 \xi, A U_1 \xi), \\ (\Psi, B \Psi) = (U_1 \xi, B U_1 \xi),$$

т.е. $\omega_{U_1 \xi}$ есть факторизуемое состояние для алгебр $R(O_1)$ и $R(\hat{O}_2)$, причем

$$\omega_{U_1 \xi}^{(O_1)} = \omega_{\xi}^{(O_1)}.$$

В итоге, исходя из факторизуемого состояния ω_{Ψ} для $R(\hat{O}_1)$, $R(\hat{O}_2)$, мы построили факторизуемое состояние $\omega_{U_1 \xi}$ для $R(O_1)$, $R(\hat{O}_2)$, совпадающее с ω_{ξ} на $R(O_1)$. Теперь, исходя из $\omega_{U_1 \xi}$, мы можем идентично построить факторизуемое состояние ω_{Φ} для $R(O_1)$ и $R(O_2)$, совпадающее с ω_{ξ} на $R(O_1)$ и $R(O_2)$.

Осталось построить состояние ω_{χ} , для которого вдобавок ко всем свойствам ω_{Φ} вектор χ бициклический для $\overline{R(O_1) \vee R(O_2)}^w$. Для этой цели рассмотрим области, получаемые из O_i малыми сдвигами по оси x^0 :

$$O_{i,\epsilon} = \bigcup_{|t| < \epsilon} (O_i + t), \quad i = 1, 2.$$

При достаточно малом ϵ они связаны с $\hat{O}_i$ точно так же, как сами O_i , и потому, согласно вышедшему, существует нормальное факторизуемое состояние ω для алгебр $R(O_{1,\epsilon})$ и $R(O_{2,\epsilon})$ такое, что

$$\omega|_{R(O_{i,\epsilon})} = \omega_{\xi}^{(O_{i,\epsilon})}, \quad i = 1, 2.$$

Выбрав положительную функцию h на $\mathbb{R}$ такую, что $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} h(t) dt = 1$, определим на R состояние

$$\omega_h(A) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dt h(t) \omega(T(t) A T(t)^{-1}).$$

Очевидно, что ω_h есть нормальное факторизуемое состояние для $R(O_1)$ и $R(O_2)$, совпадающее на этих алгебрах с ω_{ξ} . Покажем, что ω_h точно, как состояние на $\overline{R(O_1) \vee R(O_2)}^w$. Пусть $\omega_h(Q^*Q) = 0$ для некоторого $Q \in \overline{R(O_1) \vee R(O_2)}^w$, тогда из определения ω_h

$$\omega(T(t) Q^* Q T(t)^{-1}) = 0, \quad |t| < \epsilon.$$

Всегда найдется векторное состояние $\omega_\eta < \omega$; для него

$$Q T(t)^{-1} \eta = Q(t) \eta = 0, \quad |t| < \epsilon. \quad (3.39)$$

Имеет, однако, место следующий результат, который мы приведем без доказательства.

Т е о р е м а Ш л и д е р а [Sc 3]. Пусть в теории Хаага–Араки выполнены аксиомы I–III, V, VI и $R = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Тогда для любого локального оператора $Q \in R(O)$, $O' \neq \emptyset$, и любого вектора $\eta \in \mathcal{H}$ множество точек t на оси времени, для которых $Q(t)\eta \neq 0$, плотно на указанной оси.

В силу этой теоремы в (3.39) $Q = 0$, и состояние ω_h точно на алгебре $\overline{R(O_1) \vee R(O_2)}^w$. Тем самым для этой алгебры существует бициклический вектор χ такой, что ω_χ совпадает на ней с ω_h и потому обладает всеми требуемыми свойствами. $\square$

Пользуясь леммой 3.29, уже несложно получить

П р е д л о ж е н и е 3.30. Пусть задана теория Хаага–Араки, удовлетворяющая аксиомам I — III, V, VI и такая, что $R = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Тогда для любой пары областей O_1, O_2 с $O_1 \nparallel O_2$ следующие свойства локальных алгебр эквивалентны:

1) $R(O_1)$ и $R(O_2)$ обладают свойством F , т.е. существуют факторы M_1 и M_2 типа I такие, что

$$R(O_1) \subset M_1 \subset M_2' \subset R(O_2)'$$

(что равносильно формулировке свойства F , данной выше);

2) существует нормальный и естественный изоморфизм алгебр фон Неймана

$$\Phi: \overline{R(O_1) \vee R(O_2)}^w \rightarrow R(O_1) \overline{\otimes} R(O_2);$$

3) для любой пары нормальных состояний ω_i на $R(O_i)$, $i = 1, 2$, существует нормальное состояние ω на алгебре R такое, что

$$\omega(AB) = \omega_1(A)\omega_2(B), \quad A \in R(O_1), \quad B \in R(O_2);$$

4) существует нормальное состояние на алгебре R , факторизуемое для подалгебр $R(O_1)$ и $R(O_2)$; и влекут свойство

5) $R(O_1)$ и $R(O_2)$ причинно независимы в смысле $(CI)_N$ или, равносильно, $(CI)_V$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 3.27 для эквивалентности 1–4 нам достаточно вывести $4 \rightarrow 1$. Свойство F для $R(O_1)$ и $R(O_2)$ мы установим путем явного построения дискретных факторов M_1 и M_2 . Именно, покажем, что если ω_χ — специальное факторизуемое состояние, построенное в лемме 3.29, и $P_i = P_\chi^{R(O_i)}$, $i = 1, 2$, то можно выбрать

$$M_1 = \{R(O_1), P_2\}'', \quad M_2 = \{R(O_2), P_1\}''.$$

(Условие $O_1 \nparallel O_2$ нам требуется только в этом пункте для применимости леммы 3.29.)

Аналогично выводу (3.38) для ω_χ получаем

$$P_1 B P_1 = \omega_\chi(B) P_1 \quad \forall B \in R(O_2),$$

$$P_2 A P_2 = \omega_\chi(A) P_2 \quad \forall A \in R(O_1),$$

и эти равенства легко распространяются на все $B \in M_2$ и $A \in M_1$ соответ-

ственно. Отсюда следует, что P_1 — абелев проектор в M_2 , P_2 — абелев проектор в M_1 .

Покажем теперь, что M_1, M_2 — факторы; тогда из наличия в них абелевых проекторов будет следовать, что это — факторы типа I [[D, с.123]]. Пусть проектор $E \in M_1 \cap M'_1$, тогда из равенств $\omega_\chi(E)P_2 = P_2EP_2 = EP_2$, поскольку EP_2 — проектор, имеем $\omega_\chi(E) = \|E\chi\|^2 = 0$ или I. В первом случае $E\chi = 0$ влечет $E = 0$, так как $E \in R(O_1)' \cap R(O_2)'$, а χ — сепаратор для этой алгебры. Во втором случае имеем $(\chi, (I - E)\chi) = 0$, что по той же причине влечет $E = I$. Таким образом, центр M_1 содержит только тривиальные проекторы, и M_1 — фактор. Для M_2 доказательство факторности идентично.

Поскольку включения $R(O_1) \subset M_1$ и $R(O_2)' \supset M'_2$ очевидны, осталось лишь доказать, что $M_1 \subset M'_2$, для чего достаточно, чтобы $P_1P_2 = P_2P_1$. Для любых $A \in R(O_1), B \in R(O_2)$ имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} P_1P_2AB\chi &= P_1P_2AP_2B\chi = (\chi, A\chi)P_1BP_1\chi = (\chi, A\chi)(\chi, B\chi)\chi = \\ &= P_2P_1BP_1A\chi = P_2P_1AB\chi, \end{aligned}$$

что в силу цикличности χ для $\overline{R(O_1) \vee R(O_2)}^w$ дает искомое. С учетом очевидного $3 \rightarrow 5$ предложение доказано. $\square$

З а м е ч а н и е. Известны примеры областей $O_1 \times O_2$, для которых факторизуемое состояние существует, но заведомо не может являться нормальным. В частности, такой пример составляют пары O_1, O_2 взаимно пространственноподобных светоподобно монотонных областей (см. определение 3.1), обладающие свойством $O_1 + a \subset O_1, O_2 + a \subset O_2$ для некоторой трансляции $a \in M$ (одной из таких пар служат клинья (W_R, W_L)). Согласно предложениям 3.7 и 3.34 локальные алгебры таких областей — факторы, а для пар областей выполняется свойство Шлидера (S), а значит, и все условия теоремы 3.25. В то же время, используя вышеуказанную инвариантность областей O_1, O_2 , дающую $R(O_i + na) \subset R(O_i)$, $i = 1, 2$, и формулу $\lim_{n \rightarrow \infty} A(na) = \omega_\Omega(A)I$, можно просто показать [Bu1], что

при наличии нормального факторизуемого состояния ω для областей O_1, O_2 вакуумное состояние ω_Ω также должно быть факторизуемым состоянием для этих областей; а именно, для любых $A \in R(O_1), B \in R(O_2)$ будет иметь место $\omega_\Omega(AB) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(A(na)B(na)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(A(na))\omega(B(na)) = \omega_\Omega(A)\omega_\Omega(B)$. Но в силу цикличности

вакуума для $R(O_1)$ и $R(O_2)$ ω_Ω не может быть факторизуемым состоянием для этих алгебр, и потому нормального факторизуемого состояния для $R(O_1)$ и $R(O_2)$ не существует.

Далее, нам следует рассмотреть связи условия $(CI)_N$ со свойством Шлидера, а также с аксиомами Хаага—Араки. Различными способами можно элементарно убедиться, что $(CI)_N$ влечет за собой свойство Шлидера. Мы покажем это, дав переформулировку и того и другого свойства — а наряду с ними, также и свойства строгой локальности — в терминах прообразов $\mathfrak{M}_\Phi(O) \equiv \mathfrak{M}_\Phi^{R(O)}$ состояний $\omega_\Phi^{(O)}$. Такая переформулировка удобна, в частности, тем, что она сразу показывает наличие определенной упорядоченности между тремя названными свойствами.

Предложение 3.31 [CX5]. В произвольной теории Хаага–Араки причинная независимость $(CI)_V$, строгая локальность (SL) и свойство Шлидера (S) могут быть сформулированы соответственно следующим образом: для всех O_1, O_2 с $O_1 \times O_2$ и всех $\Phi_1, \Phi_2 \subset S_1$

$$(CI)_V \quad \mathfrak{M}_{\Phi_1}(O_1) \cap \mathfrak{M}_{\Phi_2}(O_2) \neq \phi; \quad (3.40)$$

$$(SL) \quad \mathcal{H}_{\Phi_1}^{R(O_1)'} \cap \mathfrak{M}_{\Phi_2}(O_2) \neq \phi; \quad (3.41)$$

$$(S) \quad \mathcal{H}_{\Phi_1}^{R(O_1)'} \cap \mathcal{H}_{\Phi_2}^{R(O_2)'} \neq \phi. \quad (3.42)$$

Условие $(CI)_V$, кроме того, может быть представлено в виде $\Phi_1 = T_1^* T_2 \Phi_2$,

где

$$T_i \in R(O_i)', \quad T_i^* T_i = P_{\Phi_i}^{R(O_i)}, \quad T_i T_i^* = P_{T_i \Phi_i}^{R(O_i)}, \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. Для вывода (3.40) перепишем обычную формулировку условия $(CI)_V$ в терминах прообразов:

$$\forall_{O_1 \times O_2} \quad \forall_{\Phi_1, \Phi_2 \in S_1} \quad \exists_{\Phi \in S_1} \quad \mathfrak{M}_{\Phi}^R \cap \mathfrak{M}_{\Phi_i}(O_i) \neq \phi, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда, существует $\chi \in \mathfrak{M}_{\Phi}^R \cap \mathfrak{M}_{\Phi_1}(O_1)$, и для этого вектора, по определению прообраза и с учетом $R(O_1) \subset R$,

$$\mathfrak{M}_{\chi}^R = \mathfrak{M}_{\Phi}^R, \quad \mathfrak{M}_{\chi}(O_1) = \mathfrak{M}_{\Phi_1}(O_1), \quad \mathfrak{M}_{\chi}^R \subset \mathfrak{M}_{\chi}(O_1).$$

Из этих формул имеем

$$\mathfrak{M}_{\Phi}^R \cap \mathfrak{M}_{\Phi_1}(O_1) \neq \phi \iff \mathfrak{M}_{\Phi}^R \subset \mathfrak{M}_{\Phi_1}(O_1).$$

Очевидно, что аналогичное соотношение справедливо и для Φ_2, O_2 ; в результате $(CI)_V$ эквивалентно условию

$$\exists_{\Phi \in S_1} \quad \mathfrak{M}_{\Phi}^R \subset \mathfrak{M}_{\Phi_1}(O_1) \cap \mathfrak{M}_{\Phi_2}(O_2),$$

а это в свою очередь эквивалентно (3.40). Другой вид записи получается из (3.40) применением теоремы об общем виде прообраза [CX3]: для произвольных вектора $\eta \in S_1$ и алгебры фон Неймана M

$$\mathfrak{M}_{\eta}^M = \{ \xi \in S_1 \mid \xi = T \eta, T \in M', T^* T = P_{\eta}^M, T T^* = P_{T \eta}^M \}. \quad (3.43)$$

Для вывода (3.41) заметим, что определение строгой локальности, данное в § 2, означает нетривиальность пересечения $\mathfrak{M}_{\Phi_2}(O_2)$ с любым инвариантным подпространством алгебры $R(O_1)'$; в свою очередь (3.41) означает нетривиальность пересечения $\mathfrak{M}_{\Phi_2}(O_2)$ с любым циклическим подпространством $R(O_1)'$. Ясно, что первое свойство влечет второе; однако верно и обратное, поскольку внутри любого инвариантного подпространства алгебры фон Неймана найдется циклическое подпространство [[D, с. 6]].

Чтобы получить (3.42), покажем сначала, что исходная формулировка (S) равносильна формулировке в терминах проекторов:

$$\forall_{O_1 \times O_2} \quad \forall_{\substack{E_1, E_2 \neq 0 \\ E_1 \in R(O_1)^P, E_2 \in R(O_2)^P}} \quad E_1 E_2 \neq 0 \quad (3.44)$$

(символ M^P обозначает множество всех проекторов $*$ -алгебры M). Действительно, пусть имеются ненулевые $A_i \in R(O_i)$, $i = 1, 2$, $A_1 A_2 = 0$. Тогда ни A_1 , ни A_2 не могут быть унитарны и, следовательно, из каждой пары операторов $(A_1^* A_1; A_1 A_1^*)$, $(A_2^* A_2; A_2 A_2^*)$ хотя бы один не равен I . Допустим, например, что $A_1^* A_1, A_2 A_2^* \neq I$. Тогда у них имеются нетривиальные спектральные проекторы $E_1 \in R(O_1)$, $E_2 \in R(O_2)$ и $A_1^* A_1 A_2 A_2^* = 0$ влечет $E_1 E_2 = 0$, и формулировка (3.44) доказана. Она означает нетривиальность пересечения любых двух инвариантных подпространств $R(O_1)'$ и $R(O_2)'$ соответственно, и переход от нее к (3.42) аналогичен выводу (3.41). $\square$

Следствие 1. Пусть $O_1, O_2 \subset M$ таковы, что их можно вложить во взаимно пространственноподобные области $\hat{O}_1, \hat{O}_2$: $O_i \subset \hat{O}_i$, $i = 1, 2$, $\hat{O}_1 \times \hat{O}_2$. Тогда выполнение любого из свойств $(CI)_V$, (SL) , (S) для областей $\hat{O}_1, \hat{O}_2$ влечет за собой выполнение данного свойства для областей O_1, O_2 .

Следствие 2. В произвольной теории Хаага–Араки между причинной независимостью, строгой локальностью и свойством Шлидера имеют место соотношения

$$(CI)_V \Rightarrow (SL) \Rightarrow (S). \quad (3.45)$$

Эти импликации очевидны, поскольку в силу (3.43) $\mathfrak{M}_\Phi(O) \subset \mathcal{H}_\Phi^{R(O)'}.$

Как мы вскоре увидим, эта цепочка импликаций может быть продолжена: свойство Шлидера S тривиально влечет за собой расширенную локальность. Что же касается связей условий $(CI)_V$ (или, что то же, $(CI)_N$) и других причинных свойств с системой аксиом Хаага–Араки, то вывести из данной системы удалось лишь свойство Шлидера и расширенную локальность — наиболее слабые требования с учетом (3.45); строгую локальность удастся вывести только в случае, когда области O_1 и O_2 ($O_1 \times O_2$) ограничены и удовлетворяют еще некоторым условиям (см. следствие из предложения 3.32). Условия же $(CI)_V$ и $(CI)_N$ не удалось получить ни прямо из аксиом, ни из свойства S (в противоположность импликации $(S) \Rightarrow (CI)$, которая доказана в теореме 3.25). Равным образом отсутствуют и контрпримеры, которые показывали бы, что $(CI)_V$ и $(CI)_N$ не зависят от аксиом Хаага–Араки и могут нарушаться при выполнении всей их системы. В итоге, подобно условию (CI) , связь $(CI)_V$ и $(CI)_N$ с аксиомами локальной квантовой теории пока остается невыясненной до конца. Особо изучался вопрос о соотношении причинной независимости с отдельно взятой аксиомой локальности, т.е. коммутативностью алгебр $R(O_1)$ и $R(O_2)$. Полученный здесь вывод заключается в том, что ни одно из этих свойств не является следствием другого. Из одной лишь коммутативности C^* - или W^* -алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не вытекает их причинная независимость: это ясно, например, из того, что из причинной независимости вытекает расширенная локальность (тривиальность пересечения $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$), нарушение которой заведомо совместимо с коммутативностью. Обратно, из причинной независимости $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не вытекает их коммутативность: это было показано на ряде примеров [Na; DeF; DeFT]. И наконец, заключительное замечание о причинной независимости: как указали Экштейн и Авишай [AE1], в калибровочных теориях следует ожидать нарушения этого свойства. К такому выводу приводит следующее нестро-

гое рассуждение. Пусть O_1, O_2 — две половинки одной сферы в $\mathbb{R}^3$, Q_1, Q_2 — наблюдаемые, отвечающие потоку электромагнитного поля через O_1 и O_2 соответственно. Тогда при $O_1 \times O_2$ заведомо найдутся локальные состояния $\omega_1^{(O_1)}$ и $\omega_2^{(O_2)}$ такие, что $\omega_1^{(O_1)}(Q_1) + \omega_2^{(O_2)}(Q_2) \neq 0$. Для таких состояний не должно найтись глобальное состояние ω , служащее их общим продолжением, поскольку по теореме Гаусса поток электромагнитного поля через сферу $O_1 \cup O_2$ при отсутствии источников внутри нее должен быть равен 0, и тем самым для любого физического состояния должно иметь место $\omega(Q_1 + Q_2) = 0$.

Обратимся к условию строгой локальности (SL). По своему физическому содержанию оно родственно причинной независимости. Проекторы $P \in R(O_1)$ обозначают свойства, измеримые в области O_1 ; функционалы ω_χ , $\chi \in P\mathcal{H}$, — физические состояния, обладающие свойством P . Требование же строгой локальности заключается в том, чтобы состояние ω_Φ могло обладать свойством P , каковы бы ни были результаты измерений в данном состоянии в области O_2 , пространственноподобной к O_1 , т.е. каким бы ни было сужение ω_Φ на O_2 . (Легко сформулировать обобщение этого требования на класс нормальных состояний.) С математической точки зрения отличительную особенность (SL) составляет тесная связь с типом локальных алгебр и свойствами эквивалентности определенных классов проекторов в этих алгебрах. Такая связь обнаруживается наиболее отчетливо в случае пары областей вида D, D' , где D — двойной конус. Согласно следствию 1 из предложения 3.31, строгая локальность для пары ограниченных областей O_1, O_2 есть, вообще говоря, более слабое требование.

Предложение 3.32. Пусть в теории Хаага–Араки выполнены аксиомы I–III, V, VI, и алгебра $\mathcal{L}'$ обладает тотализатором. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $R(D)$ — фактор типа III;
- 2) $\forall_{P \in R(D)} P \sim I \bmod R(D)$;
- 3) $\forall_{P \in R(D)} \exists_{W \in R(D)} \forall_{\Phi \in S_1} W\Phi \in P\mathcal{H} \cap \mathfrak{M}_\Phi(D')$, где W — частично изометрический оператор.

Каждое из условий 1–3 влечет за собой свойства:

- 1') все проекторы из $R(D)$ бесконечны по отношению к алгебре $R(D')'$;
- 2') $\forall_{P \in R(D)} P \sim I \bmod R(D')'$;

- 3') строгая локальность для пары областей D, D' ,

между которыми справедливы отношения $2' \rightarrow 3' \rightarrow 1'$. Далее, если существует тотализатор для R , то справедливо отношение $3' \rightarrow 2'$, а если, кроме того, $R(D')$ — фактор, то все условия 1', 2', 3' эквивалентны.

Доказательство. Сначала установим эквивалентность условий 1–3. $1 \rightarrow 2$ следует из того, что $R(D)$ — σ -конечный фактор (ибо обладает сепаратором в силу предложения 3.4), так как в σ -конечном факторе все бесконечные проекторы эквивалентны между собой [[D, с. 320]].

$2 \rightarrow 3$. Согласно 2 для всех $P \in R(D)$, $P = WW^*$, $W^*W = I$, где $W \in R(D)$. Отсюда непосредственно видно, что для всех $\Phi \in S_1$ $W\Phi \in \mathfrak{M}_\Phi(D')$; с другой стороны, очевидно, что $W\Phi \in P\mathcal{H}$, и свойство 3 получено.

$3 \rightarrow 1$. Так как частично изометрический оператор W отличен от нулевого оператора лишь на подпространстве $W^*W\mathcal{H}$, то из $W\Phi \in \mathfrak{M}_\Phi(D') \subset S_1 \quad \forall \Phi \in S_1$ следует, что $W^*W = I$; с другой стороны, из $W\Phi \in P\mathcal{H}$ вытекает, что $WW^* = P' \leq P$. Это означает, что для любого $P \in R(D) \quad P > I \bmod R(D)$, откуда следуют условия 2 и 1.

Далее установим импликации $2' \rightarrow 3' \rightarrow 1'$; тогда благодаря очевидному $2 \rightarrow 2'$ будет также доказано, что любое из условий 1–3 влечет любое из $1'–3'$. $2' \rightarrow 3'$ выводится полностью аналогично доказательству $2 \rightarrow 3$.

$3' \rightarrow 1'$. Пусть $\Psi \in P\mathcal{H} \cap \mathfrak{M}_\Phi(D')$. По теореме об общем виде прообраза [CX3], $P_\Phi^{R(D')} \sim P_\Psi^{R(D')} \bmod R(D')'$; с другой стороны, $P_\Psi^{R(D')} \leq P_\Psi^{R(D)} \leq P$ (так как $\mathcal{H}_\Psi^{R(D)}$ – наименьшее инвариантное подпространство $R(D)$, содержащее Ψ). Мы получили

$$\forall_{\Phi \in \mathcal{H}} \quad P > P_\Phi^{R(D')} \bmod R(D')'. \quad (3.46)$$

Поскольку алгебра $R(D)'$ бесконечна, то в ней существуют и бесконечные циклические проекторы, поэтому из формулы (3.46) следует условие $1'$.

Если предположим теперь, что существует тотализатор для R , то существует и тотализатор χ для $R(D')$ (предложение 3.4), и из $3'$ получаем

$$\forall_{P \in R(D)} \quad P\mathcal{H} \cap \mathfrak{M}_\chi(D') \neq \emptyset.$$

Если же $\Psi \in P\mathcal{H} \cap \mathfrak{M}_\chi(D')$, то, согласно (3.43), $\Psi = W\chi$, $W \in R(D')'$, $W^*W = P_\chi^{R(D')} = I$, $WW^* = P_\Psi^{R(D')} \leq P$, откуда следует $2'$. Наконец, получим последнее утверждение предложения. Если существует тотализатор для $R(D')$, то алгебра $R(D)'$ σ -конечна [[D, с. 302]]; если, кроме того, $R(D)$ – фактор, то все бесконечные проекторы в $R(D)'$ эквивалентны, и потому справедлива импликация $1' \rightarrow 2'$. В итоге условия $1'–3'$ равносильны. $\square$

С л е д с т в и е. Пусть выполнены аксиомы I–III, V, VI и алгебра R – фактор, обладающий тотализатором. Пусть области O_1, O_2 ($O_1 \# O_2$) – двойные конусы или же допускают вложение во взаимно пространственно-подобные двойные конусы ($O_i \subset D_i, i = 1, 2, D_1 \# D_2$). Тогда имеет место строгая локальность для областей O_1, O_2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если D_1, D_2 – двойные конусы и $D_1 \# D_2$, то существует двойной конус D_3 такой, что $D_1 \ll D_3 \subset D_2'$. В силу предложения 3.11 все проекторы из $R(D_1)$ бесконечны в алгебре $R(D_3)$, а следовательно, и в алгебре $R(D_2)'$. Это означает, что в предложении 3.32, рассматриваемом для пары областей D_1, D_2 , выполнено условие 1; а так как $R(D_2)$ – фактор (предложение 3.6), то все условия $1'–3'$ эквивалентны, и имеет место строгая локальность для областей D_1, D_2 . Общий случай вытекает из следствия 1 предложения 3.31. $\square$

Другим следствием предложения 3.32 является предложение 3.13, приведенное нами выше при обсуждении типа локальной алгебры.

Согласно предложению 3.31 условие строгой локальности и свойство Шлидера представляются на первый взгляд весьма близкими: переход от (SL) к (S) заключается лишь в замене прообраза векторного состояния $\omega_{\Phi_2}^{(O_2)}$ его носителем $P_{\Phi_2}^{R(O)'}$ в формуле (3.41). Однако такая замена

оказывается существенным ослаблением налагаемого условия. Причина этого в том, что прообраз векторного состояния есть характеристика, определяющая состояние однозначно, тогда как носитель еще совсем не определяет состояния единственным образом. Ослабление же выражается в том, что если условие (SL), как мы видели, тесно связано с типом локальной алгебры, то свойство (S) связано только со свойствами факторности локальных алгебр, как показывает элементарная

Л е м м а 3.33. Пусть алгебры фон Неймана R_1 и R_2 коммутируют между собой и притом R_1 есть фактор. Тогда для этих алгебр имеет место свойство Шлидера, т.е.

$$A_i \in R_i, \quad A_i \neq 0, \quad i = 1, 2 \Rightarrow A_1 A_2 \neq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A_1 A_2 = 0$ и вектор $\Phi \in \mathcal{H}$ таков, что $A_1 \Phi \neq 0$. С учетом $\mathcal{L}_1 = \mathcal{C}(\mathcal{H})$ имеем

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A_1 \Phi}^{\mathcal{L}_1} = \mathcal{H}_{A_1 \mathfrak{M}}^{R_1}, \quad \text{где } \mathfrak{M} = \mathcal{H}_{\Phi}^{R_1}$$

С другой стороны, с учетом $A_2 \in R_2 \subset R_1'$ получаем

$$A_2 \mathcal{H} = A_2 \mathcal{H}_{A_1 \mathfrak{M}}^{R_1} = \mathcal{H}_{A_2 A_1 \mathfrak{M}}^{R_1} = 0,$$

что противоречит условию $A_2 \neq 0$. $\square$

Отсюда сразу получаем условия выполнения свойства Шлидера в теории Хаага–Араки.

П р е д л о ж е н и е 3.34. Пусть в теории Хаага–Араки выполнены аксиомы I, III. Тогда свойство Шлидера имеет место для любой пары областей O_1, O_2 таких, что $O_1 \times O_2$, и, кроме того, найдется область O_3 , для которой $O_1 \subset O_3 \subset O_2'$ и $R(O_3)$ есть фактор.

С л е д с т в и е. Пусть в теории Хаага–Араки выполнены аксиомы Ia, IIa, III, IV, и алгебра R – фактор. Тогда свойство Шлидера имеет место для любой пары областей O_1, O_2 таких, что $O_1 \times O_2$ и, кроме того, найдется двойной конус D , для которого $O_1 \subset D \subset O_2'$ либо $O_1 \subset D' \subset O_2'$.

Последнее утверждение сразу вытекает из предложений 3.34 и 3.6. Отметим, что свойство Шлидера устанавливается им, в частности, для пар областей D, D' , где D – двойной конус.

Другой способ вывода свойства (S) в рамках теории Хаага–Араки был предложен Шлидером [Sc3]. Он опирается на несколько иные допущения (а именно аксиомы I–III, V, VI, а также существование единственного и циклического вакуума) и справедлив для пар областей O_1, O_2 с $O_1 \nparallel O_2$. В данном способе (S) выводится довольно просто из следующего результата Борхерса, который мы приведем без доказательства (последнее идейно несложно, но содержит громоздкие операторные оценки).

Т е о р е м а Борхерса [B8]. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ действует непрерывное унитарное представление $U(t)$ однопараметрической группы с полуограниченным спектром (например, представление группы трансляций по времени в теории Хаага–Араки, удовлетворяющей аксиомам V, VI), и пусть P_1, P_2 – два проектора такие, что

$$P_1 P_2 = 0, \quad [U(t) P_1 U(t)^{-1}, P_2] = 0, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad \epsilon > 0.$$

Тогда для всех $t \in \mathbb{R}$

$$U(t) P_1 U(t)^{-1} P_2 = 0.$$

Покажем теперь, что свойство Шлидера влечет за собой расширенную локальность, т.е. имеет место уже упоминавшаяся импликация

$$(S) \Rightarrow (EL). \quad (3.47)$$

Вывод этого тривиален: если $R(O_1) \cap R(O_2) \neq \mathcal{E}(\mathcal{H})$, то найдется проектор $P \in R(O_1) \cap R(O_2)$, $P \neq 0, 1$, и тогда равенство $P(1 - P) = 0$ означает нарушение свойства Шлидера.

Вследствие (3.45) и (3.47) расширенная локальность является наиболее слабым требованием из всех рассмотренных нами причинных свойств. Она выполняется в любой теории Хаага—Араки, удовлетворяющей допущениям предложения 3.34 и следствия из него: это очевидно как из (3.47), так и непосредственно в силу $R(O_1) \cap R(O_2) \subset \mathcal{L}(O_3) \cap \mathcal{L}(O_2)$ для любой области O_3 такой, что $O_1 \subset O_3 \subset O_2'$. Физический смысл данного условия и основания для его введения вполне наглядны: если расширенная локальность нарушена, то измерениями в области O_1 возможно точно определить значения некоторых наблюдаемых в области O_2 , пространственноподобной к O_1 . Используя свойство лоренц-ковариантности, оказывается возможным получить нетривиальное усиление свойства расширенной локальности для пар двойных конусов D_1, D_2 : как показал Ландау, это свойство имеет место даже в случае, когда D_1 и D_2 не являются взаимно пространственноподобными.

Предложение 3.35 [L1]. Пусть в теории Хаага—Араки выполнены аксиомы I—III, V, VI, глобальная алгебра R есть фактор и области D_1, D_2 — двойные конусы такие, что для некоторой окрестности $\mathcal{N}$ нуля в M $(D_1 + \mathcal{N}) \cap D_2 = \emptyset$. Тогда для D_1, D_2 имеет место расширенная локальность:

$$R(D_1) \cap R(D_2) = \mathcal{E}(\mathcal{H}).$$

Доказательство приведем схематически. В силу аксиомы III и факторности R достаточным условием (EL) является

$$R(D_1')' \cap R(D_2')' = R'. \quad (3.48)$$

Когда D_1 и D_2 взаимно пространственноподобны, (3.48) выводится элементарно применением аксиом Ia, IIa (см. доказательство предложения 3.6). Но в рассматриваемом случае доказательство не так просто. В его основе лежит техника, основанная на теореме единственности для решений пятимерного волнового уравнения, развитая впервые в связи с представлением Йоста—Лемана—Дайсона [[B, § 32]], а в алгебраическом подходе применявшаяся Араки [A2] для доказательства теоремы о пространственноподобной оболочке (см. предложение 3.14 и его обсуждение). Пусть $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ — окрестности нуля в M такие, что $\tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2 = \emptyset$, $\tilde{D}_i = D_i + \mathcal{N}_i$, $i = 1, 2$, — двойные конусы; заведомо существует пространственноподобная гиперплоскость S_{12} , для которой $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ лежат по разные ее стороны. Рассмотрим функцию $f(x) = (\Phi, [A, B(x)] \Psi)$, где Φ, Ψ — аналитические векторы оператора энергии, $A \in R(D_1')' \cap R(D_2')$, $B \in R(D_\epsilon)$, D_ϵ — двойной конус с центром в нуле и такой, что $(D_\epsilon + x_i) \subset \tilde{D}_i$ для всех $x_i \in D_i$, $i = 1, 2$. Как легко видеть, $f(x) = 0$ при $x \in \tilde{D}_1' \cap \tilde{D}_2'$, и благодаря аксиоме слабой аддитивности для (3.48) достаточно доказать, что $f(x) \equiv 0$. Для этой цели совершается преобразование Лоренца, переводя-

щее гиперплоскость $S_{1,2}$ в гиперплоскость $S_0 = \{x \in M | x^0 = 0\}$. Затем $f(x)$ представляется как граничное значение при $s = 0$ гладкого решения $F(x, s)$ пятимерного волнового уравнения. Искомое расширение области зануления $f(x)$ получается тогда с помощью следующего свойства (см., например, [А2, лемма 6]): если гладкое решение пятимерного волнового уравнения равно 0 вместе со всеми производными на некотором времени-подобном отрезке, то оно равно 0 и в пятимерном двойном конусе, порождаемом данным отрезком (пересечение этого двойного конуса с $\{s = 0\}$, вообще говоря, шире, чем исходная область зануления $f(x)$). Анализируя свойства носителя $f(x)$, убеждаемся, что получаемая таким путем область зануления $f(x)$ включает всю гиперплоскость S_0 , откуда в силу гиперболичности волнового уравнения следует $F(x, s) \equiv 0$, а значит, и $f(x) \equiv 0$. $\square$

Помимо указанных свойств, расширенная локальность оказывается также тесно связанной с глобальной структурой теории. Как мы увидим в § 4, она является равносильной целому ряду важных глобальных свойств, и в том числе простоте квазилокальной C^* -алгебры наблюдаемых.

3.5. Свойства симметрии. Изложение аксиоматического формализма мы завершим рассмотрением проблемы симметрии. В широком плане эта проблема встает перед алгебраическим подходом как перед всякой физической теорией: требуется, чтобы теория умела описывать в числе прочего и свойства симметрии, присущие изучаемому классу физических систем. Конкретно же, поставив в данной главе задачу вывода строгих следствий из аксиом Хаага—Араки—Кастлера, мы должны рассмотреть и следствия аксиом V, VI, согласно которым все релятивистские квантовые системы обладают симметрией относительно преобразований Пуанкаре.

Формализм алгебраического описания симметрий в высокой степени универсален (в частности, для квантовой теории поля и для статистической механики его основы полностью идентичны). Доставляемая им трактовка симметрий как автоморфизмов тех или иных "физических" алгебр оказалась естественной, удобной и плодотворной; она послужила основой математической теории многих явлений и задач в разных областях: укажем хотя бы феномены спонтанного нарушения симметрии и вырождения вакуума, исследования асимптотически абелевых систем, различные задачи, связанные с инвариантными и эргодическими состояниями. За счет интереса к этим приложениям, алгебраическая трактовка симметрий, в отличие от алгебраического подхода в целом, уже не раз получала обстоятельное освещение: только из литературы, вышедшей за недавние годы на русском языке, здесь можно указать монографии Рюэля [[Р]], Эмха [[Э]], Браттели и Робинсона [[БР]]. В этих книгах, в особенности в двух последних, подробно представлена общая алгебраическая теория симметрий, строимая на базе современного аппарата C^* -динамических систем; однако физические приложения здесь рассматриваются лишь из области статистической механики.

Указанная ситуация определила характер нашего изложения в данной теме. Явно нецелесообразно повторять здесь весь фундамент общей теории физическую дискуссию читатель может найти в книге Эмха, а строгие результаты и доказательства — в книге Браттели и Робинсона. Но в то же время в рамках общего изучения локальных сетей $\{R(O)\}$ анализ их свойств симметрии абсолютно необходим, как сам по себе, так и ввиду связи

с другими свойствами: выше мы ясно видели, что свойства трансляционных автоморфизмов сети $\{R(O)\}$ — по сути, главное орудие при выводе структурных теорем теории Хаага—Араки. С учетом этого мы приведем все нужные сведения о свойствах симметрии в локальной квантовой теории, однако сделаем изложение конспективным: мы будем опускать доказательства результатов, их дискуссию и оригинальные ссылки, когда это можно найти в указанных книгах. В то же время мы постараемся выделить и детальнее разобрать те немногие факты, которые отражают специфику релятивистских квантовых систем и не являются простыми следствиями общего формализма.

Начнем с группы трансляций. Анализируя свойства трансляционных автоморфизмов $T(a) \cdot T(-a)$, естественно начать с тех, которые вытекают лишь из теории представлений групп и не зависят от алгебраической структуры локальной квантовой теории. Сюда принадлежат в первую очередь представления для проектора P_0 на подпространство $\mathcal{H}_0$ всех трансляционно инвариантных векторов. Гильбертово пространство $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_0$ можно в данном пункте считать произвольным пространством, несущим сильно непрерывное унитарное представление $T(a)$ группы $\hat{M}$. Напомним сначала некоторые простые факты. Для всякого унитарного оператора U проектор E_0 на подпространство всех его инвариантных векторов (совпадающее с ядром оператора $U-I$) может быть представлен с помощью эргодической теоремы фон Неймана:

$$E_0 = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U^k.$$

Для всякой сильно непрерывной однопараметрической унитарной группы U_t , $t \in \mathbb{R}$, в силу теоремы Стоуна существует спектральное разложение, и проектор E_0 на множество всех инвариантных векторов группы принадлежит к числу спектральных проекторов этого разложения, $E_0 = E(\{0\})$, откуда следует, что E_0 лежит в алгебре фон Неймана, порождаемой операторами U_t :

$$E_0 \in \{U_t, t \in \mathbb{R}\}''.$$

Эти элементарные факты подводят к основному классическому результату, дающему их усиление и обобщение. Таким результатом является эргодическая теорема Алаоглу—Биркгофа [[БР, с. 383—384]], которая утверждает, что для любой полугруппы $\mathcal{U}$ сжимающих отображений гильбертова пространства (в частности, для любой унитарной группы) проектор E_0 на множество всех инвариантных векторов $\mathcal{U}$ принадлежит сильному замыканию выпуклой оболочки $\mathcal{U}$:

$$E_0 \in \overline{\text{Co } \mathcal{U}}^s,$$

где, по определению, выпуклая оболочка множества есть совокупность всех выпуклых комбинаций его элементов, т.е.

$$\text{Co } \mathcal{U} = \left\{ A = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i, \quad U_i \in \mathcal{U}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Соответственно в случае $\mathcal{U} = T(\hat{M})$ имеем

$$P_0 = s\text{-}\lim_{\gamma} \sum_{i=1}^{n_{\gamma}} \lambda_{i,\gamma} T(a_i), \quad \lambda_{i,\gamma} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n_{\gamma}} \lambda_{i,\gamma} = 1, \quad (3.49)$$

где в правой части — сильный операторный предел направленности [[РС, т. 1, с. 112]] элементов $\text{Co}T(\hat{M})$. В случае, когда $\mathcal{U}$ есть сильно непрерывное представление группы G с инвариантным средним (см., например, [[К, § 9]]); обычно такие группы называются *аменабельными* или *усреднимыми*), наряду с теоремой Алаоглу—Биркгофа известно и другое представление для P_0 , относящееся к тому же разряду теорем, иногда называемых эргодическими теоремами о среднем [[Р, предложение 6.2.15]]. В этом представлении элементы направленности, сильно аппроксимирующей проектор P_0 , берутся уже не в виде выпуклых комбинаций элементов $\mathcal{U}$, а в виде интегралов по группе G ; при этом вместо совокупности нормированных наборов положительных коэффициентов $\{\lambda_{i,\gamma}\}_{i=1,\dots,n_\gamma}$ в (3.49) используется совокупность нормированных положительных функций $\chi_\gamma(g)$ на G , образующая так называемую M -сеть [[Р, гл. 6 и приложение Д. 6]]. Однако из всего аппарата усреднений по топологическим группам нам потребуются лишь немногие элементы. В частности, в данном случае достаточно заметить, что для любой измеримой по Лебегу области $O \subset M$ определен интеграл $\int_O d^4 a T(a)$ (в чем и выражается принадлежность группы трансляций $\hat{M}$ классу аменабельных групп). Произвольная M -сеть на группе $\hat{M}$ получается, если выбрать в пространстве Минковского систему борелевских подмножеств $\{O_\gamma\}$ такую, что для любого $a \in M$

$$\lim_\gamma \frac{|O_\gamma \wedge (O_\gamma + a)|}{|O_\gamma|} = 0$$

(здесь $|O_\gamma|$ — лебегова мера множества O_γ , и для произвольных множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ $\mathcal{M} \wedge \mathcal{N} \equiv (\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \setminus (\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$). Элементами сети служат при этом нормированные характеристические функции множеств O_γ , и соответствующим аналогом (3.49) будет [[БР, с. 385]]

$$P_0 = s\text{-}\lim_\gamma \frac{1}{|O_\gamma|} \int_{O_\gamma} d^4 a T(a). \quad (3.50)$$

Удобным стандартным выбором системы $\{O_\gamma\}$ служит набор возрастающих 4-кубов:

$$O_\gamma = O_L = \{a \in M \mid |a^\mu| \leq L\}, \quad |O_L| = L^4.$$

Представление (3.50) — это все, что может нам дать общая теория, использующая только унитарность и усреднимость группы $T(\hat{M})$. Оно, однако, является еще слишком слабым по сравнению с теми свойствами, которые требуются для приложений в релятивистской квантовой теории. Представление для проектора P_0 , обычно применяемое здесь (см., например, предложения 3.7 и 7.13), является усилением (3.50), которое можно вывести лишь с учетом того, что группа $T(\hat{M})$ служит подгруппой представления $U(\mathcal{P}_+^\uparrow)$ группы Пуанкаре. Впервые это усиление было указано Борхерсом еще в 1962 г.

Предложение 3.36 [Ma]. Пусть задано сильно непрерывное унитарное представление $U(a, \Lambda)$ группы Пуанкаре $\mathcal{P}_+^\uparrow$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда для любого 4-вектора $e \in M$

$$P_0 = w\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow \infty} U(\lambda e, I). \quad (3.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $E(p_0, p)$ — спектральная функция 4-векторного генератора $\hat{p}_\mu$ представления $U(a, I)$, а $E_e(p)$ — спектральная функция генератора $e^\mu \hat{p}_\mu$ однопараметрической подгруппы $U(\lambda e, I)$. Для любых $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$ имеем

$$\begin{aligned} (\Phi, U(\lambda e, I) \Psi) &= (\Phi, \exp(i\lambda e^\mu \hat{p}_\mu) \Psi) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda p} \left[\frac{d}{dp} (\Phi, E_e(p) \Psi) \right] dp = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda p} \left[\frac{d}{dp} (\Phi, P_0 E_e(p) \Psi) \right] dp + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda p} \left[\frac{d}{dp} (\Phi, (I - P_0) E_e(p) \Psi) \right] dp. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Учитывая очевидное $E_e(\{0\}) \geq P_0$, получаем

$$P_0 E_e(p) = E_e(p) P_0 = \theta(p) P_0$$

и, так как $d\theta(p)/dp = \delta(p)$, то, следовательно, первое слагаемое в (3.51) совпадает с $(\Phi, P_0 \Psi)$, и нам достаточно доказать, что второе слагаемое обращается в 0 в пределе $\lambda \rightarrow \infty$. В свою очередь для этого достаточно, чтобы функция $(\Phi, (I - P_0) E_e(p) \Psi)$ была абсолютно непрерывна на $\mathbf{R}$: тогда производная этой функции принадлежит $L^1(\mathbf{R})$, и в силу леммы Римана—Лебега (см., например, [РС, т. 2, с. 20]) указанный предел равен нулю.

По определению абсолютная непрерывность функции $(\Phi, (I - P_0) \times \times E_e(p) \Psi)$ означает

$$(\Phi, (I - P_0) E_e(\Delta) \Psi) = 0 \quad \forall \Delta \subset \mathbf{R}, \quad |\Delta| = 0. \quad (3.52)$$

С учетом неравенства Шварца, достаточно установить это свойство при $\Phi = \Psi$, что мы сделаем, пользуясь наличием в $\mathcal{H}$ представления $U(a, \Lambda)$ группы Пуанкаре. $U(a, \Lambda)$ обладает разложением на неприводимые представления $U_{(m,s)}(a, \Lambda)$; соответствующее разложение $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\mathcal{H} = \left(\int_s^\oplus \mathcal{H}_{(m,s)} d\rho(m^2) \right) \oplus \mathcal{H}_0,$$

где (см., например, [БЛТ, гл. 2, § 3]) $\mathcal{H}_{(m,s)} = L^2(V_{(m)}^+, d\mu; E^{(2s+1)})$, $d\mu = d\mu(p) = \delta(p^2 - m^2) d^4 p$ и $E^{(2s+1)}$ — $(2s+1)$ -мерное пространство спиновых степеней свободы. Обозначая элементы $\mathcal{H}_{(m,s)}$ как

$$\Phi_{(m,s)}(p) = \{ \Phi_{(m,s)}^l(p), \quad l = -s, -s+1, \dots, s, \quad p_0 = (p^2 + m^2)^{1/2} \}$$

и учитывая, что операторы импульса $\hat{p}_\mu$ имеют в каждом $\mathcal{H}_{(m,s)}$ плотную область $\mathcal{D}_{(m,s)}$ собственных векторов:

$$(\hat{p}_\mu \Phi_{(m,s)})^l(p) = p_\mu \Phi_{(m,s)}^l(p), \quad (e^\mu \hat{p}_\mu) \Phi_{(m,s)}(p) = (e^\mu p_\mu) \Phi_{(m,s)}(p),$$

можем проверить выполнение (3.52) при $\Phi = \Psi \in \mathcal{H}_{(m,s)}$. Пользуясь известным выражением спектральной функции оператора A через его резольвенту $R_z(A)$ (см., например, [Ф, с. 118]):

$$E_A(\Delta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(\Delta)} R_z(A) dz,$$

явным вычислением находим: для произвольного измеримого множества $\Delta \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & (\Phi_{(m,s)}, E_e(\Delta) \Phi_{(m,s)}) = \\ & = \sum_{l=-s}^s \int |\Phi_{(m,s)}^l(p)|^2 \chi_{\Delta}(e^{\mu} p_{\mu}) \delta(p^2 - m^2) d^4 p, \end{aligned}$$

где $\chi_{\Delta}(\cdot)$ — характеристическая функция множества Δ . Отсюда уже ясно, что при $|\Delta| = 0$ интеграл в правой части также будет равен 0. (В самом деле, достаточно рассмотреть случаи $e = (1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$.) $\square$

Теоретико-групповое содержание свойства (3.7) полнее выяснено в [Pe1], где показано, что однопараметрические подгруппы с подобной асимптотикой типичны для унитарных представлений любой простой некомпактной группы Ли.

Центральное место среди свойств трансляционных автоморфизмов занимают многочисленные следствия того фундаментального факта, что квазилокальная алгебра $\mathfrak{A}$ с заданным на ней действием группы трансляций $\hat{M}$ представляет собой асимптотически абелеву C^* -динамическую систему. Дадим определения этих понятий.

О п р е д е л е н и е 3.3. C^* -динамической системой ¹⁾ называется тройка объектов $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$, состоящая из C^* -алгебры $\mathfrak{A}$, локально компактной группы G и сильно непрерывного гомоморфизма α группы G в группу $*$ -автоморфизмов $\mathfrak{A}$. Ковариантным представлением динамической системы $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ называется тройка объектов $(\mathcal{H}, \pi, U)$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, π — невырожденное представление алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{H}$, U — сильно непрерывное унитарное представление группы G в $\mathcal{H}$ такие, что для всех $A \in \mathfrak{A}$, $g \in G$

$$\pi(\alpha_g(A)) = U_g \pi(A) U_g^*. \quad (3.53)$$

Это определение означает, что при каждом $g \in G$ α_g есть $*$ -автоморфизм $\mathfrak{A}$, $\alpha_e = \text{Id}$, и отображение $g \rightarrow \alpha_g(A)$ непрерывно по норме при любом $A \in \mathfrak{A}$ (e — единица группы G , Id — тождественное отображение алгебры $\mathfrak{A}$). Функционал или состояние ω на алгебре $\mathfrak{A}$ динамической системы называется G -ковариантным, если π_{ω} — ковариантное представление, и G -инвариантным, если для всех $g \in G$ и $A \in \mathfrak{A}$

$$\omega(\alpha_g(A)) = \omega(A).$$

Множество всех G -инвариантных состояний будем обозначать S_{inv} или, при необходимости, $S_{\text{inv}}^{(G)}$. В качестве простого дополнения к конструкции Гельфанда — Наймарка — Сигала легко убедиться, что каждому G -инвариантному состоянию ω канонически соответствует циклическое кова-

¹⁾ По справедливому замечанию Борхерса в рамках релятивистской квантовой теории этот общеупотребительный термин мало удачен: структуры $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ используются здесь главным образом для описания кинематических, а не динамических свойств (в отличие от нерелятивистских теорий, где в качестве α часто рассматриваются автоморфизмы динамической эволюции $\exp(iHt) : \exp(-iHt)$).

риантное представление $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, U_\omega)$, причем циклический вектор Ω_ω этого представления инвариантен относительно унитарной группы U_ω :

$$U_\omega(g)\Omega_\omega = \Omega_\omega \quad \forall g \in G. \quad (3.54)$$

Условиями (3.53) и (3.54) представление U_ω группы G определяется единственным образом.

Для произвольного ковариантного представления π будем обозначать $E_{0,\pi}$ проектор на подпространство $\mathcal{H}_{0,\pi}$ всех G -инвариантных векторов в пространстве $\mathcal{H}_\pi$; в случае $\pi = \pi_\omega$ эти объекты будем обозначать соответственно $E_{0,\omega}$ и $\mathcal{H}_{0,\omega}$, а при $G = \hat{M}$ сохраним обозначения $P_{0,\pi}$ и $P_{0,\omega}$. Для проекторов $E_{0,\pi}$ справедливо представление (3.49) с помощью теоремы Алаоглу — Биркгофа, а в случае аменабельной группы G — также и представление типа (3.50).

Очевидно, что в случае теории Хаага — Араки или Хаага — Кастлера квазилокальная C^* -алгебра $\mathfrak{A}$, группа Пуанкаре $\mathcal{P}_+^\uparrow$ и автоморфизмы $\alpha_{(a,\Lambda)}$, $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$, определяемые аксиомой V, образуют C^* -динамическую систему. Аналогично, такую систему образует и всякая тройка $(\mathfrak{A}, \Pi, \alpha_{(a,\Lambda)})$, где Π — некоторая подгруппа $\mathcal{P}_+^\uparrow$ и $(a, \Lambda) \in \Pi$. Вакуумные состояния релятивистской квантовой теории являются, по определению, инвариантными состояниями системы $(\mathfrak{A}, \mathcal{P}_+^\uparrow, \alpha_{(a,\Lambda)})$, однако весьма часто этот термин применяется и ко всем трансляционно-инвариантным состояниям, которые, строго говоря, нужно считать лишь "кандидатами" в истинные вакуумные состояния.

О п р е д е л е н и е 3.4. C^* -динамическую систему $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ с некомпактной группой G будем называть:

1) *G-абелевой*, если для любого G -инвариантного состояния ω множество операторов $E_{0,\omega}\pi_\omega(A)E_{0,\omega}$, $A \in \mathfrak{A}$, является абелевым;

2) *обладающей большой группой симметрии* G , если для каждого $\omega \in S_{\text{inv}}^{(G)}$ и для всех $A = A^* \in \mathfrak{A}$

$$\overline{\text{Co}\{\pi_\omega(\alpha_g(A)), g \in G\}^w} \cap \pi_\omega(\mathfrak{A})' \neq \phi;$$

3) *слабо асимптотически абелевой*, если для любого состояния ω на алгебре $\mathfrak{A}$, любых $A, B \in \mathfrak{A}$ и любого способа стремления к бесконечности на группе G

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \omega([\alpha_g(A), B]) = 0;$$

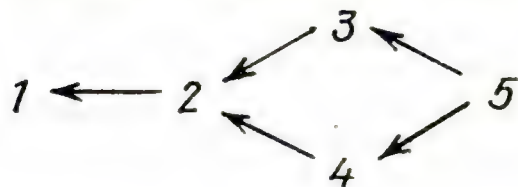
4) *асимптотически абелевой по Стермеру*, если для каждого элемента $A = A^* \in \mathfrak{A}$ найдется последовательность $\{g_n(A)\}_{n=1}^\infty \subset G$ такая, что $g_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и для всех $B \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_{g_n}(A), B\| = 0; \quad (3.55)$$

5) *равномерно асимптотически абелевой*, если для любых $A, B \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \|\alpha_g(A), B\| = 0.$$

Между перечисленными свойствами справедливы соотношения



(3.56)

Эти соотношения нетрудно вывести, если воспользоваться следующими эквивалентными определениями свойств 1 и 2:

1') система $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ G -абелева, если для каждого $\omega \in S_{\text{inv}}$ и для всех $A, B \in \mathfrak{A}$

$$\inf_{A' \in \text{Co Orb}_G A} |\omega([A', B])| = 0,$$

где символ $\text{Co Orb}_G A$ обозначает выпуклую оболочку G -орбиты $[K, \text{с. 23}]$ элемента A в алгебре $\mathfrak{A}$, т.е. множества

$$\text{Orb}_G A = \{\alpha_g(A), g \in G\}$$

(эквивалентность 1 и 1' см. $[P, \text{теорема 6.2.8}]$).

2') система $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ обладает большой группой симметрии, если для каждого $\omega \in S_{\text{inv}}$ и каждого конечного набора элементов $A, B_1, \dots, B_n, C$ из $\mathfrak{A}$

$$\inf_{A' \in \text{Co Orb}_G A} |\omega(C^*[A', B_k]C)| = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

(эквивалентность 2 и 2' см. $[St\phi 1, \text{теорема 3.5}]$).

Из этих переформулировок очевидны импликации $1 \leftarrow 2$, $2 \leftarrow 3$ и $2 \leftarrow 4$; импликации $4 \leftarrow 5$ и $3 \leftarrow 5$ тривиальны.

Заметим, что в формулировке 1, множество операторов $E_{0,\omega} \pi_\omega(\mathfrak{A}) \times \times E_{0,\omega}$, вообще говоря, может не являться алгеброй. Из формулировки же 1', учитывая, что для любой подгруппы $H \subset G$, $S_{\text{inv}}^{(H)} \supset S_{\text{inv}}^{(G)}$, немедленно получаем: если H есть подгруппа G и система $(\mathfrak{A}, H, \alpha)$ H -абелева, то система $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ G -абелева. Прямо из определения видно, что аналогичным свойством обладают и системы с большой группой симметрии: в полном согласии с термином, если H — подгруппа G , и H — большая группа симметрии, то заведомо и G есть большая группа симметрии.

В контексте локальной квантовой теории свойства асимптотической абелевости (по отношению к пространственноподобным трансляциям) возникают самым естественным образом, являясь почти автоматическим следствием локальной коммутативности.

Предложение 3.37. Пусть задана локальная квантовая теория, удовлетворяющая аксиомам III, V. Тогда для любых $A, B \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} \| [A(a), B] \| = 0, \quad |a| \equiv (a^0)^2 + a^2. \quad (3.57)$$

Доказательство $[[Э, \text{с. 364}]]$ сводится к элементарной проверке, если учесть, что операторы A и B можно с любой точностью аппроксимировать по норме элементами A_0, B_0 из алгебры всех локальных наблюдаемых $\mathcal{A}$, и при достаточно больших пространственноподобных $a \in M$ $[A_0(a), B_0] = 0$. $\square$

Эта элементарная констатация ведет, тем не менее, к обширным следствиям. Отметим сначала те, что вытекают из нее непосредственно.

С л е д с т в и е 1. В локальной квантовой теории, удовлетворяющей аксиомам III, V, операторы преобразований Пуанкаре не могут быть квази-локальными наблюдаемыми:

$$U(a, \Lambda) \notin \mathfrak{A} \quad \forall (a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о [[Э, с. 365]] для операторов $T(a) = U(a, I)$ заключается в прямой проверке того, что допущение $T(a_0) \in \mathfrak{A}$ для некоторого $a_0 \in \hat{M}$, $a_0 \neq 0$, ведет к противоречию: $A(a_0) = A$ для всех $A \in \mathfrak{A}$. В случае операторов $U(0, \Lambda)$ следует, кроме того, учесть групповое свойство: $U(0, \Lambda)T(a)U(0, \Lambda)^{-1} = T(\Lambda a)$. $\square$

Результат этого следствия не исключает, однако, возможности того, что преобразования Пуанкаре локально реализуются операторами из $\mathfrak{A}$: для некоторых $O \in B(M)$ и $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ могут, вообще говоря, найтись унитарные операторы $U(O; a, \Lambda) \in \mathfrak{A}$ такие, что

$$U(O; a, \Lambda)R(O)U(O; a, \Lambda)^{-1} = R(\Lambda^{-1}(O - a)).$$

С л е д с т в и е 2. В теории Хаага – Араки для любых $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathcal{L}'$

$$\begin{aligned} \text{w-lim}_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} [A(a), B] &= 0. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о [[Э, с. 366–367]] есть несложное обобщение доказательства предложения 3.37. $\square$

С л е д с т в и е 3. Пусть в теории Хаага – Араки или Хаага – Кастлера состояния $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{A}_1^{*+}$ оказываются векторными в некотором факторном представлении $\mathfrak{A}$. Тогда

$$\lim_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} [\omega_1(A(a)) - \omega_2(A(a))] = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о [[Э, с. 367]] сводится к применению следствия 2. $\square$

В качестве простого упражнения читатель может восстановить подробно доказательства предложения 3.37 и его следствий.

Ввиду ограничения пространственноподобными направлениями предложение 3.37 не означает, что C^* -динамическая система $(\mathfrak{A}, \hat{M}, \alpha_a)$ является равномерно асимптотически абелевой: для этого требовалось бы выполнение (3.57) для любых направлений в M . Однако равномерно асимптотически абелевыми будут все системы вида $(\mathfrak{A}, \hat{M}_s, \alpha_a)$, где $\hat{M}_s$ — та или иная подгруппа пространственноподобных трансляций (в частности, имеет место и равномерная асимптотическая абелевость по отношению к подгруппе $\hat{\mathbf{R}}$ чисто пространственных трансляций). Тем самым все такие системы являются и G -абелевыми (для $G = \hat{M}_s$). Отсюда в свою очередь вытекает, что в силу $\hat{M}_s \subset \hat{M} \subset \mathcal{P}_+^\uparrow$ свойство G -абелевости имеет место также и для группы всех трансляций, и для группы Пуанкаре, т.е. система $(\mathfrak{A}, \hat{M}, \alpha_a)$ является $\hat{M}$ -абелевой, а $(\mathfrak{A}, \mathcal{P}_+^\uparrow, \alpha_{(a, \Lambda)})$ — $\mathcal{P}_+^\uparrow$ -абелевой. Аналогично, $\hat{M}_s$ и, в частности, $\hat{\mathbf{R}}^3$ — большие группы симметрии (в силу

импликаций (3.56)) и, следовательно, $\hat{M}$ и $\mathcal{P}_+^1$ также суть большие группы симметрии. Благодаря этому для локальной квантовой теории справедлив весь комплекс свойств G -абелевых систем, как равно и систем с большими группами симметрии.

Переходя к этим свойствам, отметим сначала прямые следствия определений и основных критериев G -абелевости. Поскольку отвечающее G -ковариантному состоянию ω представление C^* -динамической системы $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ включает в себя как представление π_ω алгебры $\mathfrak{A}$, так и представление U_ω группы G , то при его изучении играет важную роль алгебра фон Неймана, порождаемая объединением соответствующих семейств операторов. Поэтому введем особые символы:

$$R_\omega = \pi_\omega(\mathfrak{A})'', \quad \mathcal{L}_\omega = R_\omega \cap R'_\omega, \quad R_\omega^{(U)} = \{ \pi_\omega(\mathfrak{A}) \cup U_\omega(G) \}'',$$

$$\mathcal{L}_\omega^{(U)} = R_\omega^{(U)} \cap R_\omega'^{(U)}$$

(соответственно $R_\omega^{(T)}$ и $\mathcal{L}_\omega^{(T)}$ в случае квантовополевой C^* -системы $(\mathfrak{A}, \hat{M}, \alpha_a)$) и немедленно убедимся, что алгебра $R_\omega^{(U)}$ тесно связана со структурными свойствами G -абелевой системы.

Предложение 3.38. Пусть задана теория Хаага – Кастлера, удовлетворяющая аксиомам III, V, и пусть ω – трансляционно инвариантное состояние на $\mathfrak{A}$. Тогда имеют место следующие свойства:

1) $P_{0,\omega} \pi_\omega(\mathfrak{A}) P_{0,\omega}$ есть множество взаимно коммутирующих операторов;

2) $R_{0,\omega} \equiv P_{0,\omega} R_\omega P_{0,\omega}$ – максимальная абелева алгебра фон Неймана в пространстве $\mathcal{H}_{0,\omega}$;

3) $R_\omega^{(T)'} - абелева алгебра фон Неймана в пространстве \mathcal{H}_\omega.$

Аналогично, в теории Хаага – Араки с произвольным нетривиальным подпространством $\mathcal{H}_0$ $\hat{M}$ -инвариантных векторов имеют место следующие свойства:

1') $P_0 \mathfrak{A} P_0$ есть множество взаимно коммутирующих операторов;

2') $R_0 = P_0 R P_0$ – абелева алгебра фон Неймана в $\mathcal{H}_0$;

3') для любого вектора $\Omega \in \mathcal{H}_0$ $(\mathfrak{A}_{P_\Omega R_\Omega} \cup T(\hat{M})_{P_\Omega R_\Omega})'$ – абелева алгебра фон Неймана в подпространстве $\mathcal{H}_\Omega^R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство 1 – следствие $\hat{M}$ -абелевости системы $(\mathfrak{A}, \hat{M}, \alpha_a)$; свойство 3 всегда вытекает из 1 [[БР, предложение 4.3.7]]. Свойство 2 – существенное усиление 1, опирающееся уже не только на $\hat{M}$ -абелевость системы $(\mathfrak{A}, \hat{M}, \alpha_a)$. Рассмотрим его утверждения по очереди.

а) Тот факт, что $R_{0,\omega}$ – алгебра фон Неймана, вытекает из известной эргодической теоремы Ковача – Сюча (см., например, [[БР, теорема 4.3.8]]), которую мы уже применяли в предложении 3.12 и которая утверждает существование и единственность нормального G -инвариантного отображения (проекции) $\Phi: R_\omega \rightarrow R_\omega \cap T(\hat{M})'$ в случае, когда $F_0 = P_{\mathcal{H}_{0,\omega}}^{R_\omega'} = I_\omega$. По теореме Ковача – Сюча для любого $A \in R_\omega$

$$\Phi(A) P_{0,\omega} = P_{0,\omega} A P_{0,\omega}.$$

Отсюда при $F_0 = I_\omega$

$$R_{0,\omega} = \Phi(R_\omega)P_{0,\omega} = (R_\omega \cap T(\hat{M})')P_{0,\omega}.$$

Последний член здесь есть алгебра фон Неймана, поскольку

$$P_{0,\omega} \in T(\hat{M})'' \subset (R_\omega \subset T(\hat{M})')'.$$

В общем случае ($F_0 \neq I_\omega$) полученный вывод справедлив для алгебры $F_0 R_\omega F_0$, а отсюда — и для $R_{0,\omega}$, за счет $P_{0,\omega} \leq F_0$.

б) Абелевость $R_{0,\omega}$ — прямое усиление свойства 1, и соответственно она устанавливается [DKS, лемма 4] с привлечением более сильных предположений: используется, что $\mathcal{H}_{0,\omega}$ — циклическое подпространство $\pi_\omega(\mathfrak{A})$, а $T(\hat{M})$ — большая группа симметрии. В этих предположениях искомое утверждение получается простым применением теоремы Ковача—Сюча к алгебрам фон Неймана R'_ω и $\mathcal{Z}_\omega$.

с) Максимальная абелевость $R_{0,\omega}$ вытекает из того, что R_ω -циклический вектор $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_{0,\omega}$ (отвечающий функционалу ω) является циклическим и для $R_{0,\omega}$.

Теорема Ковача — Сюча есть общее утверждение для произвольной алгебры фон Неймана N с группой U_g пространственных автоморфизмов и нетривиальным U_g -инвариантным подпространством $\mathcal{H}_{\text{inv}}$; таковым же является и ее следствие, согласно которому $P_{\text{inv}} N P_{\text{inv}}$ — алгебра фон Неймана [DKS, следствие 2]. Поэтому, применяя это следствие к тройке объектов $(R, T(\hat{M}), \mathcal{H}_0)$ общей теории Хаага — Араки, мы немедленно получаем 2'. Свойство 1' следует из 2'. Наконец, 3' есть точный аналог (или же частный случай) 3, поскольку индукция $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_{P_\Omega^R}$ совпадает с представлением π_{ω_Ω} , которое отвечает инвариантному состоянию ω_Ω и действует в подпространстве $\mathcal{H}_\Omega^R$; с учетом этого, алгебра фон Неймана в условии 3' есть в точности $R_{\omega_\Omega}^{(T)'}.$ □

З а м е ч а н и е. Очевидно, что, в отличие от 3', свойства 1' и 2' — более сильные утверждения, чем прямые аналоги утверждений 1 и 2 для теории Хаага — Араки (такие аналоги, подобно 3', также относились бы к объектам $\mathfrak{A}_{P_\Omega^R}, \mathcal{H}_\Omega^R$). Но получить подобное же усиление и в случае свойства 3' мы не можем: такое усиление, имевшее бы, очевидно, вид

$$3'') \{ \mathfrak{A} \cup T(\hat{M}) \}' \subset \{ \mathfrak{A} \cup T(\hat{M}) \}'',$$

не следует из теоремы Ковача — Сюча. Оно должно выводиться из 1' как 3 — из 1; но импликация $1 \rightarrow 3$ — специфическое свойство представлений, отвечающих инвариантным состояниям [[БР, доказательство предложения 4.3.7]]. В итоге, если в теории Хаага — Араки не имеется циклического вакуумного вектора, то мы, в общем случае, не получаем в ней свойства 3'', а только более слабое 3'. В случае же систем с условием спектральности, когда трансляции оказываются внутренними автоморфизмами R (см. теорему 3.43), это замечание означает, что без допущения о цикличности вакуума из аксиом Хаага — Араки возможно вывести лишь дискретность R (см. предложение 3.46), но не абелевость коммутанта R' — существенно более сильное свойство, которым исключаются, например, суперотборные секторы с парастатистикой (см. § 6).

Результаты общей теории асимптотически абелевых систем располагаются в основном по двум направлениям, которые связаны соответственно с исследованием свойств эргодичности и кластерных свойств. Оба эти комплекса результатов обретают свои главные приложения в статистической механике. В релятивистской квантовой теории они не имеют столь важного значения, и мы приведем лишь те результаты, которые непосредственно применяются в ней. Сначала рассмотрим свойства эргодических состояний.

О п р е д е л е н и е 3.5. Инвариантное состояние ω на C^* -динамической системе $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ называется *эргодическим* или же *экстремальным инвариантным* состоянием, если оно не может быть представлено в виде смеси инвариантных состояний:

$$\omega \neq \sum_i \lambda_i \omega_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1, \quad \omega_i \in S_{\text{inv}}.$$

Множество всех эргодических состояний будем обозначать S_{erg} или $S_{\text{erg}}^{(G)}$; очевидно, что S_{erg} есть совокупность всех крайних точек множества S_{inv} .

Условие эргодичности состояния (впервые введенное Сигалом еще в 1951 г.) представляет собой определенное ослабление условия чистоты (неразложимости), естественно возникающее при описании физических систем с заданными свойствами симметрии. Понятно, что всякое чистое инвариантное состояние является эргодическим, тогда как обратное, вообще говоря, неверно: эргодическое состояние может и не быть чистым, поскольку крайняя точка множества инвариантных состояний может не оказаться крайней во множестве всех состояний. Это различие между свойствами эргодичности и чистоты весьма существенно: если чистым состояниям отвечают неприводимые представления, то эргодическим, в типичных случаях, — факторные представления. Естественность и необходимость эргодических состояний всего нагляднее обнаруживается в связи с задачей о разложении состояний или представлений. Понятно, что в отсутствие каких-либо дополнительных условий на описание элементарные компоненты, на которые разлагается физическая система, должны характеризоваться чистыми (неразложимыми) состояниями. Однако, если система обладает симметрией по отношению к заданной группе G и мы требуем, чтобы эта симметрия сохранялась в каждой из компонент, на которые система разлагается, — такое разложение должно происходить уже не по чистым, а по эргодическим состояниям: хотя такие состояния, вообще говоря, возможно разложить и далее, но, если мы это сделаем, то выйдем из класса инвариантных состояний и потеряем симметрию описания.

Общие свойства эргодических состояний для различных групп симметрии разбираются во всех монографиях, указанных в начале раздела; кроме того, в локальной квантовой теории и нет нужды в таком общем анализе (если не считать приложений к проблеме внутренних симметрий и их нарушения, которую мы не будем затрагивать). Поэтому мы ограничимся лишь формулировкой важнейших из этих свойств применительно к группе трансляций.

П р е д л о ж е н и е 3.39. Пусть задана теория Хаага — Араки или Хаага — Кастлера, удовлетворяющая аксиомам III, V. Тогда для любого ин-

вариантного состояния C^* -динамической системы $(\mathfrak{A}, \hat{M}, \alpha_a)$ следующие условия эквивалентны¹⁾:

- 1) состояние ω является эргодическим;
- 2) ω — единственное нормальное $\hat{M}$ -инвариантное состояние на R_ω ;
- 3) ω — единственное векторное $\hat{M}$ -инвариантное состояние на R_ω ;
- 4) $\dim \mathcal{H}_{0,\omega} = 1$;
- 5) $R_\omega^{(T)}$ — фактор;
- 6) $R_\omega^{(T)} = \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$;
- 7) $R_\omega \cap R_\omega^{(T)'} = \mathcal{C}(\mathcal{H}_\omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия 1–7 входят в число условий теоремы 8 [[Э, гл. 2]]. Согласно [[Э, с. 241]] для любой C^* -динамической системы с большой группой симметрии все условия указанной теоремы являются эквивалентными. $\square$

Нужно отметить, что для произвольной G -абелевой системы условия 1–7 не являются полностью эквивалентными, так что доказательство опирается именно на тот факт, что C^* -система $(\mathfrak{A}, \hat{M}, \alpha_a)$ в локальной квантовой теории не только $\hat{M}$ -абелева, но и обладает большой группой симметрии. Разумеется, поскольку группа Пуанкаре также является большой группой симметрии, то для C^* -системы $(\mathfrak{A}, \mathcal{P}_+^\dagger, \alpha_{(a,\Lambda)})$ справедливо аналогичное утверждение, получаемое из предложения 3.39 заменой $T_\omega(\hat{M})$ на $U_\omega(\mathcal{P}_+^\dagger)$.

Подчеркнем, далее, что в теории Хаага — Араки эргодичность вакуумного состояния ω_Ω , согласно доказанному, равносильна его единственности лишь в подпространстве $\mathcal{H}_\Omega^R$, но отнюдь не во всем $\mathcal{H}$; только в случае циклического вакуумного вектора Ω' , эргодичность $\omega_{\Omega'}$ влечет единственность и вакуумного состояния, и вакуумного вектора.

Наконец, заметим, что из полученного предложения немедленно очевидна упоминавшаяся выше связь между эргодичностью состояния и его факторностью.

С л е д с т в и е. Пусть ω — факторное $\hat{M}$ -инвариантное состояние. Тогда ω эргодично, и для представления π_ω выполнены все условия 1–7 предложения 3.39. Если $\mathcal{Z}_\omega \subset R_\omega^{(T)'}$, то верно и обратное, т.е. из эргодичности состояния следует его факторность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для факторного состояния ω , по определению, $\mathcal{Z}_\omega = \mathcal{C}(\mathcal{H}_\omega)$, так что выполнено условие 7 предложения 3.39, а с ним и все остальные условия. Обратно, если $\mathcal{Z}_\omega \subset R_\omega^{(T)'}$ и состояние ω эргодично, то импликация $1 \rightarrow 5$ предложения 3.39 дает $\mathcal{Z}_\omega = \mathcal{C}(\mathcal{H}_\omega)$. $\square$

Ниже, когда мы включим в рассмотрение постулат спектральности, мы еще раз вернемся к свойствам эргодических состояний и увидим, что в данном случае они получают значительное упрощение. Пока же обра-

¹⁾ Формулировки условий мы приводим лишь для случая теории Хаага — Кастлера; модификации, необходимые в случае теории Хаага — Араки, очевидны.

тимся к кластерным свойствам. Выше, в разделе 3.4, мы подробно рассмотрели состояния на $\mathfrak{A}$, обладающие свойством факторизуемости: $\omega(AB) = \omega(A)\omega(B)$, когда A и B взяты из взаимно коммутирующих подалгебр $\mathfrak{A}$. Кластерные свойства, играющие роль при изучении асимптотического поведения физических систем и в квантовой теории поля, и в статистической механике, могут рассматриваться как некие приближенные или асимптотические свойства факторизуемости; в типичных случаях это суть соотношения вида:

$$\lim_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} [\omega(A(a)B) - \omega(A(a))\omega(B)] = 0 \quad \forall A, B \in \mathfrak{A}, \quad (3.58)$$

и поскольку при достаточно больших $a^2 < 0$ элементы $A(a)$ и B лежат во взаимно коммутирующих подалгебрах $\mathfrak{A}$, то (3.58) соотносится со свойством факторизуемости точно так же, как соотносятся свойства асимптотической абелевости с обычной абелевостью. Параллель со свойствами абелевости и асимптотической абелевости идет здесь и еще дальше. В случае абелевой C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ все чистые состояния на ней обладают свойством факторизуемости [БР, следствие 2.3.21]; в случае асимптотически абелевой алгебры все эргодические состояния, т.е. аналоги чистых состояний для систем с группой симметрии, обладают, как мы увидим, кластерными свойствами — свойствами асимптотической факторизуемости. Эта же параллель сохраняется и в отношении физического содержания обеих групп свойств. Взаимная коммутативность двух подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ выражает локальность или причинность теории — взаимную независимость "эффектов" или "возбуждений" или "частиц", описываемых наблюдаемыми из этих подалгебр. Асимптотическая же абелевость, очевидно, должна интерпретироваться как "асимптотическая причинность" — ослабленная форма локальной коммутативности, выражающая ту же взаимную независимость "возбуждений" и т.п., но лишь для таких групп (кластеров, пучков) этих "возбуждений", которые не только взаимно пространственноподобны, а к тому же асимптотически удалены друг от друга. И наконец, кластерные свойства, как уже ясно, относятся к асимптотической абелевости точно так же, как причинная независимость — к обычной локальности: они выражают сходное физическое содержание, но в терминах состояний. Коротко говоря, если асимптотическая абелевость — это асимптотический (и, значит, ослабленный) аналог локальности, то кластерные свойства — это асимптотический (и, значит, ослабленный) аналог причинной независимости, а также и факторизуемости состояний. Подчеркнем только два момента. Во-первых, эти нестрогие соображения говорят лишь о связях между физическим содержанием, а не точными формулировками обсуждаемых свойств; мы уже видели не раз, что близость физического содержания каких-либо свойств (например, причинных свойств в § 3.4) отнюдь не обеспечивает эквивалентности их математических формулировок. Во-вторых, эти соображения имеют, конечно, в виду только релятивистскую квантовую теорию; в статистической механике кластерные свойства получают иную физическую интерпретацию, связанную с понятиями корреляций и перемешивания.

Известны многие виды кластерных свойств. Мы укажем сейчас несколько основных, рассматривая их, по возможности, в порядке постепенного

усиления (хотя, в отличие от различных видов асимптотической абелевости, в совокупности известных кластерных свойств не имеется столь же строгих упорядочений).

Первым естественно назвать свойство *равномерной кластерности*, имеющее место уже и в отсутствие всякой группы симметрии. Как и все кластерные свойства, это также есть свойство асимптотической факторизуемости состояний — однако в данном случае асимптотическая разнесенность кластеров определяется не по отношению к параметрам группы симметрии, а по отношению к сетевой структуре квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$. Соответственно общий класс систем, для которых формулируется данное свойство, составляют не C^* -динамические системы $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$, но обобщенные квазилокальные системы [[БР, § 2.6]], для которых алгебра $\mathfrak{A}$ наделена не группой симметрии G , но сетью C^* -подалгебр $\{\mathfrak{A}_\gamma\}_{\gamma \in \sigma}$, удовлетворяющих обобщенной локальности: $[\mathfrak{A}_\gamma, \mathfrak{A}_\beta] = 0$ для всех $\gamma \perp \beta$. Здесь $\gamma \perp \beta$ обозначает отношение ортогональности на множестве σ — абстрактный аналог отношения $O_1 \times O_2$ на множестве $B(M)$, обладающий теми же свойствами. Понятно, что обобщенные квазилокальные системы дают возможность единого рассмотрения сразу многих классов теорий, как релятивистских, так и нерелятивистских. Нам, однако, не требуется такой общности, и мы будем рассматривать равномерную кластерность лишь в рамках локальной квантовой теории.

О п р е д е л е н и е 3.6. Состояние ω на квазилокальной алгебре $\mathfrak{A}$ называется *равномерно кластерным*, если для любых $A \in \mathfrak{A}$ и $\epsilon > 0$ найдется область $O \in B(M)$ такая, что для всех $B \in \mathfrak{A}(O')$

$$|\omega(AB) - \omega(A)\omega(B)| \leq \epsilon \|B\|.$$

П р е д л о ж е н и е 3.40. Пусть задана теория Хаага — Араки или Хаага — Кастлера, удовлетворяющая аксиомам I, III. Тогда всякое факторное состояние на квазилокальной алгебре $\mathfrak{A}$ является равномерно кластерным.

Д о к а з а т е л ь с т в о складывается из двух утверждений:

1) Состояние ω на квазилокальной алгебре $\mathfrak{A}$ равномерно кластерно тогда и только тогда, когда "алгебра асимптотических наблюдаемых" $\mathcal{Z}_{\omega, as}$ представления π_ω , определяемая как

$$\mathcal{Z}_{\omega, as} = \bigcap_{O \in B(M)} R_\omega(O'), \quad R_\omega(O') = \left\{ \bigcup_{\substack{\tilde{O} \subset O' \\ \tilde{O} \in B(M)}} \pi_\omega(\tilde{O}) \right\}',$$

является тривиальной, $\mathcal{Z}_{\omega, as} = \mathcal{C}(\mathcal{H}_\omega)$.

2) $\mathcal{Z}_{\omega, as} \subset \mathcal{Z}_\omega$.

Первое из этих утверждений есть теорема Ланфорда — Рюэля, доказательство которой можно найти в [[Э, с. 376–377]]. Второе утверждение элементарно: поскольку $\mathcal{Z}_{\omega, as} \subset R_\omega$, а для любой $O \in B(M)$ $R_\omega(O') \subset \pi_\omega(O)'$, то

$$\mathcal{Z}_{\omega, as} \subset R_\omega \cap \left(\bigcap_{O \in B(M)} \pi_\omega(O)' \right) = \mathcal{Z}_\omega. \quad \square$$

Как видно из этого доказательства, для всех состояний ω , удовлетворяющих условию $\mathcal{Z}_{\omega, as} = \mathcal{Z}_\omega$, свойства факторности и равномерной кластерности эквивалентны. Можно показать [[БР, теорема 2.6.10]], что если сеть локальных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ обладает свойством F ,

то $\mathcal{L}_{\omega, as} = \mathcal{L}_{\omega}$ для всех локально нормальных состояний на $\mathfrak{A}$. Заметим также, что алгебра асимптотических наблюдаемых $\mathcal{L}_{\omega, as}$, иногда также называемая алгеброй на бесконечности, возникает при рассмотрении многих свойств локальных сетей; в частности, она нам встретится в § 5 в связи с анализом свойств квазиэквивалентности когерентных суперотборных секторов.

Основной вид кластерных свойств составляют кластерные свойства эргодических состояний; в частности, именно к этому виду принадлежит известное кластерное свойство в вайтмановской теории, называемое в русской литературе свойством разбиения на пучки [[БЛТ, с. 191]] и служащее необходимым и достаточным условием единственности вакуума. Обычное, иногда называемое слабым, кластерное свойство — это свойство асимптотической факторизуемости эргодических состояний C^* -динамической системы с произвольной некомпактной группой G и без всяких, вообще говоря, свойств асимптотической абелевости. Существуют различные формулировки такого свойства. Стандартное двухэлементное слабое кластерное свойство для G -инвариантного состояния ω имеет вид

$$\inf_{A' \in \text{Co Orb}_G A} |\omega(A'B) - \omega(A)\omega(B)| = 0. \quad (3.59)$$

В такой формулировке асимптотический характер кластерного свойства не очень нагляден. Поэтому часто аналогичное двухэлементное свойство выражается в терминах направленностей $\{A_\gamma\} \subset \text{Co Orb}_G A$:

$$\lim_{\gamma} |\omega(\alpha_g(A_\gamma)B) - \omega(A)\omega(B)| = 0, \quad (3.60)$$

где стремление к пределу имеет место равномерно по g . Наконец, для аменабельной группы, в качестве которой мы, как и раньше, рассматриваем лишь группу трансляций $\hat{M}$, аналогичное свойство, очевидно, представляется в виде

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^4} \int_{|a^\mu| \leq L} d^4 a [\omega(A(a)B) - \omega(A)\omega(B)] = 0. \quad (3.61)$$

Укажем еще трехэлементное слабое кластерное свойство: для любых $A, B, C \in \mathfrak{A}$

$$\inf_{A' \in \text{Co Orb}_G A} |\omega(CA'B) - \omega(A)\omega(CB)| = 0. \quad (3.62)$$

Понятно, что подобное свойство можно также сформулировать и по образцу формул (3.60), (3.61), чего мы не делаем ради краткости изложения.

Двухэлементные свойства (3.59) и (3.60) могут иметь место для любых C^* -динамических систем без всяких ограничений на группу G (в классе локально компактных некомпактных групп) или на асимптотическое поведение автоморфизмов α_g . Они несут ограничения только на состояние ω . Именно, согласно [[БР, теорема 4.3.22]], для произвольной группы G и любого G -инвариантного состояния ω свойства (3.59) и (3.60) (а в случае аменабельной группы и (3.61)) эквивалентны между собой и эквивалентны свойству $\dim \mathcal{H}_{0, \omega} = 1$. (Доказательства этих эквиваленций получаются несложным применением эргодической теоремы Алаог-

лу — Биркгофа.) В случае, когда система $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ не является G -абелевой, последнее свойство, вообще говоря, только достаточно, но не необходимо для эргодичности ω , и мы получаем вывод: слабое кластерное свойство состояния является равносильным единственности инвариантного вектора в пространстве соответствующего представления, но, вообще говоря, более сильным, чем свойство эргодичности состояния. Для G -абелевых систем это свойство становится равносильно эргодичности состояния, а для систем с большой группой симметрии оно равносильно и всем условиям предложения 3.39. Что же касается трехэлементного свойства (3.62), то для произвольной системы оно является более сильным требованием, нежели двухэлементное свойство, но для систем, обладающих свойствами асимптотической абелевости, а также в случае точных состояний эти свойства становятся эквивалентными [[БР, с. 405—406]]; см. также [DKKR, теорема 4].

Как видно из (3.59) — (3.62), все слабые кластерные свойства отличаются тем, что к факторизованному состоянию $\omega(A) \omega(B)$ или $\omega(\alpha_g(A)) \omega(B)$ стремятся не сами величины $\omega(\alpha_g(A) B)$, а только их некоторые выпуклые комбинации по параметрам группы G или же некоторые интегралы от них по группе G , если эта группа является аменабельной. В отличие от этого, сильные кластерные свойства, к которым мы сейчас перейдем, дают сходимость (по g) самих последовательностей $\omega(\alpha_g(A) B)$, но при каких-либо дополнительных условиях на группу G или на асимптотику автоморфизмов α_g . С аналогичной ситуацией мы уже сталкивались при изучении формул для проектора $E_{0,\omega}$ на подпространство всех G -инвариантных векторов представления π_ω : "слабые" формулы (3.49) и (3.50) были получены для произвольных групп, тогда как "сильная" формула (3.7) выведена лишь при довольно специальных условиях.

Обычно принимается следующая формулировка сильного кластерного свойства [KR, с. 159]: состояние ω C^* -динамической системы (вообще говоря, не предполагаемое G -инвариантным) называется *сильно кластерным*, если для некоторой направленности $\{g_\gamma\} \subset G$ и для любых $A, B \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{\gamma} |\omega(\alpha_{g_\gamma}(A) B) - \omega(\alpha_{g_\gamma}(A)) \omega(B)| = 0. \quad (3.63)$$

Из этой формулировки очевидно, что всякое G -инвариантное сильно кластерное состояние является и слабо кластерным в смысле (3.59) или (3.60). (Очевидно также, что для всякого неинвариантного, но сильно кластерного состояния имеет место обобщение слабого кластерного свойства, получаемое из (3.59) или (3.60) заменой $\omega(A)$ на $\omega(A')$ или соответственно на $\omega(\alpha_g(A_\gamma))$.) Класс состояний и систем, обладающих свойством (3.63), определяет следующий результат [[Р, с. 242; БР, пример 4.3.24]]. Пусть $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ — C^* -динамическая система, являющаяся слабо асимптотически абелевой или же асимптотически абелевой по Стермеру. Тогда каждое факторное состояние ω на $\mathfrak{A}$ является сильно кластерным. (Однако при этом для систем, асимптотически абелевых по Стермеру, направленность $\{g_\gamma\}$ в (3.62), вообще говоря, будет также зависеть от A ; в качестве нее, в частности, можно взять $\{g_\gamma\} = \{g_n(A)\}$ из (3.55).) Было показано также [KR, § 6], что обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т.е. сильная кластерность состояния является лишь необходимым, но не достаточным условием его факторности.

Для G -инвариантных состояний сильное кластерное свойство принимает особенно простой вид

$$\lim_{\gamma} \omega(\alpha_{g_{\gamma}}(A)B) = \omega(A) \omega(B) \quad (3.64)$$

для некоторой направленности $\{g_{\gamma}\} \subset G$. Если система асимптотически абелева по Стермеру, а состояние ω удовлетворяет следующему дополнительному условию:

$$\mathcal{L}_{\omega} = \mathcal{L}_{\omega} \cap U_{\omega}(G)',$$

то сильное кластерное свойство (3.64) оказывается не только необходимым, но и достаточным условием факторности ω [Stø1, следствие 5.5], а поскольку $\mathcal{L}_{\omega} \cap U_{\omega}(G)' = R_{\omega} \cap R_{\omega}^{(T)'}'$, то из предложения 3.39 мы видим, что в этом случае оба указанных свойства равносильны еще и эргодичности ω , всем другим условиям предложения 3.39, а с учетом сказанного выше также и слабому кластерному свойству (3.60).

Свойства типа (3.64) могут возникать и в отсутствие асимптотической абелевости на базе некоторых специальных свойств группы G и рассматриваемого класса ее представлений. Именно, допустим, что группа G и G -инвариантное состояние ω таковы, что имеет место усиление "эргодических" представлений вида (3.49) и (3.50), аналогичное полученному выше для группы трансляций (предложение 3.36):

$$E_{0,\omega} = w\text{-}\lim_{\gamma} U_{\omega}(g_{\gamma}). \quad (3.65)$$

Тогда немедленно получаем: для всех $A, B \in \mathfrak{A}$ и любого $\omega \in S_{\text{inv}}$

$$\lim_{\gamma} \omega(\alpha_{g_{\gamma}}(A)B) = \omega(AE_{0,\omega}B), \quad (3.66)$$

и если, кроме того, $\dim \mathcal{H}_{0,\omega} = 1$, то, с учетом G -инвариантности ω ,

$$\lim_{\gamma} \omega(\alpha_{g_{\gamma}}(A)B) = \omega(A) \omega(B).$$

Таким образом, если справедлива усиленная форма (3.65) представления для проектора $E_{0,\omega}$, то единственность G -инвариантного вектора ($\dim \mathcal{H}_{0,\omega} = 1$) влечет сильное кластерное свойство (3.64). Но это свойство, являясь прямым усилением слабого кластерного свойства (3.60), в силу вышеприведенной теоремы [[БР, теорема 4.3.22]] (см. с. 96) в свою очередь влечет $\dim \mathcal{H}_{0,\omega} = 1$. В итоге в рассмотренной ситуации, за счет специальных особенностей групповой структуры, сильное и слабое кластерные свойства снова оказываются эквивалентными между собой, а также эквивалентными единственности G -инвариантного вектора (и влекут эргодичность состояния).

Известны два конкретных случая, когда такая ситуация реализуется. И в том и в другом случаях выполнение ключевого условия (3.65) достигается за счет того, что представление π_{ω} ковариантно по отношению не только к группе G , но и к более широкой группе $\tilde{G} \supset G$, являющейся полупрямым произведением G и некоторой группы G_1 , так что $U_{\omega}(g) = \tilde{U}_{\omega}(g, 1_1)$ (где $\tilde{U}_{\omega}$ — представление $\tilde{G}$ в $\mathcal{H}_{\omega}$, 1_1 — единичный элемент группы G_1); и эта расширенная ковариантность обеспечивает дополнитель-

ные свойства унитарной группы U_ω , нужные для (3.65). Каковы именно эти дополнительные свойства, мы видели при доказательстве предложения 3.36, где (3.65) было установлено для случая, когда $G = \hat{M}$, $\tilde{G} = \mathcal{P}_+^\uparrow$, $G_1 = L_+^\uparrow$. Это — первый из упомянутых нами двух случаев. Во втором случае, весьма сходном, $G = \hat{\mathbf{R}}^n$ (группа трансляций евклидова пространства $\mathbf{R}^n$), $\tilde{G} = \mathbf{E}^n$ (группа движений $\mathbf{R}^n$), $G_1 = O(n)$ (группа вращений в $\mathbf{R}^n$). Доказательство представления (3.65) для этого случая, данное Робинсоном и Рюэлем [RoR], изложено в [[БР, пример 4.3.25]].

Таким образом, мы видим, что для системы $(\mathfrak{A}, \hat{M}, \alpha_a)$ применимы оба способа получения сильного кластерного свойства (3.64). Они, однако, дают не совсем одинаковые результаты. Если мы исходим из свойств асимптотической абелевости, то, сравнивая (3.57) и (3.55), сразу получаем: система $(\mathfrak{A}, \hat{M}, \alpha_a)$ является асимптотически абелевой по Стермеру, причем последовательностью $\{g_n(A)\}$ в (3.55) может служить любая последовательность $\{a_n\} \subset \hat{M}$, уходящая на бесконечность в пространственноподобной области ($|a| \rightarrow \infty$, $a^2 < 0$). Соответственно для любой такой последовательности и любого факторного состояния ω имеет место кластерное свойство (3.63); если же ω , кроме того, $\hat{M}$ -инвариантно, то имеет место (3.64). (При этом, как мы замечали, будет выполняться и свойство $\dim \mathcal{H}_{0,\omega} = 1$.) Если же мы исходим не из асимптотической абелевости, а из представления (3.65) для $P_{0,\omega}$, то получаем (3.64) для иного класса направленностей $\{a_\gamma\} \subset \hat{M}$: $a_\gamma = \gamma e$, $\gamma \in \mathbf{R}$, e — произвольный 4-вектор. (Условия же на ω таковы: $\omega \in S_{\text{inv}}^{(\hat{M})}$, $\dim \mathcal{H}_{0,\omega} = 1$.) Таким образом, как заметил впервые Мейсон [Ma], на данном пути мы устанавливаем сильную кластерность состояния не только для пространственноподобных, но и для любых направлений, однако при менее общем способе стремления к бесконечности (направление e должно оставаться фиксированным: это существенно используется в доказательстве предложения 3.36). Естественно ожидать, что обобщение кластерного свойства на времениподобные направления должно повлечь какие-либо следствия для структуры локальной квантовой теории, однако до сих пор такие следствия не изучались.

Пользуясь тем, что для всякого G -инвариантного состояния

$$\omega(\alpha_{g_1}(A_1) \alpha_{g_2}(A_2)) = \omega(\alpha_{g_1 g_2^{-1}}(A_1) A_2) \quad \forall A_1, A_2 \in \mathfrak{A}, \quad (3.67)$$

и выбирая направленности $\{g_\gamma^{(i)}\} \subset G$, $i = 1, 2, \dots$, такие, что при $i \neq k$ для всякой направленности $g_\gamma^{(i)} (g_\gamma^{(k)})^{-1}$ имеет место свойство (3.64), нетрудно вывести по индукции следующее многоэлементное обобщение этого свойства:

$$\lim_{\gamma} \omega(\alpha_{g_\gamma^{(1)}}(A_1) \dots \alpha_{g_\gamma^{(n)}}(A_n)) = \omega(A_1 E_{0,\omega} A_2 \dots E_{0,\omega} A_n) \quad (3.68)$$

[[БР, с. 408]]. Другое обобщение можно получить по образцу трехэлементного слабого свойства (3.62): очевидно, что "сильным аналогом" такого свойства в записи для направленностей будет

$$\lim_{\gamma} \omega(C \alpha_{g_\gamma}(A) B) = \omega(A) \omega(CB). \quad (3.69)$$

Ниже мы дадим вывод этого свойства в случае группы трансляций.

Весьма тесным образом с кластерными свойствами состояния ω связаны асимптотические свойства (по групповым параметрам) элементов $\alpha_g(A)$ в представлении π_ω . Такие свойства часто эксплуатируются в локальной квантовой теории, так что удобно ввести для них специальные названия.

О п р е д е л е н и е 3.7. Будем говорить, что в представлении π_ω C^* -динамической системы $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ имеет место:

слабое асимптотическое свойство, если для всех $A \in \mathfrak{A}$

$$w\text{-}\lim_{\gamma} [\pi_\omega(\alpha_g(A_\gamma)) - \omega(A_\gamma) I_\omega] = 0 \quad (3.70)$$

(где $\{A_\gamma\}$ — некоторая направленность из множества $\text{CoOrb}_G A$, I_ω — единичный оператор в $\mathcal{H}_\omega$);

сильное асимптотическое свойство, если для всех $A \in \mathfrak{A}$ и некоторой направленности $\{g_\gamma\} \subset G$

$$w\text{-}\lim_{\gamma} [\pi_\omega(\alpha_{g_\gamma}(A)) - \omega(\alpha_{g_\gamma}(A)) I_\omega] = 0. \quad (3.71)$$

Как мы уже видели на примере кластерных свойств, а также представлений для проектора $E_{0,\omega}$, если группа симметрии G аменабельна, то усреднение по выпуклой оболочке G -орбиты обычно производится с помощью интегралов по группе; т.е., в частности, для ω слабое асимптотическое свойство можно формулировать в виде

$$w\text{-}\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^4} \int_{|a^\mu| \leq L} d^4 a (\pi_\omega(A(a)) - \omega(A(a)) I_\omega) = 0.$$

Из данных определений ясно, что "асимптотическое свойство" немедленно влечет соответствующее кластерное свойство: поскольку умножение в $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ непрерывно в слабой операторной топологии, то, домножая выражение для слабого (сильного) асимптотического свойства справа на произвольный элемент $\pi_\omega(B)$, $B \in \mathfrak{A}$, и учитывая векторность ω в представлении π_ω , мы сразу получаем из этого выражения слабое (сильное) кластерное свойство. Что касается обратного, т.е. возможности вывода асимптотических свойств из кластерных, то сразу очевидна эквивалентность асимптотического свойства и соответствующего трехэлементного кластерного свойства. Возьмем, например, слабое свойство: пусть для всех $A, B, C \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{\gamma} [\omega(C \alpha_g(A_\gamma) B) - \omega(\alpha_g(A_\gamma)) \omega(CB)] = 0. \quad (3.72)$$

Тогда, поскольку в представлении π_ω $\omega = \omega_\Omega$, где вектор $\Omega \in \mathcal{H}_\omega$ циклический для $\pi_\omega(\mathfrak{A})$, (3.72) немедленно дает (3.70). Верно и обратное: трехэлементное кластерное свойство следует из асимптотического свойства (3.70) так же, как и двухэлементное, нужно лишь дополнительно умножить (3.70) слева на $\pi_\omega(C)$, $C \in \mathfrak{A}$. Столь же тривиально проверяется, что трехэлементное сильное кластерное свойство (ср. (3.69))

$$\lim_{\gamma} [\omega(C \alpha_{g_\gamma}(A) B) - \omega(\alpha_{g_\gamma}(A)) \omega(CB)] = 0,$$

эквивалентно сильному асимптотическому свойству (3.71). Таким образом, первые элементарные выводы таковы: асимптотическое свойство

всегда влечет соответствующее кластерное свойство; оно всегда эквивалентно соответствующему трехэлементному кластерному свойству; наконец, оно эквивалентно кластерному свойству тогда и только тогда, когда двухэлементное кластерное свойство эквивалентно трехэлементному. Эта последняя эквиваленция в большинстве типичных ситуаций также имеет место, но здесь уже требуется рассматривать сильные и слабые свойства отдельно.

В случае слабых свойств сначала заметим, что слабое асимптотическое свойство, подобно аналогичному кластерному, используется, как правило, в представлениях π_ω , $\omega \in S_{inv}$, когда оно принимает вид

$$\omega\text{-}\lim_{\gamma} \pi_\omega(\alpha_g(A_\gamma)) = \omega(A) I_\omega. \quad (3.73)$$

Связи этого свойства как с кластерными, так и с другими свойствами C^* -динамической системы ясно и полно показывает следующий результат ([Э, гл. 2, теорема 8]); ср. также [DKS, теорема 3; DKKR, теорема 4a]):

Для G -абелевой C^* -динамической системы слабое асимптотическое свойство (3.73) G -инвариантного состояния ω эквивалентно слабому кластерному свойству (3.60) и, следовательно, эквивалентно также эргодичности ω , одномерности G -инвариантного подпространства $\mathcal{H}_{0,\omega}$ и всем другим необходимым и достаточным условиям эргодичности (см. предложение 3.39).

Отсюда уже понятно, что в общей теории асимптотически абелевых систем чаще всего рассматриваются именно слабые асимптотические свойства, поскольку они присущи всем эргодическим состояниям, тогда как сильные асимптотические свойства требуют для своего получения каких-либо дополнительных условий. Напротив, в рамках локальной квантовой теории слабые свойства совсем не употребляются, поскольку, как мы увидим сейчас, нужные дополнительные условия (при $G = \hat{M}$) здесь выполнены автоматически, так что всегда наличествуют сильные асимптотические свойства. Последние активно применяются в локальной квантовой теории, и мы рассмотрим их несколько подробнее.

Предложение 3.41. *Каждое из следующих условий влечет за собой сильное асимптотическое свойство (3.71):*

- 1) C^* -система асимптотически абелева по Стермеру и состояние ω сильно кластерно;
- 2) C^* -система асимптотически абелева по Стермеру и состояние ω факторно;
- 3) состояние ω является точным и сильно кластерным.

Доказательство. Пусть система $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ асимптотически абелева по Стермеру, и $\{g_n\} = \{g_n(A)\}$ — соответствующая последовательность в (3.55). Для произвольного $A \in \mathcal{A}$ рассмотрим множество ограниченных операторов в $\mathcal{H}_\omega$:

$$\{\pi_\omega(\alpha_{g_n}(A)) - \omega(\alpha_{g_n}(A)) I_\omega\}_{n=1}^\infty. \quad (3.74)$$

Поскольку это множество ограничено по норме:

$$\begin{aligned} \|\pi_\omega(\alpha_g(A)) - \omega(\alpha_g(A)) I_\omega\| &\leq \\ &\leq \|\pi_\omega(\alpha_g(A))\| + |\omega(\alpha_g(A))| \leq 2 \|A\| \end{aligned}$$

(ибо всякий гомоморфизм C^* -алгебры не увеличивает нормы, а всякий ее автомор-

физм изометричен), оно слабо компактно, и существуют подпоследовательности индексов n_k , $k = 1, 2, \dots$, для которых подпоследовательности операторов слабо сходятся, т.е.

$$w\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} [\pi_{\omega}(\alpha_{g_{n_k}}(A)) - \omega(\alpha_{g_{n_k}}(A)) I_{\omega}] = C, \quad (3.75)$$

где C — ограниченный оператор в $\mathcal{H}_{\omega}$, зависящий, вообще говоря, от A и от последовательности $\{n_k\}$. Для вывода сильного асимптотического свойства достаточно показать, что $C = 0$: в самом деле, тогда оператор C не зависит от подпоследовательности n_k и 0 есть единственная слабая предельная точка последовательности (3.74); отсюда вся эта последовательность слабо сходится к 0 .

Сначала покажем, что $C \in \mathcal{Z}_{\omega}$. Поскольку представление π_{ω} непрерывно по норме $\mathfrak{A}$, в силу асимптотической абелевости по Стермеру, для всех $B \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|[(\pi_{\omega}(\alpha_{g_n}(A)) - \omega(\alpha_{g_n}(A)) I_{\omega}), \pi_{\omega}(B)]\| = 0.$$

Отсюда для любого $\epsilon > 0$ и любого набора $\Phi_1, \dots, \Phi_k, \Psi_1, \dots, \Psi_k$ единичных векторов из $\mathcal{H}_{\omega}$ найдется достаточно большое N такое, что для всех $n > N$ и всех $i = 1, \dots, k$

$$|(\Phi_i([C, \pi_{\omega}(B)] - [(\pi_{\omega}(\alpha_{g_n}(A)) - \omega(\alpha_{g_n}(A)) I_{\omega}), \pi_{\omega}(B)]) \Psi_i)| < \epsilon/2$$

и, кроме того,

$$\|[(\pi_{\omega}(\alpha_{g_n}(A)) - \omega(\alpha_{g_n}(A)) I_{\omega}), \pi_{\omega}(B)]\| < \epsilon/2.$$

В совокупности эти неравенства дают

$$|(\Phi_i, [C, \pi_{\omega}(B)] \Psi_i)| < \epsilon \quad \forall i = 1, \dots, k,$$

и поскольку здесь $\epsilon, k, \Phi_i, \Psi_i$ произвольны, то $[C, \pi_{\omega}(B)] = 0$ и $C \in R'_{\omega}$. То, что $C \in R_{\omega}$, ясно из определения.

Допустим теперь, что ω сильно кластерно, причем в (3.63) можно взять $\{g_{\gamma}\} = \{g_n(A)\}$. Тогда для подпоследовательности $\{n_k\}$ в (3.75) имеем: если Ω — циклический вектор в $\mathcal{H}_{\omega}$, отвечающий состоянию ω , то для всех $B \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\Omega, [\pi_{\omega}(\alpha_{g_{n_k}}(A)) - \omega(\alpha_{g_{n_k}}(A)) I_{\omega}] \pi_{\omega}(B) \Omega) = 0. \quad (3.76)$$

Сравнение этой формулы с (3.75) дает

$$(\Omega, C \pi_{\omega}(B) \Omega) = 0,$$

откуда, выбирая $B = B_1^* B_2$ с произвольными $B_1, B_2 \in \mathfrak{A}$ и учитывая, что $C \in R'_{\omega}$, а множества векторов $\pi_{\omega}(B_1) \Omega$ и $\pi_{\omega}(B_2) \Omega$ плотны в $\mathcal{H}_{\omega}$, получаем искомое: $C = 0$.

Равным образом, если предположить факторность ω , то $C = \lambda I_{\omega}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, и (3.75) дает

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\Omega, [\pi_{\omega}(\alpha_{g_{n_k}}(A)) - \omega(\alpha_{g_{n_k}}(A)) I_{\omega}] \Omega) = 0 = (\Omega, C \Omega) = \lambda,$$

так что снова $C = 0$.

Наконец, если состояние ω является точным, то соответствующий ему циклический вектор $\Omega \in \mathcal{H}_{\omega}$ есть тотализатор для R'_{ω} . Если же, кроме того, ω сильно кластерно, то имеет место (3.76), где в силу цикличности Ω для $\pi_{\omega}(\mathfrak{A})$ вектор $\pi_{\omega}(B) \Omega$ можно заменить любым $\Phi \in \mathcal{H}_{\omega}$. Выбирая, в частности, векторы вида $\Phi = T^* \Psi$, $T \in R'_{\omega}$ (и замечая, что вместо подпоследовательности g_{n_k} теперь можно взять и всю последовательность g_n), из (3.76) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(T \Omega, [\pi_{\omega}(\alpha_{g_n}(A)) - \omega(\alpha_{g_n}(A)) I_{\omega}] \Psi)| = 0,$$

что в силу плотности множества $R'_{\omega} \Omega$ дает сильное асимптотическое свойство. (Отсюда, кстати, мы имеем и доказательство сделанного выше замечания: если состояние ω точно, то двухэлементное кластерное свойство равносильно трехэлементному.) $\square$

Понятно, что все достаточные условия предложения 3.41 справедливы и в случае G -инвариантного состояния, когда сильное асимптотическое свойство имеет вид

$$w\text{-}\lim_{\gamma} \pi_{\omega}(\alpha_{g_{\gamma}}(A)) = \omega(A) I_{\omega}. \quad (3.77)$$

Небольшое дополнение к этим условиям можно получить, вспомнив, что сильное кластерное свойство вытекает также из представления (3.65) для проектора $E_{0,\omega}$ — и в этом случае оно справедливо для всех направленностей $\{g_{\gamma}\}$, для которых имеет место данное представление. Действительно, с учетом сказанного, сильное асимптотическое свойство также возможно получить для всех направленностей, для которых справедливо (3.65), если только при выводе этого свойства мы не используем, помимо жильной кластерности, еще и свойств асимптотической абелевости. Именно такой способ вывода дает условие 3 предложения 3.41, так что мы получаем

С л е д с т в и е. Пусть группа G и G -инвариантное состояние ω таковы, что имеет место представление (3.65). Пусть, кроме того, состояние ω точно, а G -инвариантное подпространство $\mathcal{H}_{0,\omega}$ одномерно. Тогда для любой направленности $\{g_{\gamma}\}$, удовлетворяющей (3.65), имеет место сильное асимптотическое свойство (3.77).

Как мы уже замечали, в случае группы трансляций $\hat{M}$ условие (3.65) позволяет получить сильное кластерное свойство для произвольного направления в пространстве Минковского. Теперь мы видим, что это же справедливо и для сильного асимптотического свойства. Однако, к сожалению, класс состояний ω , обладающих сильным асимптотическим свойством по всем направлениям, существенно сужается за счет дополнительного условия точности состояния.

Завершив рассмотрение кластерных и асимптотических свойств, целесообразно свести воедино итоги этого рассмотрения применительно к группе трансляций в локальной квантовой теории.

Т е о р е м а 3.42. Пусть задана теория Хаага–Араки или Хаага–Кастлера, удовлетворяющая аксиомам III, V. Тогда:

А. Состояния теории обладают следующими кластерными свойствами:

1) любое факторное состояние ω является сильно кластерным для пространственноподобных направлений: для всех $A, B \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} |\omega(A(a)B) - \omega(A(a))\omega(B)| = 0; \quad (3.78)$$

2) любое трансляционно инвариантное состояние ω такое, что $\dim \mathcal{H}_{0,\omega} = 1$ является сильно кластерным по любому фиксированному направлению: для всякого $e \in M$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \omega(A(\lambda e)B) = \omega(A)\omega(B); \quad (3.79)$$

3) справедливо трехэлементное сильное кластерное свойство: для всех $A, B, C \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} |\omega(CA(a)B) - \omega(A(a))\omega(CB)| = 0,$$

если состояние ω факторно;

4) имеют место многоэлементные кластерные свойства: для всех $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{\substack{|a_i - a_j| \rightarrow \infty \\ (a_i - a_j)^2 < 0}} \omega(A_1(a_1) \dots A_n(a_n)) = \omega(A_1) \dots \omega(A_n),$$

если ω трансляционно инвариантно и факторно, и

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \rightarrow \infty \\ \lambda_i / \lambda_{n-1} = \text{const}}} \omega(A_1(\lambda_1 e_1) \dots A_n(\lambda_n e_n)) = \omega(A_1) \dots \omega(A_n)$$

(векторы $e_1, \dots, e_n$ произвольны), если ω трансляционно инвариантно и таково, что $\dim \mathcal{H}_{0, \omega} = 1$.

Б. Состояния теории обладают следующими асимптотическими свойствами:

1) в любом факторном представлении π_ω выполнено сильное асимптотическое свойство для пространственноподобных направлений:

$$w\text{-}\lim_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} [\pi_\omega(A(a)) - \omega_1(A(a)) I_\omega] = 0,$$

где ω_1 — любое состояние, векторное в представлении π_ω ;

2) в любом факторном представлении π_ω , отвечающем $\hat{M}$ -инвариантному состоянию, имеет место сильное асимптотическое свойство вида

$$w\text{-}\lim_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} \pi_\omega(A(a)) = \omega(A) I_\omega.$$

Доказательство. Асимптотические свойства в п. Б имеют место в силу предложения 3.41, с учетом следствия 3 предложения 3.37. Трехэлементное кластерное свойство А3, как было показано, эквивалентно асимптотическому свойству Б1 и, очевидно, влечет двухэлементное кластерное свойство (3.78). Свойство (3.79) уже было доказано. Многоэлементные кластерные свойства А4 вытекают соответственно из (3.78) и (3.79); ограничение на способ стремления параметров λ_i к бесконечности понятно из (3.65) и $\lambda_i e_i - \lambda_{i-1} e_{i-1} = \lambda_{i-1} ((\lambda_i / \lambda_{i-1}) e_i - e_{i-1})$. $\square$

Стоит отметить, что наиболее сильное из утверждений этой теоремы, асимптотическое свойство Б1, было получено Араки [А5] еще в 1964 г., до появления теории асимптотически абелевых систем. На раннем этапе локальной квантовой теории вывод и применение различных кластерных и асимптотических свойств по отношению к трансляциям пространства-времени были известны как "метод больших трансляций". В более узком смысле под этим названием понимали способ или, точнее сказать, гипотетическую возможность получать из произвольной теории Хаага—Араки теорию с непустым вакуумным подпространством $\mathcal{H}_0$, используя для этой цели предел бесконечно больших пространственноподобных трансляций. Идея такой конструкции была предложена в 1963 г. Борхерсом, Хаагом и Шроером [BHS], которые, резюмируя ранние исследования Хаага, Араки, Рюэля и др. (см. например, [H1; AHR; Ru1]), отметили следующее обстоятельство: если в теории Хаага—Араки существует предел типа

$w\text{-}\lim_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} A(a)$, то получаемый в этом пределе оператор $C(A)$ должен лежать

в центре глобальной алгебры R , кроме того, $C(A)$ должен быть линейным, коммутирующим с трансляциями, и положительным при положительных A . (Все эти факты проверяются весьма просто с помощью таких же рассуждений, как в доказательстве предложения 3.41.) Соответственно, если алгебра R — фактор, то, допустив существование указанного предела для всех квазилокальных операторов $A \in \mathfrak{A}$, мы получим

$$w\text{-}\lim_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} A(a) = \omega_0(A) I, \quad (3.80)$$

где ω_0 — трансляционно инвариантное состояние на $\mathfrak{A}$. Таким образом, доказав существование предела в (3.80), мы в итоге установили бы: всякой теории Хаага—Араки, где алгебра R — фактор (а затем, с помощью центрального разложения, и полностью произвольной теории), возможно сопоставить посредством явной асимптотической процедуры (3.80) теорию, обладающую вакуумным состоянием. А если бы еще удалось и показать, что выполнение аксиом Хаага—Араки в исходной теории влечет за собой их выполнение в новой теории, определяемой вакуумом ω_0 , этим было бы дано исчерпывающее решение проблемы о статусе "вакуумного постулата" в локальной квантовой теории (ср. обсуждение на с. 25—26).

Обозревая собранные выше результаты об асимптотических свойствах, мы можем, однако, заключить, что описанную программу пока не удалось реализовать. Ее критическим и недостигнутым пунктом оказывается самый начальный: доказательство существования предела в (3.80). Ясно, что все результаты теории асимптотически абелевых систем, собранные в теореме 3.42, еще намного слабее соотношения (3.80). Сильное асимптотическое свойство Б2 по виду совпадает с (3.80), однако трансляционно инвариантное состояние ω не строится там, а предполагается заданным, и существование слабого предела по трансляциям доказывается лишь в пространстве $\mathcal{H}_\omega$ с $\mathcal{H}_{0,\omega} \neq \{0\}$. Асимптотическое свойство Б1 получено для произвольной теории, в том числе и не имеющей вакуумного подпространства; однако, в отличие от (3.80), существование слабого предела устанавливается в нем не для самих операторов $\pi_\omega(A(a))$, а только для разностей $\pi_\omega(A(a)) - \omega_1(A(a))I$, что еще не дает возможности определить вакуумное состояние ω_0 . Отсюда мораль очевидна: в отличие от изложенных фактов, соотношение (3.80) уже не принадлежит к числу общих утверждений теории асимптотически абелевых систем. Вывод его, если таковой возможен, требует более глубокого учета конкретных структур локальной квантовой теорий. Это подтверждается недавними результатами: свойство типа (3.80) удастся получить, предполагая существование локального сохраняющегося тока [BF 2] или локализованных заряженных состояний [BF 3, ср. § 6], либо требуя, чтобы все положительные представления $\mathfrak{A}$ были типа I [Bor 1] (ср. предложение 3.46 и с. 146).

* *

*

До сих пор все рассмотренные нами свойства трансляционных автоморфизмов не принимали в расчет постулата спектральности. Следствия этого постулата не столь многочисленны, но весьма важны. Центральное место

среди них занимает хорошо известная теорема Борхерса о том, что операторы трансляций $T(a)$ в теории Хаага—Араки можно без ограничения общности считать принадлежащими глобальной алгебре R . В частном случае теории Хаага—Араки с циклическим вакуумным подпространством $\mathcal{H}_0$ эта теорема имеет очень простое доказательство, полученное еще в 1964 г. Араки [A5]. Общий случай, однако, требует привлечения более современных математических средств, нежели те, какими нам пока удавалось обходиться. Существует несколько вариантов доказательства теоремы Борхерса; в более ранних и более громоздких [B7; DA1] использовался аппарат дифференцирований на алгебрах фон Неймана, позднейшие же опираются на спектральную теорию Арвесона для представлений групп в банаховых пространствах. Эта теория представляет собой обобщение давно привычной для физиков спектральной теории унитарных представлений групп, в центре которой находится теорема Стоуна или ее обобщенная форма, теорема ШНАГ [[CB]], на представления групп автоморфизмами C^* - или W^* -алгебр. С точки зрения формализма локальной квантовой теории такое обобщение вполне целесообразно и естественно. В самом деле, свойства симметрии квантовополевых систем и в том числе релятивистские симметрии, описываются в этом формализме именно автоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$ или R ; даже и в теории Хаага—Араки, где аксиомы V, VI задают унитарное представление группы Пуанкаре в $\mathcal{H}$, предполагается, что это представление, вообще говоря, не является единственно возможным и при желании может быть заменено другим унитарным представлением, реализующим те же автоморфизмы алгебры $\mathfrak{A}$. Первичным объектом, непосредственно выражающим наличие физической симметрии, является, как правило, группа автоморфизмов квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$, или, иначе говоря, автоморфное представление группы симметрии G в банаховом пространстве $\mathfrak{A}$. В тех случаях, когда соответствующие автоморфизмы являются пространственными, физической симметрии отвечает также и унитарное представление G , но это представление обычно далеко не единственно: так, если унитарная группа V_t осуществляет автоморфизмы алгебры фон Неймана N , то те же автоморфизмы осуществляет и любая унитарная группа U_t такая, что для всех t $V_t U_t^* \in N'$. Для большинства вопросов эта неединственность не имеет значения, и мы можем работать, зафиксировав какое-либо из унитарных представлений, отвечающих данному автоморфному представлению. В случае теоремы Борхерса, однако, это не так: она рассматривает все множество унитарных представлений, реализующих одну и ту же группу автоморфизмов алгебры фон Неймана N , и утверждает, что в составе этого множества всегда найдется унитарное представление, лежащее в алгебре N . Теория автоморфных представлений и, в частности, спектральная теория Арвесона составляют естественный аппарат для данной теоремы. (С другой стороны, эта теория нигде более не встретится нам в этой книге, да и в самой теореме Борхерса ее понятия участвуют только в ходе доказательства, но не в формулировках конечных результатов. Более веским основанием к тому, чтобы уделить внимание теории Арвесона, служит другое: эта теория доставляет эффективный и современный аппарат для широкого круга теоретико-групповых проблем алгебраического подхода, таких, как отыскание условий унитарной порождаемости различных релятивистских и внутренних симметрий, изучение явлений спонтан-

ного нарушения и т.п. Ее отдельные применения к этой физической проблематике уже имеются (см., например, [Be; Ki; B16]), и следует ожидать, что число их будет расти.

В основе обобщения спектральной теории находится, естественно, обобщение понятия спектра представления. Сформулируем это обобщение. Пусть G – локально компактная абелева группа, $\hat{G}$ – двойственная группа, элементами которой служат характеры $\chi(t)$ группы G , $L^1(G)$ – групповая алгебра G , т.е. множество всех функций f на G , интегрируемых по мере Хаара ds (по поводу теоретико-групповых понятий, употребляемых в данном пункте, см., например, [[К, § 9 – 12]]), наделенное инволюцией:

$$f^*(t) = f(-t) \quad \forall t \in G$$

и умножением, определяемым как операция свертки:

$$(f \times g)(t) = \int_G ds f(t-s)g(s).$$

Группа $\hat{G}$ предполагается наделенной топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах G ; $L^1(G)$ рассматривается как банахова *-алгебра по отношению к норме пространства L^1 . Обобщенное преобразование Фурье переводит $L^1(G)$ во множество $C_1(\hat{G})$ всех непрерывных функций на $\hat{G}$, обращающихся в 0 на бесконечности:

$$f \in L^1(G) \rightarrow \hat{f}(\chi) = \int_G dt f(t)\chi(t) \in C_1(\hat{G}).$$

Далее, пусть X – банахово пространство, F – замкнутое по норме подпространство сопряженного пространства X^* и $\sigma(X, F)$ – топология на X , порождаемая функционалами из F (см., например, [[РС, т. 1, с. 131]]); пусть также $B_F(X)$ – множество линейных ограниченных операторов на X , непрерывных в $\sigma(X, F)$ -топологии. Представлением U группы G в пространстве X называется $\sigma(X, F)$ -непрерывный гомоморфизм $U: t \rightarrow U_t$ группы G в группу обратимых изометрических операторов из $B_F(X)$. (Можно развивать теорию и при более слабых условиях на операторы U_t , требуя лишь $\|U_t\| \leq M$ для всех $t \in G$; см. [[БР]].) Каждое такое представление порождает представление групповой алгебры $L^1(G)$ в $B_F(X)$, обозначаемое тем же символом U и определяемое формулой

$$U: f \in L^1(G) \rightarrow U(f) = \int_G dt f(t)U_t \in B_F(X),$$

откуда $U(f \times h) = U(f)U(h)$. Сопоставляя произвольному подмножеству $Z \subset X$ множество

$$I_Z^U = \{ f \in L^1(G) \mid U(f)A = 0 \quad \forall A \in Z \},$$

являющееся, как легко проверить, замкнутым *-идеалом в $L^1(G)$, можем сформулировать

Определение 3.8. Спектром (или же спектром Арвесона) представления U локально компактной абелевой группы G в банаховом пространстве X называется множество

$$\sigma(U) = \{ \chi \in \hat{G} \mid \hat{f}(\chi) = 0 \quad \forall f \in I_X^U \}.$$

Спектром (или же спектром Арвесона) произвольного подмножества $Z \subset X$ называется множество

$$\sigma_U(Z) = \{ \chi \in \hat{G} \mid \hat{f}(\chi) = 0 \quad \forall f \in I_Z^U \}.$$

Спектральным подпространством (или же спектральным M -подпространством), отвечающим подмножеству $K \subset \hat{G}$, называется множество

$$M^U(K) = \overline{\{ A \in X \mid \sigma_U(A) \subset K \}}^{\sigma(X, F)}.$$

Ассоциированным подпространством (или же спектральным R -подпространством),

отвечающим подмножеству $K \subset \hat{G}$, называется множество

$$R^U(K) = \overline{L\{A \in X \mid A = U(f)B, \quad B \in X, \quad \text{supp } \hat{f} \in K\}}^{\sigma(X, F)}.$$

В частном случае обычной спектральной теории для унитарных представлений локально компактных абелевых групп новые определения совпадают со стандартными. Так, если задана сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа $U_t, t \in \mathbb{R}$, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то по теореме Стоуна ей соответствует спектральное разложение

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipt} dE(p),$$

в терминах которого определяются спектр группы U_t :

$$\text{sp } U = \text{supp } E(p) \subset \mathbb{R},$$

и спектральные подпространства $\mathcal{H}_\Delta \subset \mathcal{H}$, отвечающие подмножествам $\Delta \subset \mathbb{R}$:

$$\mathcal{H}_\Delta = E(\Delta)\mathcal{H}.$$

В этом случае $X = F = \mathcal{H}$, $G = \hat{G} = \mathbb{R}$, $\chi(t) = \exp(ipt)$ и, как нетрудно проверить, спектр Арвесона совпадает с обычным спектром, $\sigma(U) = \text{sp } U$, и спектральные подпространства в новом и обычном определениях также совпадают:

$$M^U(\Delta) = E(\Delta)\mathcal{H}.$$

Дальнейшие сведения о теории Арвесона можно найти в [[БР, гл. 3.2]] и в [[Ре, гл. 8]].

Возвращаясь, наконец, к теореме Борхерса, замечаем, что для σ -слабо непрерывного представления группы G автоморфизмами алгебры фон Неймана N в определении 3.8 следует положить $X = N, F = N_*$. Уже и без особого углубления в теорию Арвесона с ее помощью оказывается возможным доказать теорему Борхерса для частного случая однопараметрической группы. Постулат спектральности в этом случае означает требование неотрицательности спектра унитарного представления данной группы.

Теорема Борхерса — Арвесона. Пусть $t \rightarrow \alpha_t, t \in \mathbb{R}$ — σ -слабо непрерывная однопараметрическая группа $*$ -автоморфизмов алгебры фон Неймана N в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) в $\mathcal{H}$ действует сильно непрерывная унитарная группа $U_t, t \in \mathbb{R}$, с неотрицательным спектром такая, что для всех $A \in N$ и $t \in \mathbb{R}$

$$\alpha_t(A) = U_t A U_t^*;$$

2) в $\mathcal{H}$ действует сильно непрерывная унитарная группа $V_t, t \in \mathbb{R}$, с неотрицательным спектром такая, что для всех $t \in \mathbb{R}$ $V_t \in N$, а для всех $A \in N$ и $t \in \mathbb{R}$

$$\alpha_t(A) = V_t A V_t^*;$$

$$3) \bigcap_{t \in \mathbb{R}} M^\alpha([t, \infty)) \mathcal{H} = \{0\},$$

где $M^\alpha(\Delta)$ — спектральные подпространства представления α .

Доказательство см. [[БР, с. 267–268]]; оно не требует, по существу, других фактов, помимо самых общих свойств спектра и спектральных подпространств, а также соотношений, связывающих между собой спектральные подпространства $M^\alpha(\Delta) \subset N$ автоморфного представления α и обычные спектральные подпространства $E_U(\Delta)\mathcal{H}, E_V(\Delta)\mathcal{H}$ унитарных представлений U и V .

Наиболее широкий класс групп, для которого установлена теорема Борхерса, составляют связные абелевы группы, могущие содержать в качестве подгрупп как группы $\hat{\mathbf{R}}^n$, так и компактные связные абелевы группы. При этом в случае представления U компактной группы G на спектр $\sigma(U)$ также налагается некоторое спектральное условие типа принадлежности конусу, определенного вида в дискретном пространстве $\hat{G}$; в случае же групп $\hat{\mathbf{R}}^n$ спектральное условие достаточно наложить в следующем весьма общем виде:

$$\sigma(U) \subset \Lambda,$$

где Λ — произвольное выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$, не содержащее целиком ни одной прямой [[Ре, гл. 8.4]]. Очевидно, что описанный класс групп и спектральных условий охватывает и группу трансляций в локальной квантовой теории с аксиомой спектральности, так что имеет место

Теорема 3.43 (теорема Борхерса). Пусть задана теория Хаага–Араки с глобальной алгеброй R , удовлетворяющая аксиомам V, VI. Тогда существует сильно непрерывное унитарное представление $\tilde{T}(a)$ группы трансляций, также удовлетворяющее аксиомам V, VI и такое, что $\tilde{T}(\hat{M}) \subset R$, а для всех $A \in R, a \in \hat{M}$

$$\tilde{T}(a) A \tilde{T}(-a) = T(a) A T(-a),$$

где $T(a)$ — исходное представление группы трансляций, заданное аксиомой V.

Доказательство. Утверждение теоремы есть частный случай следствия 8.4.12 [[Ре, с. 322]]. $\square$

Следствие 1. Для любого вакуумного вектора $\Omega \in \mathcal{H}_0$

$$\mathcal{H}_{\Omega}^{R'} \subset \mathcal{H}_0, \quad \mathfrak{M}_{\Omega/\|\Omega\|}^R \subset \mathcal{H}_0.$$

Доказательство. Если представление $T(a)$ выбрано так, что $T(\hat{M}) \subset R$, то первое включение следует из

$$\mathcal{H}_{\Omega}^{R'} \subset \mathcal{H}_{\Omega}^{T(\hat{M})'} \subset \mathcal{H}_0,$$

а второе — из формулы $\mathfrak{M}_{\Omega/\|\Omega\|}^R \subset \mathcal{H}_{\Omega}^{R'}$, которая очевидна из (3.43). $\square$

Следствие 2. Операторы энергии-импульса $\hat{p}_{\mu}$ теории Хаага–Араки являются чисто глобальными наблюдаемыми.

Доказательство. Из свойств представления $\hat{T}(a)$ следует, что для него существуют самосопряженные генераторы $\hat{p}_{\mu}$, составляющие 4-вектор энергии-импульса и присоединенные к глобальной алгебре R . Как мы поясняли в § 2, естественно считать такие операторы, наряду с элементами R , также соответствующими физическим наблюдаемым. При этом в силу следствия 1 из предложения 3.37 операторы $\hat{p}_{\mu}$ не могут быть присоединенными ни к одной из алгебр $R(O)$, $O \in B(M)$, так что они заведомо не принадлежат к локальным наблюдаемым.

Отметим здесь же и еще одно простое, но важное свойство операторов $\hat{p}_{\mu}$ (оно было указано Кадисоном [К4], а приводимое нами элементарное доказательство — Борхерсом [В9]).

Предложение 3.44. Пусть задана теория Хаага–Араки, удовлетворяющая аксиомам II, V, VI. Тогда операторы энергии-импульса $\hat{p}_{\mu}$ не мо-

гут являться ограниченными операторами, а группа $T(a)$ не может быть равномерно непрерывной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если оператор $\hat{p}_0$ ограничен, то любой вектор $\Phi \in \mathcal{H}$ является для него аналитическим вектором, и в силу теоремы Рее–Шлидера для любой области $O \in B(M)$

$$\mathcal{H}_{\Phi}^{R(O)} = \mathcal{H}_{\Phi}^R.$$

Если это верно для всех $\Phi \in \mathcal{H}$, то множества всех циклических проекторов алгебр $R(O)$ и R , а значит, и сами эти алгебры совпадают между собой, что противоречит лемме 3.10. В силу релятивистской ковариантности неограниченность $\hat{p}_0$ влечет и неограниченность остальных компонент 4-вектора $\hat{p}_{\mu}$, равносильную [[БР, с. 170]] последнему утверждению предложения. $\square$

В частном случае теории с циклическим вакуумным подпространством утверждение теоремы 3.43 усиливается: в алгебре R должно лежать любое представление $T(a)$, удовлетворяющее аксиомам V, VI.

П р е д л о ж е н и е 3.45 [A5]. В теории Хаага–Араки, удовлетворяющей аксиомам V, VI, а также условию $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_0}^R = \mathcal{H}$, имеет место свойство $T(\hat{M}) \subset R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольных операторов $A \in R$ и $B \in R'$, с учетом свойств $T(a)P_0 = P_0$ и

$$[A, B(a)] = T(a)[A(-a), B]T(-a) = 0,$$

при любом $\Phi \in \mathcal{H}$ имеем

$$(\Phi, P_0 A T(a) B P_0 \Phi) = (\Phi, P_0 B T(-a) A P_0 \Phi). \quad (3.81)$$

В силу спектральности левая (правая) часть этого равенства есть фурье-образ комплексной меры с носителем в $\bar{V}^+$ (соответственно $\bar{V}^-$); поскольку же равенство справедливо при всех $a \in \hat{M}$, то каждая из этих мер может иметь носитель лишь в общей части $\bar{V}^+ \cap \bar{V}^- = \{0\}$. Фурье-образ такой меры есть константа, и с учетом этого, полагая $A = A_1^* A_2$, $A_1, A_2 \in R$, из (3.81) имеем

$$(A_1 P_0 \Phi, [B(a) - B] A_2 P_0 \Phi) = 0.$$

При $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_0}^R = \mathcal{H}$ это дает $B(a) = B$, откуда $T(a) \in R$. $\square$

Разумеется, из теоремы Борхерса следует, что все элементы из центра $\mathcal{Z}$ коммутируют с "внутренним" представлением трансляций $\tilde{T}(a)$, $\mathcal{Z} \subset \tilde{T}(\hat{M})'$. Можно доказать, однако, что $\mathcal{Z}$ коммутирует уже и с исходным представлением $T(a)$, вообще говоря, не лежащим в R ; иначе говоря, для любого представления $T(a)$, удовлетворяющего аксиомам V, VI, имеет место

$$T(\hat{M}) \subset \mathcal{Z}'.$$

Этот результат независим от теоремы Борхерса и составляет утверждение известной теоремы Араки [A5, предложение 1]; см. также [Jan]. Мы не станем приводить ее доказательство, поскольку в практических применениях теорема Борхерса всегда понимается как возможность с самого начала выбрать в теории Хаага–Араки $T(\hat{M}) = \tilde{T}(\tilde{M}) \subset R$, а при таком выборе теорема Араки делается тривиальной.

С учетом теоремы Борхерса (понимаемой указанным образом), целый ряд изложенных выше результатов усиливается либо упрощается, причем оказывается возможным извлечь и некоторые новые выводы. Прежде всего мы обнаруживаем, что наличие нетривиального вакуумного подпространства налагает сильные ограничения на структуру глобальной алгебры, за счет которых эта структура чрезвычайно приближается к структуре алгебр фон Неймана типа I и при довольно общих условиях совпадает с ней.

Предложение 3.46. Пусть задана теория Хаага–Араки, удовлетворяющая аксиомам III, V, VI и такая, что $\mathcal{H}_0 \neq \{0\}$. Тогда алгебры фон Неймана R_{P_0} и R'_{P_Ω} ($\Omega \in \mathcal{H}_0$) абелевы. Если вакуумное подпространство

$\mathcal{H}_0$ циклично для $\mathcal{Z}'$, то R и R' – алгебры типа I, а алгебра R_{P_0} изоморфна некоторой подалгебре R' . Если же существует циклический вакуумный вектор, то R' – абелева алгебра фон Неймана.

Доказательство. Первое утверждение при $T(\hat{M}) \subset R$ непосредственно следует из утверждений 2' и 3' предложения 3.38. Второе утверждение следует из первого: если $P_{\mathcal{H}_0}^{\mathcal{Z}'} = I$, то индукция $R' \rightarrow R'_{P_0}$ есть изоморфизм, так что R' изоморфна алгебре с абелевым коммутантом R_{P_0} , а заключительная часть утверждения ясна из $R_{P_0} \subset R'_{P_0}$. Последнее утверждение тривиально следует из первого. $\square$

Следствие [A5]. Пусть задано центральное разложение

$$R = \int^{\oplus} R_{\xi} d\nu(\xi), \quad \mathcal{H} = \int^{\oplus} \mathcal{H}_{\xi} d\nu(\xi),$$

глобальной алгебры теории Хаага–Араки, удовлетворяющей аксиомам III, V, VI. Тогда представление $T(a)$ и подпространство $\mathcal{H}_0$ данной теории также разложимы по мере ν :

$$T(a) = \int^{\oplus} T(a)_{\xi} d\nu(\xi), \quad \mathcal{H}_0 = \int^{\oplus} \mathcal{H}_{0,\xi} d\nu(\xi), \quad (3.82)$$

и в каждом пространстве $\mathcal{H}_{\xi}$ определена теория Хаага–Араки с глобальной алгеброй R_{ξ} , удовлетворяющая аксиомам III, V, VI. При этом для каждого ξ такого, что $\mathcal{H}_{0,\xi} \neq \{0\}$, R_{ξ} есть фактор типа I.

Доказательство. По определению центрального разложения (§ 1), разложимыми по мере ν являются все операторы из $\mathcal{Z}'$, так что (3.82) вытекает из $T(\hat{M}) \subset \mathcal{Z}'$, $P_0 \in \mathcal{Z}'$. Спектральная функция $E(p)$ представления $T(\hat{M})$ также разложима, причем, очевидно, $\text{supp } E(p)_{\xi} \subset \text{supp } E(p)$. Последнее утверждение очевидно из предложения 3.46. $\square$

Естественно, далее, что в случае $T(\hat{M}) \subset R$ приобретает новые особенности картина свойств эргодичности, или же, иными словами, картина взаимосвязей между свойствами единственности вакуума, его циклическости и неприводимости глобальной алгебры. Для произвольного представления π_{ω} , отвечающего инвариантному состоянию ω , эту картину описывает предложение 3.39. В рассматриваемом случае в его условиях оказывается

$$R_{\omega}^{(T)} = (\pi_{\omega}(\mathfrak{A}) \cup T_{\omega}(\hat{M}))'' = R_{\omega},$$

и мы получаем, что для любого трансляционно инвариантного состояния ω на $\mathfrak{A}$ эквивалентны следующие условия:

- 1) ω — эргодическое состояние;
- 2) ω — единственное нормальное инвариантное состояние на R_ω ;
- 3) ω — единственное векторное инвариантное состояние на R_ω ;
- 4) $\dim \mathcal{H}_{0,\omega} = 1$;
- 5) R_ω — фактор;
- 6) $R_\omega = \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$.

Отсюда, прежде всего, ясно, что в случае $T_\omega(\hat{M}) \subset R_\omega$ утрачивается различие между эргодичностью инвариантного состояния и его чистотой (эквиваленция 1 $\leftrightarrow$ 6) и, равным образом, между факторностью и чистотой (эквиваленция 5 $\leftrightarrow$ 6). Что же касается свойств единственности вакуума (вакуумного вектора), то в общем случае теории Хаага—Араки с $\mathcal{H}_0 \neq \{0\}$ возникает, как легко видеть, следующая цепочка:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} R = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ \mathcal{H}_0 \neq \{0\} \end{array} \right) &\iff \left(\begin{array}{l} \dim \mathcal{H}_0 = 1 \\ \mathcal{H}_\Omega^R = \mathcal{H} \end{array} \right) \Rightarrow \dim \mathcal{H}_0 = 1 \Rightarrow R_{P_\Omega^R} = \\ &= \mathcal{B}(\mathcal{H}_\Omega^R) \iff \dim(\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_\Omega^R) = 1, \end{aligned} \quad (3.83)$$

содержащая, в частности, хорошо известное свойство: единственность и цикличность вакуума в совокупности равносильны неприводимости глобальной алгебры.

Исходя отсюда, уже несложно дать полное описание вакуумной структуры для широкого класса локальных квантовых теорий, которым достаточно ограничиться при рассмотрении большинства проблем: это — так называемые "теории P -класса", характеризуемые глобальной алгеброй вида $R = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} R_\gamma$, где R_γ — дискретные факторы, и отвечающие квантовополевым

системам с произвольными дискретными правилами суперотбора (см. § 4). В таких теориях подпространства $\mathcal{H}_\gamma$ разложения $\mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \mathcal{H}_\gamma$ интерпрети-

руются как когерентные суперотборные секторы, а подпространства $\mathcal{H}_\gamma$ такие, что $\mathcal{H}_{0,\gamma} \equiv \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_\gamma \neq \{0\}$ называются вакуумными суперотборными секторами. Строение вакуумных секторов детально описывает

Предложение 3.47 [СХ4]. Пусть задана теория Хаага—Араки с вакуумным подпространством $\mathcal{H}_0 \neq \{0\}$ и глобальной алгеброй P -класса:

$$R = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} R_\gamma, \quad \mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \mathcal{H}_\gamma$$

(R_γ — факторы типа I_∞), удовлетворяющая аксиомам III, V, VI. Допустим¹⁾, что $\mathcal{H}_{0,\gamma} \neq \{0\}$ для всех $\gamma \in \sigma$. Тогда:

1) в каждом факторном подпространстве $\mathcal{H}_\gamma$ алгебры R имеется одно и только одно вакуумное состояние, и это состояние чисто:

$$\mathcal{H}_{0,\gamma} \cap S_1 = \mathfrak{M}_{\Omega_\gamma}^R, \quad \omega_{\Omega_\gamma} \in PV(R),$$

¹⁾ Без ограничения общности, так как в противном случае можно относить все утверждения к алгебре $R = \bigoplus_{\gamma \in \sigma' \subset \sigma} R_\gamma$ такой, что $\mathcal{H}_{0,\gamma} \neq \{0\}$ для всех $\gamma \in \sigma'$.

где Ω_γ — любой единичный вектор из $\mathcal{H}_{0,\gamma}$ и $PV(R)$ — множество всех чистых векторных состояний на R ;

2) в каждом неприводимом подпространстве алгебры R имеется один и только один единичный вакуумный вектор;

$$3) P_{0,\gamma} = P_{\Omega_\gamma}^{R'} = P_{\Omega_\gamma}^{T(\hat{M})'},$$

где $P_{0,\gamma}$ — проектор на $\mathcal{H}_{0,\gamma}$;

$$4) \mathcal{H}_0 = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \mathcal{H}_{0,\gamma}.$$

Доказательство. Получим первое утверждение. Для произвольного вектора $\Omega_\gamma \in \mathcal{H}_{0,\gamma} \cap S_1$ векторное состояние ω_{Ω_γ} инвариантно и таково, что $R_{\omega_{\Omega_\gamma}} = R_{P_{\Omega_\gamma}^R}$ — фактор (как индукция фактора R_γ). Поэтому

эквивалентность условий 5 и 6 выше дает, что $R_{\omega_{\Omega_\gamma}} = \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\Omega_\gamma}^R)$, и ω_{Ω_γ} — чистое состояние. Далее, если Ω_1 — любой другой единичный вектор из $\mathcal{H}_{0,\gamma}$, то состояние ω_{Ω_1} тоже чисто, и подпространства $\mathcal{H}_{\Omega_\gamma}^R$ и $\mathcal{H}_{\Omega_1}^{R'}$ имеют нетривиальное пересечение (это свойство строения гильбертова пространства дискретного фактора легко следует из унитарной эквивалентности всех неприводимых субпредставлений R_γ ; см. § 4). Отсюда, с учетом (3.83) и следствия 2 из теоремы 3.43, имеем

$$\{0\} \neq \mathcal{H}_{\Omega_\gamma}^R \cap \mathcal{H}_{\Omega_1}^{R'} \subset \mathcal{H}_{\Omega_\gamma}^R \cap \mathcal{H}_0 = \{c \Omega_\gamma\}_{c \in \mathbb{C}}$$

и, следовательно, $\Omega_\gamma \in \mathcal{H}_{\Omega_1}^{R'} \cap S_1$. В силу формулы для прообраза чистого состояния

$$\mathfrak{M}_{\Omega_1}^R = \mathcal{H}_{\Omega_1}^{R'} \cap S_1,$$

(которая вытекает из (3.43) и будет явно получена в § 4) последнее означает $\omega_{\Omega_\gamma} = \omega_{\Omega_1}$.

Далее, любое неприводимое подпространство $\mathcal{H}_1$ алгебры R лежит в одном из факторных подпространств $\mathcal{H}_\gamma$ и, как уже отмечалось, имеет нетривиальное пересечение с подпространством $\mathcal{H}_{\Omega_\gamma}^{R'}$, $\Omega_\gamma \in \mathcal{H}_{0,\gamma}$. Поскольку $\mathcal{H}_{\Omega_\gamma}^{R'} \subset \mathcal{H}_0$, то $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_0 \neq \{0\}$, и в силу (3.83) это пересечение одномерно.

Утверждение 3 явствует из включений

$$\mathcal{H}_{\Omega_\gamma}^{R'} \subset \mathcal{H}_{\Omega_\gamma}^{T(\hat{M})'} \subset \mathcal{H}_{0,\gamma} \subset \overline{L\{\mathfrak{M}_{\Omega_\gamma}^R\}} \subset \mathcal{H}_{\Omega_\gamma}^{R'},$$

где первое следует из теоремы 3.43, третье — из утверждения 1, четвертое — из (3.43).

Наконец, поскольку $[P_0, P_\gamma] = 0$,

$$P_0 = \left(\sum_{\gamma \in \sigma} P_\gamma \right) P_0 = \sum_{\gamma \in \sigma} P_{0,\gamma}$$

и предложение доказано. $\square$

Симметрии, связанные с группой Лоренца, до сих пор остаются мало исследованными. В этом отношении локальная квантовая теория представляет значительный контраст с вайтмановской теорией, где на базе условия лоренц-ковариантности, в сочетании с локальностью и спектральностью, развилось целое направление, занимающееся главным образом изучением областей аналитичности функций Вайтмана W_n и насчитывающее целый ряд важных достижений: так, здесь установлено существование вещественных точек в области аналитичности W_n , расширенной с учетом лоренц-ковариантности, найдено содержательное обобщение условия локальности (слабая локальная коммутативность) и получено строгое доказательство *CPT*-теоремы. Лишь самая небольшая часть результатов этого направления воспроизведена и в рамках локальной квантовой теории, поскольку ее отличия от вайтмановской теории весьма препятствуют этому. Прежде всего, разумеется, в локальной квантовой теории нет такого объекта, как функция Вайтмана или функционал Вайтмана, и необходимо начать с того, чтобы ввести их некоторые аналоги. Самоочевидная — хотя, быть может, и не единственная — возможность заключается в том, чтобы, придав произвольной локальной наблюдаемой $A \in R(O)$ зависимость от аргумента $x \in M$: $A \rightarrow A(x) = T(x)AT(-x)$, рассматривать возникающую функцию из M в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ как аналог вайтмановского поля, а вакуумные ожидания

$$\Phi_n(x_1, \dots, x_n) \equiv (\Omega, A(x_1) \dots A(x_n) \Omega)$$

— как аналоги функций Вайтмана. Однако, к сожалению, аналогия оказывается далеко не полной. Свойство локальности для функций $\Phi_n(x_1, \dots, x_n)$ выполняется лишь в ослабленной форме:

$$\Phi_n(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \Phi_n(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n) \quad \text{при} \\ (O + x_i) \times (O + x_{i+1}).$$

Более слабым является и условие лоренц-ковариантности. В вайтмановской теории поля $A(f) = \sum_{j=1}^r A_j(f_j)$ обладают определенными спинами, и за счет этого для них имеет место простой линейный трансформационный закон при преобразованиях Лоренца [[БЛТ, с. 174]]: в пространстве состояний $\mathcal{H}$ действует унитарное представление $U(a, K)$ универсальной накрывающей $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ собственной группы Пуанкаре такое, что

$$U(a, K)A(f)U(a, K)^{-1} = A(f_{(a, K)}) = \sum_{j=1}^r V_{ij}(K^{-1})A_j(f_j(\Lambda^{-1}(x - a))), \quad (3.84)$$

где $V(K)$ — r -мерное представление универсальной накрывающей $\bar{L}_+^\uparrow = SL(2, C)$, и связь собственных преобразований Лоренца $\Lambda \in L_+^\uparrow$ с элементами $\bar{L}_+^\uparrow$ задается формулой

$$\Lambda_\mu^\nu = \Lambda_\mu^\nu(K) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_\mu K \sigma_\nu K^*) \quad (3.85)$$

(σ_0 — единичная 2×2 -матрица, σ_i — матрицы Паули). В локальной кван-

товой теории (3.84), разумеется, не имеет места, и о представлении $U(a, \Lambda)$, задаваемом аксиомой V , не имеется, по существу, никакой информации (кроме, разве что, его разложимости на неприводимые, использованной при доказательстве предложения 3.36). Наконец, и предположение о наличии вакуумного вектора $\Omega \in \mathcal{H}$ здесь уже не является частью системы аксиом и сужает класс рассматриваемых теорий. В итоге функции $\Phi_n(x_1, \dots, x_n)$ обладают далеко не всеми нужными свойствами функций Вайтмана; в частности, их аналитические и асимптотические свойства существенно слабее и устанавливаются с гораздо большей сложностью (см., например, [АН; Е; EGM]). Кроме того, и по своему смыслу они отнюдь не являются столь же естественными и фундаментальными для всей теории объектами, как функции Вайтмана. То же относится и к операторнозначным функциям $A(x)$, которые обычно называют "полями Хаага" или "полями Хаага–Араки": они заведомо не могут занять в локальной квантовой теории то же центральное место, какое занимают истинные поля $A(f)$ в вайтмановском подходе. И в свете всех этих соображений следует, видимо, признать, что пытаться получить в рамках локальной квантовой теории весь комплекс результатов вайтмановского подхода, базирующихся на лоренц-ковариантности, — есть задача едва ли плодотворная и едва ли выполнимая до конца.

В то же время с лоренц-ковариантностью связан и ряд таких вопросов, постановка которых в рамках алгебраического подхода естественна и даже необходима. Несомненно, в частности, что к числу подобных вопросов принадлежат:

1) выяснение условий, при которых генераторы представления $U(a, \Lambda)$ группы Пуанкаре, подобно генераторам трансляций, являются физическими наблюдаемыми, т.е. присоединены к алгебре R ;

2) изучение лоренц-инвариантных векторов и лоренц-инвариантных состояний;

а так как известно, что дискретные симметрии теснейше связаны со свойствами симметрии по отношению к группе Лоренца и ее комплексификации, то к этому же кругу вопросов надо причислить и

3) описание дискретных симметрий. Здесь следует подчеркнуть, что, в отличие от полевой теории, в формализме наблюдаемых и состояний нет естественного способа определить операции P , T и C , и потому проблемой являются не только свойства, но и самое существование этих объектов. Наиболее же важный вопрос — возможность введения CPT -оператора и доказательства CPT -теоремы.

Все эти вопросы имеют прямое физическое значение. Это непосредственно ясно в случае вопроса 1; вопрос же 2 составляет необходимую часть изучения вакуумной структуры релятивистских квантовых систем: до сих пор наше изучение этой структуры оставалось существенно неполным, ибо мы никак не учитывали, что вакуумное состояние должно быть не только трансляционно инвариантным, но и лоренц-инвариантным. Что же касается вопроса 3, то, как известно, дискретные свойства симметрии и CPT -теорема принадлежат к числу экспериментально проверяемых свойств системы элементарных частиц. Тем не менее, по всем этим вопросам результаты пока далеки от полноты, и только в случае вопроса 1) они уже близки к положительному решению (т.е. доказательству свойства $U(a, \Lambda) \in R$).

Возможности такого решения намечаются уже из следующих элементарных фактов.

1) Все пространственные автоморфизмы фактора типа I являются внутренними. Поэтому, если в теории Хаага—Араки алгебра R — фактор и $\mathcal{H}_0 \neq \{0\}$, то, с учетом предложения 3.46, автоморфизмы Пуанкаре $\alpha_{(a, \Lambda)}$ являются внутренними, и для каждого $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ существует оператор $\tilde{V}(a, \Lambda) \in R^U$ такой, что для всех $A \in R$

$$\alpha_{(a, \Lambda)}(A) = U(a, \Lambda)AU(a, \Lambda)^{-1} = \tilde{V}(a, \Lambda)A\tilde{V}(a, \Lambda)^{-1}, \quad (3.86)$$

где $U(a, \Lambda)$ — исходное сильно непрерывное представление $\mathcal{P}_+^\uparrow$, задаваемое аксиомой V.

2) Если R — прямая сумма факторов, и α_g — сильно непрерывная связная группа автоморфизмов, то центр $\mathcal{Z}$ поточечно инвариантен относительно автоморфизмов α_g . (Действительно, в этом случае $\mathcal{Z}$ порождается своими минимальными проекторами, и α_g , как легко проверить, должны переводить эти минимальные проекторы друг в друга. Но поскольку R — дискретная сумма факторов, то совокупность всех таких проекторов есть дискретное множество в сильной операторной топологии. Поэтому, благодаря сильной непрерывности и связности группы α_g , минимальные проекторы остаются инвариантными относительно α_g , а весь центр $\mathcal{Z}$ поточечно инвариантен.) В силу известного критерия [[D, с. 241]] отсюда следует, что если R — алгебра типа I, то автоморфизмы α_g внутренние. В итоге, если в теории Хаага—Араки R есть алгебра P-класса (т.е. прямая сумма факторов типа I), то опять-таки автоморфизмы Пуанкаре внутренние, и существует набор операторов $\tilde{V}(a, \Lambda)$, удовлетворяющих (3.86). Для самих же операторов $U(a, \Lambda)$, заданных аксиомой V, мы получаем, что $U(a, \Lambda) \in \mathcal{Z}'$. Для класса глобальных алгебр $R = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \mathcal{B}(\mathcal{H}_\gamma)$, отвечающего (как мы увидим

в § 6) полевым системам с нормальной Бозе—Ферми статистикой, это влечет и $U(a, \Lambda) \in R$.

В обоих случаях наш вывод лишь утверждает, что каждый отдельный автоморфизм $\alpha_{(a, \Lambda)}$ является внутренним (или, что то же, в теории Хаага—Араки имеется автоморфное представление $\alpha: \mathcal{P}_+^\uparrow \rightarrow \text{Int } R$, где $\text{Int } R$ — группа всех внутренних автоморфизмов R) и ничего не говорит о свойствах всего набора операторов $\tilde{V}(a, \Lambda)$. Между тем этот набор, вообще говоря, может и не быть представлением $\mathcal{P}_+^\uparrow$: из выполнения группового закона для некоторой группы автоморфизмов $\tau_g = V_g \cdot V_g^{-1}$ еще не вытекает выполнения этого закона для унитарных операторов V_g . Ввиду этого отмеченные факты еще вовсе не означают искомого нами физического результата о свойствах генераторов группы Пуанкаре. Для получения такого результата требуется, чтобы автоморфизмы $\alpha_{(a, \Lambda)}$ могли осуществляться операторами, которые не только лежат в R , но образуют (сильно или слабо) непрерывное представление $\mathcal{P}_+^\uparrow$; при этом достаточно, если это будет не унитарное, но проективное представление, или, что равносильно, унитарное представление универсальной накрывающей $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$. Убедиться в наличии проективного представления возможно опять на уровне элементарных соображений. В самом деле, если $\alpha_{(a, \Lambda)}$ — группа автоморфизмов W^* -алгебры R ,

то для операторов $\tilde{V}(a, \Lambda)$, реализующих эти автоморфизмы, мы хотя и не получаем (как отмечалось) группового закона, но все же получаем (как нетрудно проверить) следующее свойство:

$$\tilde{V}(L_1 L_2) \tilde{V}(L_2)^{-1} \tilde{V}(L_1)^{-1} \in R,$$

где для краткости обозначено $L_i = (a_i, \Lambda_i)$, $i = 1, 2$, $L_1 L_2 = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2)$. При $\tilde{V}(L) \in R$ это дает

$$\tilde{V}(L_1 L_2) = Z(L_1, L_2) \tilde{V}(L_1) \tilde{V}(L_2), \quad Z(L_1, L_2) \in \mathcal{Z},$$

и, таким образом, если R — фактор, то операторы $\tilde{V}(a, \Lambda)$ образуют проективное представление $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Если же $R = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} R_\gamma$ — прямая сумма факторов,

то очевидно, что и в этом случае возможно получить проективное представление $\mathcal{P}_+^\uparrow$, исходя из проективных представлений в подпространствах $\mathcal{H}_\gamma$ алгебр R_γ . В итоге остается лишь показать непрерывность возникающего представления, но это уже является существенно более сложной задачей.

Соображения подобного типа использовались при анализе релятивистской ковариантности локальной квантовой теории уже в работе Араки в 1964 г. [A5], где было получено простое

Предложение 3.48. Пусть в теории Хаага–Араки выполнены аксиомы III, V, VI и пространство $\mathcal{H}_0$ циклично для $\mathcal{Z}'$, причем каждый вектор из $\mathcal{H}_0$ лоренц-инвариантен. Тогда существует унитарное представление $V(a, K)$ универсальной накрывающей $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ такое, что $V(a, K) \in R^U$ и для всех $A \in R$

$$V(a, K) A V(a, K)^{-1} = U(a, \Lambda(K)) A U(a, \Lambda(K))^{-1}, \quad (3.87)$$

где элементы K и $\Lambda(K)$ связаны согласно (3.85).

Доказательство. В силу теоремы 3.43 $\mathcal{Z}\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0$, откуда для всех $Z \in \mathcal{Z}$, с учетом $U(a, \Lambda)\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0$, имеем

$$U(a, \Lambda) Z U(a, \Lambda)^{-1} |_{\mathcal{H}_0} = Z |_{\mathcal{H}_0}. \quad (3.88)$$

Поскольку преобразование $U(a, \Lambda) \cdot U(a, \Lambda)^{-1}$ есть автоморфизм R , то оно сохраняет $\mathcal{Z}$, т.е. $U(a, \Lambda) Z U(a, \Lambda)^{-1} \in \mathcal{Z}$. Поэтому, умножая (3.88) слева на произвольный оператор из $\mathcal{Z}'$ и учитывая, что множество $\mathcal{Z}'\mathcal{H}_0$ плотно в $\mathcal{H}$, получаем

$$U(a, \Lambda) \in \mathcal{Z}' \quad \forall (a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow.$$

Это означает, что операторы $U(a, \Lambda)$ разложимы в центральном разложении алгебры R (см. § 1):

$$R = \int^\oplus R_\xi d\nu(\xi), \quad U(a, \Lambda) = \int^\oplus U(a, \Lambda)_\xi d\nu(\xi)$$

и, поскольку каждая компонента R_ξ есть фактор типа I (предложение 3.46, использующее локальность), то все автоморфизмы R_ξ внутренние. Поэтому для каждого $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ существует оператор $\tilde{V}(a, \Lambda)_\xi \in R_\xi^U$ такой, что для всех $A_\xi \in R_\xi$

$$U(a, \Lambda)_\xi A_\xi U(a, \Lambda)_\xi^{-1} = \tilde{V}(a, \Lambda)_\xi A_\xi \tilde{V}(a, \Lambda)_\xi^{-1}.$$

Как уже указывалось, благодаря факторности R_ξ , можно подбором фазовых множителей преобразовать набор операторов $\{\tilde{V}(a, \Lambda)_\xi\}$ в унитарное представление $V(a, K)_\xi$ универсальной накрывающей $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$. Прямой интеграл возникающего поля представлений

$$V(a, K) = \int^\oplus V(a, K)_\xi d\nu(\xi)$$

определяет искомое представление универсальной накрывающей, удовлетворяющее (3.87). $\square$

Вопрос о непрерывности представления $V(a, K)$ не затрагивался здесь. Установление этой непрерывности потребовало более пристального анализа, который был проведен (для более общего случая) в значительно позднейшей работе Зиновьева и Сушко [ЗС]. Его результатом является

Т е о р е м а 3.49. Пусть задана теория Хаага–Араки, обладающая сильно непрерывным унитарным представлением $U(a, \Lambda)$ группы Пуанкаре и глобальной алгеброй R -класса. Тогда существует сильно непрерывное унитарное представление $V(a, K)$ универсальной накрывающей $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ такое, что для всех $(a, K) \in \bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ выполнены свойства: $V(a, K) \in R^U$ и

$$V(a, K) A V(a, K)^{-1} = U(a, \Lambda(K)) A U(a, \Lambda(K))^{-1} \quad \forall A \in R.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как было показано, нам требуется лишь установить непрерывность проективного представления, порождаемого операторами $\tilde{V}(a, \Lambda)$ из (3.86), исходя из непрерывности автоморфного представления $\alpha_{(a, \Lambda)}: \bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow \rightarrow \text{Int } R$. Для решения этой задачи мы сведем ее к анализу внутренних автоморфизмов алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: это возможно за счет того, что по условию $R = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} R_\gamma$, где все R_γ – дискретные факторы.

Поскольку $\tilde{V}(a, \Lambda) \in R$, то представление α имеет вид прямой суммы $\alpha = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \alpha^\gamma$ секторных представлений $\alpha^\gamma: \bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow \rightarrow \text{Int } R_\gamma$. Действительно, для всех $A \in R$ справедливо $A = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} A_\gamma$, $A_\gamma \in R_\gamma$, откуда и

$$\begin{aligned} \alpha_{(a, \Lambda)}(A) &= \tilde{V}(a, \Lambda) A \tilde{V}(a, \Lambda)^{-1} = \tilde{V}(a, \Lambda) \bigoplus_{\gamma \in \sigma} A_\gamma \tilde{V}(a, \Lambda)^{-1} = \\ &= \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \tilde{V}(a, \Lambda) A_\gamma \tilde{V}(a, \Lambda)^{-1} = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \alpha_{(a, \Lambda)}^\gamma(A_\gamma). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Для всякого дискретного фактора R_γ существует гильбертово пространство $\hat{\mathcal{H}}_\gamma$ такое, что имеет место ультраслабо непрерывный изоморфизм $\Phi_\gamma: R_\gamma \rightarrow \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}_\gamma)$.

Этот изоморфизм индуцирует представление $\hat{\alpha}^\gamma: \bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow \rightarrow \text{Int } \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}_\gamma)$, определяемое соотношением $\hat{\alpha}^\gamma = \Phi_\gamma \circ \alpha^\gamma \circ \Phi_\gamma^{-1}$. Как пояснено выше, мы хотим выразить секторное проективное представление группы Пуанкаре через представление $\hat{\alpha}^\gamma$. Для этого рассмотрим алгебраический изоморфизм

$$\mu_\gamma: \text{Int } \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}_\gamma) \rightarrow B_\gamma^U / \mathcal{C}_1(\hat{\mathcal{H}}_\gamma)$$

(где B_γ^U – группа всех унитарных операторов в $\hat{\mathcal{H}}_\gamma$, $\mathcal{C}_1(\hat{\mathcal{H}}_\gamma) =$

$= \{ e^{i\varphi} I_{\hat{\mathcal{H}}_\gamma} \}_{\varphi \in \mathbb{R}}$), который задается следующим явным образом: для всякого $V \in B_\gamma^U$

$$\mu_\gamma(V \cdot V^{-1}) = \{ V e^{i\varphi} \}_{\varphi \in \mathbb{R}}.$$

Замечая, что изоморфизм Φ_γ порождает точные отображения:

$$\Phi_\gamma|_{R_\gamma^U}: R_\gamma^U \rightarrow B_\gamma^U, \quad \tilde{\Phi}_\gamma: R_\gamma^U / \mathcal{C}_1(\hat{\mathcal{H}}_\gamma) \rightarrow B_\gamma^U / \mathcal{C}_1(\hat{\mathcal{H}}_\gamma),$$

определим секторное проективное представление формулой

$$\tilde{\alpha}^\gamma = \tilde{\Phi}^{-1} \circ \mu_\gamma \circ \hat{\alpha}^\gamma: \mathcal{P}_+^\uparrow \rightarrow R_\gamma^U / \mathcal{C}_1(\hat{\mathcal{H}}_\gamma).$$

Из определений входящих сюда отображений следует, что

$$\tilde{\alpha}_{(a, \Lambda)}^\gamma(A_\gamma) = \alpha_{(a, \Lambda)}^\gamma(A_\gamma) \quad \forall A_\gamma \in R_\gamma.$$

С учетом (3.89) отсюда получаем, что если $V_\gamma(a, \Lambda) \in R_\gamma^U$ — произвольный представитель класса эквивалентности $[V_\gamma(a, \Lambda)] = \{ e^{i\varphi} V_\gamma(a, \Lambda) \}_{\varphi \in \mathbb{R}} \in R_\gamma^U / \mathcal{C}_1(\hat{\mathcal{H}}_\gamma)$, то для всех $A_\gamma \in R_\gamma$ и всех $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$

$$\tilde{\alpha}_{(a, \Lambda)}^\gamma(A_\gamma) = V_\gamma(a, \Lambda) A_\gamma V_\gamma(a, \Lambda)^{-1} = \tilde{V}(a, \Lambda) A_\gamma \tilde{V}(a, \Lambda).$$

Взяв здесь прямую сумму $\bigoplus_{\gamma \in \sigma}$, с учетом (3.86), для всех $A = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} A_\gamma \in R$ имеем

$$V(a, \Lambda) A V(a, \Lambda)^{-1} = U(a, \Lambda) A U(a, \Lambda)^{-1}, \quad (3.90)$$

где $V(a, \Lambda) \equiv \bigoplus_{\gamma \in \sigma} V_\gamma(a, \Lambda) \in R^U$, операторы $V(a, \Lambda)$ образуют по построению проективное представление $\mathcal{P}_+^\uparrow$ в группу $R^U / \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ и $U(a, \Lambda)$ — исходное унитарное представление $\mathcal{P}_+^\uparrow$ в теории Хаага—Араки.

Чтобы установить сильную непрерывность проективного представления $\tilde{\alpha} = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \tilde{\alpha}^\gamma$, достаточно доказать непрерывность изоморфизма μ_γ , так как

нужные свойства непрерывности $\tilde{\Phi}^{-1}$ и $\hat{\alpha}^\gamma$ налицо. При этом на группе $B_\gamma^U / \mathcal{C}_1(\hat{\mathcal{H}}_\gamma)$ должна рассматриваться сильная операторная фактор-топология, а на группе $\text{Int } \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}_\gamma)$ — топология, в которой непрерывно представление $\hat{\alpha}^\gamma$. Эта последняя топология может быть задана семейством окрестностей

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\tau_2; \varphi, \psi; \epsilon) &= \\ &= \{ \tau_1 \in \text{Int } \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}_\gamma) \mid \sup_{S_\psi} | \varphi(\tau_1(A_1) - \tau_2(A_2)) | \leq \epsilon \}, \end{aligned}$$

где φ, ψ — нормальные положительные функционалы на $\mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}_\gamma)$ и

$$S_\psi = \{ A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}_\gamma) \mid | \psi(A_1 - A_2) | \leq \epsilon \}.$$

Пользуясь слабой компактностью единичного шара в $\mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}_\gamma)$, можно проверить, что такая топология сильнее, чем ограниченно слабая топология,

задаваемая окрестностями:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{BW}(\tau_2; \chi; \epsilon) = \\ = \{ \tau_1 \in \text{Int } \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}_\gamma) \mid \sup_{\|A\| \leq 1} |(\chi, (\tau_1(A) - \tau_2(A)) \chi)| \leq \epsilon \}, \end{aligned}$$

где $\chi \in \hat{\mathcal{H}}_\gamma$. Поэтому достаточно доказать непрерывность μ_γ в том случае, когда группа $\text{Int } \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}_\gamma)$ снабжена ограниченно слабой топологией. Для этой цели нужно проверить, что

$$\tau_1 \in \mathcal{N}_{BW}(\tau_2; \chi; \epsilon) \Rightarrow \mu_\gamma(\tau_2) \in \mathcal{N}_s(\mu_\gamma(\tau_1); \chi; \epsilon'), \quad (3.91)$$

где $\epsilon' \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$ и

$$\mathcal{N}_s(0; \chi; \epsilon) = \{ [V] \in B_\gamma^U / \mathcal{C}_1(\hat{\mathcal{H}}_\gamma) \mid \inf_{V' \in [V]} \|V' \chi\|^2 < \epsilon \}$$

-- окрестности, с помощью которых можно задать сильную операторную фактор-топологию на $B_\gamma^U / \mathcal{C}_1(\hat{\mathcal{H}}_\gamma)$. Учитывая, что $\tau_i = V_i \cdot V_i^{-1}$, $V_i \in B_\gamma^U$, $i = 1, 2$, и замечая, что

$$\inf_{\substack{V'_i \in [V_i] \\ i = 1, 2}} \|(V'_1 - V'_2) \chi\|^2 = \inf_{\varphi \in \mathbb{R}} \|(V_1 - e^{i\varphi} V_2) \chi\|^2 = 2(1 - |(V_1 \chi, V_2 \chi)|),$$

а также обозначая P_1 проектор на луч, отвечающий вектору $V_1^{-1} \chi \in \hat{\mathcal{H}}_\gamma$, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\|A\| \leq 1} |(\chi, (\tau_1(A) - \tau_2(A)) \chi)| &\geq |(\chi, (\tau_1(P_1) - \tau_2(P_1)) \chi)| = \\ &= (1 - |(V_1 \chi, V_2 \chi)|^2) \geq (1 - |(V_1 \chi, V_2 \chi)|). \end{aligned}$$

Справедливость (3.91) отсюда очевидна. Таким образом, операторы $V(a, \Lambda) \in R^U$ в (3.90) образуют сильно непрерывное проективное представление $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Согласно классическим результатам Вигнера и Баргмана, всякое такое представление порождается сильно непрерывным унитарным представлением универсальной накрывающей $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$; в нашем случае это представление будет лежать в R^U , и для него можно сохранить символы $V(a, K)$. $\square$

С л е д с т в и е 1. В теории Хаага–Араки с глобальной алгеброй P -класса, в некоторой окрестности $\mathcal{N}$ единицы группы Пуанкаре можно определить сильно непрерывное унитарное представление $\tilde{U}: \mathcal{N} \rightarrow R^U$ такое, что для всех $(a, \Lambda) \in \mathcal{N}$ и $A \in R$

$$U(a, \Lambda) A U(a, \Lambda)^{-1} = \tilde{U}(a, \Lambda) A \tilde{U}(a, \Lambda)^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение очевидно, поскольку проективное унитарное представление $V(a, \Lambda)$ в (3.90) локально изоморфно унитарному представлению. $\square$

С л е д с т в и е 2. В локальной квантовой теории генераторы M_k^i представления группы Лоренца являются чисто глобальными наблюдаемыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Операторы M_k^i можно считать генераторами представления $\tilde{U}$, введенного в следствии 1; тогда они присоединены

к R . Согласно следствию 1 предложения 3.37 они не могут быть присоединены ни к одной алгебре $R(O)$ с $O \in B(M)$. $\square$

Из доказательства теоремы 3.49 видно, что существование автоморфного представления $\alpha_{(a, \Lambda)}$ группы Пуанкаре, являющееся прямым выражением физического требования релятивистской ковариантности, при наложении некоторых требований непрерывности равносильно существованию проективного представления, или, что то же, унитарного представления универсальной накрывающей $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$. По доказанному это проективное представление можно без ограничения общности выбрать в глобальной алгебре наблюдаемых. Существование же унитарного представления $\mathcal{P}_+^\uparrow$, т.е. обычная формулировка аксиомы релятивистской ковариантности в теории Хаага–Араки, вообще говоря, не вытекает из существования автоморфного представления и является дополнительным ограничением, оправдываемым не столько физическими соображениями, сколько соображениями удобства.

Сказанное является аргументом в пользу того, что аксиому V в теории Хаага–Араки можно было бы ослабить, требуя существования унитарного представления не группы Пуанкаре, а только ее универсальной накрывающей. Тогда результат теоремы 3.49 для группы Пуанкаре окажется полностью параллельным результату теоремы Борхерса (теорема 3.43) для группы трансляций: в обоих случаях доказывается, что непрерывное унитарное представление, отвечающее автоморфному представлению, заданному аксиомой V, может быть выбрано в глобальной алгебре R . Именно так, для $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, формулируется релятивистская ковариантность в полевой теории (ср. (3.84)), а также в аппарате локализованных морфизмов Доплихера–Хаага–Робертса (§ 6), где тоже доказано, что сильно непрерывное унитарное представление $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ лежит в R [DHR4, лемма 2.2].

Обратимся к вопросу о лоренц-инвариантных состояниях и векторах. Долгое время информация об их свойствах оставалась скудной и отчасти разноречивой, сводясь лишь к следующим двум фактам: еще в 1962 г. Борхерс доказал [B2, теорема 3] в рамках вайтмановской теории с циклическим и пуанкаре-инвариантным вектором, что всякий трансляционно инвариантный вектор является и лоренц-инвариантным; в 1964 г. Араки [A5] доказал в рамках локальной квантовой теории, что заведомо не всякий трансляционно инвариантный вектор является и лоренц-инвариантным, явно построив пример такой теории, в котором ни один трансляционно инвариантный вектор не лоренц-инвариантен. Приведем эту конструкцию Араки. Пусть $d\mu(\Lambda)$ – инвариантная мера на собственной группе Лоренца $L_+^\uparrow$, и пусть каждому $\Lambda \in L_+^\uparrow$ сопоставлена теория Хаага–Араки, удовлетворяющая аксиомам III, V, VI, с условием трансляционной ковариантности вместо пуанкаре-ковариантности, и такая, что все теории $(\mathcal{H}_\Lambda, R(O)_\Lambda, T(a)_\Lambda)$ суть копии одной и той же теории $(\mathcal{H}, R(O), T(a))$, получаемые тождественным отображением $S(\Lambda): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\Lambda$. Построим прямой интеграл этих теорий (см. § 1 и [D, гл. II]):

$$\tilde{\mathcal{H}} = \int^\oplus \mathcal{H}_\Lambda d\mu(\Lambda), \quad R(O) = \int^\oplus R(\Lambda O)_\Lambda d\mu(\Lambda), \quad T(a) = \int^\oplus T(\Lambda a)_\Lambda d\mu(\Lambda),$$

и возникающую теорию Хаага–Араки в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}$ дополним до пуан-

каре-ковариантной теории, введя в ней унитарное представление $\tilde{U}(\Lambda)$ группы Лоренца:

$$(\tilde{U}(\Lambda)\Phi)_{\Lambda'} = S(\Lambda')S(\Lambda'\Lambda)^{-1}\Phi_{\Lambda'\Lambda}$$

(где $\Phi = \int^{\oplus} \Phi_{\Lambda} d\mu(\Lambda) \in \tilde{\mathcal{H}}$) и унитарное представление группы Пуанкаре:

$$\tilde{U}(a, \Lambda) = \tilde{T}(a) \tilde{U}(\Lambda).$$

Тогда набор объектов $(\tilde{R}(O), \tilde{U}(a, \Lambda), \tilde{\mathcal{H}})$ есть теория Хаага–Араки, удовлетворяющая аксиомам III, V, VI, однако такая, что трансляционно инвариантные векторы в ней не являются лоренц-инвариантными, поскольку операторы $\tilde{U}(\Lambda)$, в отличие от $\tilde{T}(a)$, не представимы операторными полями $\{\tilde{U}(\Lambda)_{\Lambda'}\}_{\Lambda' \in L_+^{\uparrow}}$, $\tilde{U}(\Lambda)_{\Lambda'} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\Lambda'})$ и "перемешивают компоненты"

$\Phi_{\Lambda'}$ векторных полей $\Phi = \int^{\oplus} \Phi_{\Lambda} d\mu(\Lambda)$.

Более полное выяснение вопроса было достигнуто лишь в последнее время [DrS4]. Основным результат здесь получается весьма просто.

Предложение 3.50 [DrS4]. Пусть в теории Хаага–Араки выполнены аксиомы III, V, VI, и подпространство $\mathcal{H}_0$ содержит циклический для R вектор Ω . Тогда следующие условия эквивалентны:

1) все трансляционно инвариантные векторы лоренц-инвариантны;

2) $U(\mathcal{P}_+^{\uparrow}) \subset R$;

3) операторы преобразований Пуанкаре являются разложимыми в центральном разложении R .

Доказательство. $1 \rightarrow 2$. Согласно предложению 3.46, в рассматриваемой теории $R' = \mathcal{L}$. Для всех $T \in \mathcal{L}$ и $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^{\uparrow}$ с учетом $\mathcal{L}\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0$ имеем

$$T\Omega = U(a, \Lambda)T\Omega = U(a, \Lambda)TU(a, \Lambda)^{-1}\Omega. \quad (3.92)$$

Поскольку унитарное преобразование $U(a, \Lambda) \cdot U(a, \Lambda)^{-1}$ переводит центр R в центр $U(a, \Lambda)RU(a, \Lambda)^{-1} = R$, то в (3.92) $U(a, \Lambda)TU(a, \Lambda)^{-1} \in \mathcal{L}$. Но Ω — сепаратор для $\mathcal{L}$, и потому (3.92) дает

$$T = U(a, \Lambda)TU(a, \Lambda)^{-1} \quad \forall (a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^{\uparrow},$$

что сразу влечет 2.

$2 \rightarrow 1$. Из того, что трансляции образуют инвариантную подгруппу $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$, причем $U(a, \Lambda)T(\hat{M})U(a, \Lambda)^{-1} = T(\hat{M})$, следует инвариантность подпространства $\mathcal{H}_0$ для всех $U(a, \Lambda)$, равносильная свойству $P_0 \in U(\mathcal{P}_+^{\uparrow})'$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что множество операторов $V_0(\Lambda) \equiv P_0U(0, \Lambda)P_0$, $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$, образует сильно непрерывное унитарное представление $L_+^{\uparrow}$ в $\mathcal{H}_0$. Но в силу предложения 3.46, множество операторов P_0RP_0 абелево, так что условие 2 влечет абелевость $V_0(\Lambda)$. Для группы Лоренца в пространстве Минковского таким свойством обладает лишь тривиальное представление, откуда имеем искомое: для всех $\Phi \in \mathcal{H}_0$ и $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$, $U(0, \Lambda)\Phi = V_0(\Lambda)\Phi = \Phi$.

$2 \leftrightarrow 3$ очевидно, так как 3 означает $U(a, \Lambda) \in \mathcal{L}'$. $\square$

Следствие. Пусть в теории Хаага–Араки глобальная алгебра R есть прямая сумма дискретных факторов R_{γ} ("глобальная структура R-класса";

см. § 4). Тогда пространства $\mathcal{H}_\gamma$ алгебр R_γ приводят операторы преобразований Пуанкаре, и в каждом $\mathcal{H}_\gamma$ действует теория Хаага–Араки, удовлетворяющая всем аксиомам I–VI. Если же исходная теория обладает циклическим вакуумом, то в ней имеют место все свойства 1–3 предложения 3.50.

Доказательство. Выше (с. 116) мы отмечали, что для рассматриваемой глобальной структуры $U(a, \Lambda) \in \mathcal{L}' = \bigoplus_{\gamma} \mathcal{B}(\mathcal{H}_\gamma)$, с учетом чего выполнение аксиом I–VI для локальной сети $\{R(O) | \mathcal{H}_\gamma\}$ проверяется тривиально. При наличии же циклического вакуума $R_\gamma = \mathcal{B}(\mathcal{H}_\gamma)$ и $U(a, \Lambda) \in R$. $\square$

Таким образом, в теориях с циклическим вакуумом дискретность центрального разложения R есть достаточное условие выполнения всех свойств 1–3 (и нарушение этих свойств, означающее, согласно определению 3.10, спонтанное нарушение лоренц-инвариантности, возможно лишь, когда данное разложение содержит непрерывную часть — что мы и видим в примере Араки. Заметим, однако, что в отсутствие цикличности вакуума такое нарушение, вообще говоря, возможно и при дискретном разложении). Наряду с этим глобальным условием, Дрисслер и Саммерс вывели также локальное достаточное условие, связанное со специальными свойствами клиновидных областей (п. 3.2, 8.2). Именно, если обозначить $W_j = \{x \in M | x^j > |x^0|\}$, $j = 1, 2, 3$ (очевидно, $W_1 = W_R$) и $V_j(t)$ — соответствующую унитарную группу лоренцевых вращений, порождающих автоморфизмы локальной алгебры $R(W_j)$ ($V_1(t) = V(t)$ в обозначениях п. 3.2), то, согласно [DrS4, предложение 5.3], следующее условие является достаточным для выполнения свойств 1–3: группы $V_j(t)$ совпадают с модулярными группами Δ_j^{it} пар $(R(W_j), \Omega)$, $j = 1, 2, 3$. Доказательство этого условия мы опустим, отметив лишь, что оно использует соотношение $\mathcal{L}(W_j) = \mathcal{L}$, обобщающее предложение 3.7 на случай теории с вырождением вакуума. По смыслу же, данное условие, подобно упоминавшейся теореме Борхерса [B2, теорема 3], устанавливает отсутствие спонтанного нарушения лоренц-инвариантности в полевых теориях: как поясняется в п. 3.2 и доказывается в п. 8.2 (теорема 8.7), оно связано с существованием *CPT*-оператора и всегда выполнено в вайтмановской теории, если в ней имеется вакуум, циклический для полевой алгебры фон Неймана $F(W_j)$.

Наконец, затронем бегло дискретные симметрии. С переходом к рассмотрению других симметрий, помимо входящих в собственную группу Пуанкаре, спектр проблем значительно изменяется. Аксиомы теории уже не гарантируют нам, что данная симметрия или группа симметрий осуществляется унитарными операторами в пространстве состояний, и потому в первую очередь здесь возникает вопрос о том, каким способом, какими математическими объектами эта симметрия описывается. Возможен широкий диапазон таких способов описания. Согласно интуитивным физическим представлениям наличие свойства симметрии означает, что характеристики рассматриваемой физической системы (т.е. наблюдаемые и состояния, в случае алгебраического формализма) можно определенным образом изменить, но при этом не изменятся ни кинематика, ни динамика системы (т.е. в случае алгебраического формализма не изменится набор ожиданий всех наблюдаемых во всех состояниях). Унитарные операторы, сохраняя

скалярное произведение в гильбертовом пространстве, дают сам собой напрашивающийся способ описания свойств симметрии, однако этот способ и не единственный и не самый общий (напротив, он оказывается самым ограничительным). Наиболее общим способом, очевидно, будет такой, где на вид преобразования, которому подвергаются наблюдаемые и состояния, не налагается вообще никаких условий, помимо фундаментального физического требования сохранения ожиданий. При этом, вообще говоря, преобразование наблюдаемых и состояний, отвечающее данному свойству симметрии, может иметь различный вид для различных областей $O \in B(M)$. С учетом сказанного, в качестве исходного определения симметрии в алгебраическом подходе можно принять ¹⁾

О п р е д е л е н и е 3.9. Будем говорить, что квантовая система, описываемая сетью локальных алгебр, обладает *локальной предсимметрией* $\{\langle \nu^O, \tau^O \rangle\}_{O \in B(M)}$, если для каждой области $O \in B(M)$ существует пара отображений

$$\nu^O: S(O) \rightarrow S \subset \mathfrak{A}_1^{*+},$$

$$\tau^O: R(O)^h \rightarrow \mathcal{A}^h \subset \mathcal{A}$$

(здесь $S(O)$ — полное семейство ²⁾ состояний над алгеброй $R(O)$, $R(O)^h$, $\mathcal{A}^h$ — множество эрмитовых элементов из $R(O)$, $\mathcal{A}$ соответственно) такая, что

$$(\nu^O[\omega^{(O)}])(\tau^O(A)) = \omega^O(A)$$

для всех $\omega^{(O)} \in S(O)$, $A \in R(O)^h$.

Можно показать [ЗС], что определение 3.9 обеспечивает линейность и взаимную однозначность отображений ν^O, τ^O , изометричность τ^O и его продолжимость до отображения $\tilde{\tau}^O: R(O) \rightarrow \mathcal{A}$, сохраняющего инволюцию и единицу. Если же наложить естественное физическое условие, что преобразование симметрии не приводит к нарушению аксиом изотонии и локальности для множества наблюдаемых, то все ν^O оказываются сужениями (на соответствующие области) единого аффинного изометрического отображения $\nu: \mathfrak{A}_1^{*+} \rightarrow \mathfrak{A}_1^{*+}$, т.е. для всех $A \in R(O)$ и всех $\omega^{(O)} \in S(O)$

$$(\nu^O[\omega^{(O)}])(A) = (\nu[\omega])(A),$$

¹⁾ Мы не входим здесь в обширную проблематику общей теории симметрий квантовых систем. Главнейшие идеи этой теории восходят, как известно, к Вейлю и Вигнеру; систематический же аппарат алгебраического описания симметрий базируется в значительной мере на результатах Кадисона [К1,3]. Проблема наиболее общего определения преобразования симметрии рассматривалась Робертсом и Репсторфом [RR]. Хунцикер [Hu] дал элементарный вывод целого ряда основных свойств преобразований симметрии, используя не аппарат автоморфизмов C^* -алгебр, а только простые свойства отображений в гильбертовом пространстве. Варианты строгого описания симметрий, базирующиеся на различных алгебраических структурах, развиты в ряде схем аксиоматической квантовой механики (см., например, [[Э; J]]). В квантовой теории поля и в особенности в алгебраическом подходе строгие изложения теории симметрий весьма немногочисленны, и давний отлично написанный обзор Рее [Re] еще не потерял своего значения. См. также [[Г]], [O].

²⁾ Выпуклое подмножество $S \subset \mathfrak{A}_1^{*+}$ называется *полным*, если $\omega(A) \geq 0$ для всех $\omega \in S$ влечет $A \geq 0$.

где $\omega^{(O)} = \omega|_{R(O)}$, $\omega \in \mathfrak{A}_1^{*+}$. Аналогично, все $\tilde{\tau}^O$ оказываются сужениями (на соответствующие $R(O)$) единого отображения $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, которое является йордановым $*$ -автоморфизмом. Преобразования, задаваемые парами $\langle \nu, \tau \rangle$, составляют достаточно широкий и общий класс физических симметрий.

Йорданов или же J -автоморфизм определяется как линейное биективное и сохраняющее инволюцию отображение φ $*$ -алгебры $\mathfrak{M}$ такое, что $\varphi(A)^2 = \varphi(A^2)$ для всех $A \in \mathfrak{M}$, или, что равносильно, $\varphi(AB + BA) = \varphi(A)\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A)$. Из этих условий еще не следует, что $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$, и потому J -автоморфизмы — это более широкий класс отображений, чем $*$ -автоморфизмы; он включает в себя, наряду с последними, также и $*$ -антиавтоморфизмы, определяемые свойством $\varphi(AB) = \varphi(B)\varphi(A)$. Это означает, что класс преобразований симметрии, согласующихся с аксиомами локальной квантовой теории, более широк, нежели класс автоморфизмов квазилокальной алгебры, и тем более нежели класс пространственных автоморфизмов, выполнимых унитарными операторами. Такой выход за класс автоморфизмов квазилокальной алгебры имеет прямое отношение к проблеме описания дискретных симметрий: как известно, в полевой теории операции T , PT , CPT представляются антиунитарными операторами, и это свойство, связанное с общими теоремами Вигнера, должно сохраняться и в алгебраическом подходе (если только удастся их там ввести). Преобразование же $V \cdot V^{-1}$ при антиунитарном операторе V , как легко проверить, есть антиавтоморфизм.

Наконец, налагая еще одно физически естественное условие (условие 1): преобразование симметрии τ переводит локальную алгебру в (вообще говоря, другую) локальную алгебру, т.е. для всякой области $O \in B(M)$ найдется $\tilde{O} \in B(M)$ такая, что $\tau[R(O)] \subset R(\tilde{O})$, — мы приходим к основополагающему для теории физических симметрий разделению всех свойств симметрии на внешние и внутренние. Налагая же условие коммутативности симметрии τ с преобразованиями трансляций, или, что то же, с оператором энергии-импульса системы

$$\tau[A(a)] = (\tau[A])(a) \quad \forall A \in \mathfrak{A}, \quad a \in \hat{M}$$

(условие 2), приходим к другому фундаментальному разделению — на точные и нарушенные симметрии.

О п р е д е л е н и е 3.10. Физическая симметрия $\langle \nu, \tau \rangle$, удовлетворяющая условию 1, называется *внутренней*, если для всех $O \in B(M)$

$$\tau[R(O)] = R(O).$$

В противном случае симметрия называется *внешней*. Физическая симметрия $\langle \nu, \tau \rangle$, удовлетворяющая условиям 1 и 2, называется *точной* (или *сохраняющейся*, или *симметрией Вигнера*), если она оставляет инвариантным вакуумное состояние (или состояния) ω_0 системы

$$\nu[\omega_0] = \omega_0.$$

В противном случае симметрия называется *спонтанно нарушенной* (или *несохраняющейся*, или *симметрией Голдстоуна*).

В локальной квантовой теории имеется целый ряд результатов, касающихся строгого изучения нарушенных симметрий: анализируются теоремы

Голдстоуна и Коулмена, обсуждаются способы определения и свойства генераторов симметрий (зарядов), связанных с ними токов, и т.п. Мы не рассматриваем их, указав лишь основные работы [KRS; S2; Re; GER; O]. С другой стороны, для анализа дискретных симметрий здесь еще не выработано собственных методов, а попытки прямого перенесения методов и результатов полевой теории оказываются, как мы уже поясняли, малоэффективны. Критическую роль играет здесь то, что, ввиду несправедливости для "полей Хаага" $A(x)$ трансформационного закона (3.84), для вакуумных ожиданий $\Phi_n(x_1, \dots, x_n)$ этих "полей" не удастся установить теорему Баргмана–Холла–Вайтмана, лежащую в основе всего комплекса результатов, связанных с условием *CPT*-инвариантности [[Й, гл. 4, 5]].

Функции Φ_n допускают аналитическое продолжение в расширенную трубу $\mathcal{T}_n = \bigcup_{\Lambda \in L_+(\mathbb{C})} \Lambda \mathcal{T}_n^+$ (где $L_+(\mathbb{C})$ – связная компонента комплексной группы Лоренца) и обладают той же областью аналитичности, что и функции Вайтмана; однако, хотя эта область инвариантна относительно группы $L_+(\mathbb{C})$, сами функции Φ_n , вообще говоря, не обладают относительно этой группы никакими простыми трансформационными свойствами (см. [A1; EGM]). По этим причинам в локальной квантовой теории условия существования *CPT*-оператора и справедливости *CPT*-теоремы до сих пор основательно не выяснены, хотя данная проблема затрагивалась в ряде работ [E; 3; Rig].

ОТ ТЕОРИИ НАБЛЮДАЕМЫХ
К ТЕОРИИ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ

§ 4. ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПРАВИЛ СУПЕРОТБОРА

Результаты гл. 1 рисуют нам довольно цельное здание локальной квантовой теории, выступающей как "аксиоматический алгебраический подход" в квантовой теории поля. Однако это здание не имеет законченного вида: касательно многих свойств локальных сетей (тип алгебр $R(O)$, их модулярная структура, дуальность и т.п.) полученные результаты лишь отрывочны и частичны. Имеется и другой момент неполноты, внешний: комплекс результатов гл. 1 заведомо недостаточен для целей изучения конкретных квантовополевых систем (т.е. различных моделей и процессов взаимодействия элементарных частиц), ибо в нем нет очень многих понятий и свойств, которые присущи таким системам, но не отражены в аксиомах I–VI (ср. предисловие). В итоге теория Хаага–Араки или Хаага–Кастлера, как и другие аксиоматические подходы, дает лишь недостаточную, слишком бедную формулировку квантовой теории поля, и не должна рассматриваться в качестве замкнутой "аксиоматической теории" в строгом смысле аксиоматических теорий в математике. Скорее, это есть некий фундамент исходных фактов, который нам предстоит теперь достраивать и дополнять уже на каких-то иных, не чисто аксиоматических основаниях.

Наиболее кардинальным пробелом в аксиоматическом формализме гл. 1 является отсутствие в нем понятия квантованного поля. Все релятивистские квантовые системы реально представляют собой системы квантованных полей, и понятия "релятивистская квантовая теория" и "теория квантованных полей" всегда рассматриваются как полностью идентичные. Многие из самых основных свойств релятивистских квантовых систем определяются в терминах полей, считаясь "полевыми свойствами": таковы, скажем, внутренние квантовые числа, наличие античастицы для каждой из элементарных частиц, связь между спином и статистикой и др. Но в то же время поля могут не принадлежать к наблюдаемым: например, все заряженные поля не являются наблюдаемыми, поскольку они градиентно неинвариантны, а ферми- и пара-поля — поскольку они не удовлетворяют аксиоме локальности. Для произвольного поля характер его связи с наблюдаемыми вовсе не очевиден. Поэтому перед локальной квантовой теорией с необходимостью встает задача выяснить эту связь и дополнить свой формализм понятием квантованного поля, или, по крайней мере, не вводя явно полевых объектов, научиться выражать все полевые свойства через наблюдаемые и состояния. Решение этой задачи мы и обсудим в данной главе.

Исходным этапом на пути превращения аксиоматического алгебраического подхода в реалистическую квантовополевую теорию служит анализ систем с правилами суперотбора. Явление правил суперотбора (что было

выяснено отнюдь не сразу с его открытием) играет ключевую роль для взаимосвязи между полями и наблюдаемыми. В рамках же формализма наблюдаемых и состояний правила суперотбора выступают как ограничения на множество всех наблюдаемых, как локальных, так и глобальных; иначе говоря, они играют роль условий, фиксирующих глобальную структуру теории. Условия такого рода, отсутствовавшие в аксиоматическом формализме гл. 1, служат логическим дополнением к аксиомам I–VI, которыми фиксируется локальная структура теории.

Так называемые правила суперотбора были впервые обнаружены еще в 1952 г. в работе Вика, Вайтмана и Вигнера $[W^3]$. Согласно этому первому описанию явления ¹⁾ его суть заключается в существовании ортогональных разложений $\mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_k$ пространства состояний $\mathcal{H}$ таких, что все вероятности перехода между различными подпространствами $\mathcal{H}_k$ под действием операторов наблюдаемых равны 0. Наряду с этим требуется, чтобы все суперпозиции векторов из разных $\mathcal{H}_k$ отвечали не чистым, а смешанным состояниям. Подпространства $\mathcal{H}_k$ называются *суперотборными секторами* и представляют собой собственные подпространства оператора какой-либо сохраняющейся (в стандартном квантовомеханическом смысле перестановочности соответствующего оператора с гамильтонианом $H = \hat{p}_0$) физической величины. Задание подобной величины фиксирует некоторое конкретное правило суперотбора, и в $[W^3]$ были указаны два таких правила, связанные соответственно с оператором полного электрического заряда и с так называемым оператором унивалентности $(-)^{2s}$ (s — спин состояния). Очевидно, что всякий такой оператор, называемый *суперотборным оператором*, должен иметь вид $T = \sum \lambda_k P_k$, где P_k — проекторы на $\mathcal{H}_k$; а коль скоро все операторы наблюдаемых не могут переводить векторы из одного $\mathcal{H}_k$ в другое, то $\mathcal{H}_k$ суть инвариантные подпространства глобальной алгебры R , и оператор T , а также любой из проекторов P_k , коммутирует с R .

Давая название явлению, авторы хотели подчеркнуть аналогию с хорошо известными в квантовой механике и атомной физике правилами отбора: последние также означают равенство нулю всех вероятностей перехода между разными собственными подпространствами оператора сохраняющейся величины; однако в данном случае это равенство имеет место только для изолированной системы и может нарушаться при включении внешних воздействий. Иными словами, оба явления принадлежат к разряду правил запрета; но если правило отбора запрещает лишь спонтанные переходы между собственными состояниями сохраняющейся величины, то правило суперотбора запрещает любые переходы. Открытие таких правил вносило

¹⁾ Правила суперотбора — одна из тем, где уже сам язык алгебраического подхода весьма содействовал достижению простой и ясной картины. В ранних работах, еще не выходивших за рамки языка традиционной квантовой механики, описание базировалось на не вполне ясных и не математизированных понятиях, как-то физически реализуемые или нереализуемые состояния, неизмеримые фазы и т.п., и картина явления казалась довольно запутанной. Переход к общему формализму наблюдаемых и состояний легко устранил эту запутанность. В частности, центральное понятие "физически реализуемого состояния" $[[CB, 1-1]]$ получило дефиницию как чистое векторное состояние на глобальной алгебре (не смешивать с понятием физического состояния в алгебраическом подходе, разумеется, не включающим в себя требования чистоты).

важную модификацию в традиционный формализм квантовой механики: оказалось, что, вопреки обычным постулатам этого формализма, в квантовой теории, вообще говоря, не все эрмитовы операторы представляют наблюдаемые ($R \neq \mathcal{B}(\mathcal{H})$) и не все лучи в гильбертовом пространстве представляют чистые физические состояния. (Ясно, что эти два свойства равносильны друг другу.) Именно в этом и заключается физическая сущность правил суперотбора: согласно сжатой современной формулировке Строкки и Вайтмана [StW], "в своей наиболее общей форме правило суперотбора в квантовой теории может быть определено как любое ограничение на множество наблюдаемых данной теории". (Ниже нам придется уточнить эту дефиницию; см. определение 4.3 и дискуссию на с. 145.)

Задача изучения правил суперотбора порождает проблематику двоякого рода. Первый круг вопросов — физический: необходимо выяснить, какие же правила суперотбора существуют в реальных квантовых системах. Второй круг вопросов — математический: необходимо найти, какая структура множеств наблюдаемых и состояний отвечает системе с правилами суперотбора. Сразу понятно, что в релятивистской квантовой теории, где у нас отнюдь нет полного знания набора всех наблюдаемых (см. § 1), наличие правила суперотбора едва ли можно установить строгим формальным доказательством. С каждым таким правилом связана определенная наблюдаемая, измерение которой совместимо с измерениями любых наблюдаемых без исключения — и пока у нас нет явного описания множества всех (принципиально) возможных измерительных процедур, всякое утверждение о подобной универсальной совместимости некоторого измерения будет оставаться в какой-то мере дискуссионным, основанным лишь на "физических соображениях". Единственные свойства наблюдаемых, для обоснования которых не требуется входить в анализ конкретных измерительных процедур, — это аксиомы локальной квантовой теории. Но правила суперотбора нельзя относить к разряду аксиом хотя бы уже потому, что они являются глобальными свойствами, а по основным принципам локальной квантовой теории (§ 1, 2) аксиомы могут налагаться лишь на локальную структуру. В итоге утверждения о наличии правил суперотбора в реальных квантовых системах, не являясь ни аксиомами, ни теоремами, ни однозначными следствиями эксперимента (ибо последний не может установить совместимость заданной наблюдаемой со *всеми* другими), как правило, не имеют до конца строгого обоснования, и потому еще до сих пор иногда высказывается точка зрения, согласно которой никаких правил суперотбора вообще не существует. Оставляя, однако, в стороне эту экзотическую позицию (см. [Mi], где есть также история вопроса и ссылки), мы укажем сейчас основные правила суперотбора, которые считаются установленными для релятивистских квантовых систем.

Отметим сначала, что все правила суперотбора связаны со свойствами симметрии и законами сохранения для систем элементарных частиц. Выше мы видели, что каждое правило суперотбора связано с наличием целого семейства операторов из R' : в R' лежат все ограниченные операторы вида $\sum \lambda_k P_k$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$. В частности, можно взять $|\lambda_k| = 1$ для всех k , т.е. среди операторов из R' , отвечающих данному правилу суперотбора, имеются и унитарные, $V = V^{*-1}$. Это означает, что всякому правилу суперотбора

соответствует некоторая симметрия $V \cdot V^*$ квантовой системы (см. п. 3.5). Обратное, разумеется, неверно, и потому, в итоге можно сказать, что правилам суперотбора отвечает некоторый специальный подкласс симметрий (заметим, что термин "суперсимметрия" впервые был введен Яухом и Мисра в 1961 г. [JM] именно для обозначения этих "суперотборных" симметрий, оставляющих все наблюдаемые инвариантными). Такая связь правил суперотбора с симметриями означает, далее, что разделение всех симметрий на внешние (геометрические или кинематические, связанные с преобразованиями пространства-времени) и внутренние (динамические, связанные с характером взаимодействия) влечет за собой аналогичное разделение и для правил суперотбора. Оно здесь оказывается весьма существенным: та кардинальная роль в дальнейшем развитии алгебраического подхода и, прежде всего, в установлении связи между полями и наблюдаемыми, которую мы уже упоминали и будем ниже детально анализировать, — эта роль принадлежит не любым, а только динамическим правилам суперотбора. (Эта терминология не означает, однако, что динамические правила суперотбора присущи только системам с нетривиальной динамикой: они связаны с зарядами, а заряд может нести также и свободное поле. Так, динамическое правило суперотбора по электрическому заряду имеется в теории свободного поля Дирака.)

Перечень примеров начнем с простейшего правила суперотбора, которое также было и самым первым из обнаруженных.

1) Правило суперотбора по унивалентности. Это правило суперотбора действует в квантовых системах, имеющих в своем составе фермионы (возможно, наряду с бозонами), и разделяет множества состояний с целыми и полуцелыми значениями спина. Тем самым ему отвечает разложение всего из двух секторов, соответственно с бозонной и фермионной статистикой состояний:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_F$$

(такие разложения и отвечающие им правила суперотбора называются *дихотомическими*). В качестве суперотборного оператора выбирается обычно эрмитов и унитарный "оператор унивалентности"

$$U = P_B - P_F = (-)^{2s},$$

где s — полный спин состояния. U может отождествляться с оператором, реализующим в $\mathcal{H}$ операцию вращения на угол 2π [HKW]; он может также связываться с оператором U_T , реализующим отражение времени T [W³]. Очевидно, что это — кинематическое правило суперотбора.

2) Правило суперотбора "по типу" — другой пример кинематического правила суперотбора, впервые указанный Вайтманом в 1959 г. [W2]. Симметрии, порождающие это правило суперотбора, связаны с инверсиями: суперотборными секторами здесь служат собственные подпространства операторов $(-)^{2s} U_T^2$ и $(-)^{2s} (U_P U_T)^2$ (P — пространственное отражение по всем осям). В силу антиунитарности U_P и U_T каждый из этих операторов имеет два собственных значения ± 1 , так что $\mathcal{H}$ разлагается в ортогональную сумму четырех суперотборных секторов; по терминологии Вайтмана каждый из этих секторов включает состояния "с определенным типом". Все известные элементарные частицы принадлежат подпространству

(+, +), которое названо подпространством состояний типа I или же нормального типа.

3) Естественно ожидать, что правило суперотбора должно также разделять состояния частиц и состояния античастиц. Было показано, что такое правило суперотбора действительно имеет место, но только, в отличие от предыдущих случаев, не для любых систем элементарных частиц, а лишь для таких, где выполнено некоторое условие, связанное с поведением при временных отражениях. Дадим точную формулировку этого результата [АТТ].

Пусть $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ — взаимно ортогональные подпространства состояний, содержащих соответственно только частицы и только античастицы некоторого сорта. Пусть в $\mathcal{H}$ действует представление расширенной группы Пуанкаре, причем (антиунитарный) оператор U_T определен так, что он оставляет подпространства $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ инвариантными. Тогда $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ разделены правилом суперотбора в том и только в том случае, если все $\mathcal{P}_+^\dagger$ -инвариантные наблюдаемые системы T -инвариантны, т.е. для всех $A \in R$

$$[A, U(\mathcal{P}_+^\dagger)] = 0 \Rightarrow [A, U_T] = 0.$$

Указанное условие выполняется заведомо не для всех систем элементарных частиц: как было указано в [АТТ], оно нарушено, в частности, для дублета K^0 и $\bar{K}^0$ мезонов. Поскольку же наличие неинвариантных наблюдаемых влечет наличие неинвариантных состояний, то существуют частицы, состояния которых неинвариантны относительно отражения времени.

4) Наконец, из разряда кинематических правил суперотбора укажем еще правило, связанное с конформной группой $SO(4, 2)/C^2$. Как было показано в [Са], для систем, обладающих полной симметрией относительно этой группы (например, системы безмассовых частиц при высоких энергиях) и, возможно, также и для систем с нарушенной конформной симметрией (например, системы безмассовых частиц при промежуточных энергиях), к правилу суперотбора приводит закон сохранения полной спиральности, т.е. проекции спина на импульс. Суперотборным оператором здесь оказывается оператор $R = \exp[i\pi(I - \lambda)]$, где λ — оператор спиральности. Очевидно, что он имеет четыре собственных значения $\pm 1, \pm i$ и порождает разложение пространства состояний в прямую сумму четырех суперотборных секторов.

5) В квантовых системах, обладающих симметрией относительно группы Галилея, Баргманом [Ва] еще в 1954 г. было обнаружено, что имеет место правило суперотбора по массе (с тех пор известное как *правило суперотбора Баргмана*). Это есть, очевидно, кинематическое правило суперотбора в нерелятивистской квантовой теории. Суперотборным оператором здесь служит оператор массы, который имеет точечный спектр, заполняющий всю положительную вещественную полуось. Соответственно, здесь возникает бесконечное и даже несчетное семейство суперотборных секторов: гильбертово пространство состояний разлагается в непрерывную прямую сумму попарно ортогональных подпространств.

6) Поскольку суперотборные наблюдаемые интерпретируются как классические, макроскопические характеристики квантовой системы (см. ниже), то суперотбор естественно возникает в различных схемах теории

квантовых измерений: в формализме Пирона [Pi] он используется для описания измерительного акта, в теории Мачиды—Намики [Al1] он сопоставляется наблюдаемым, связанным с измерительным прибором, в других схемах с его помощью учитывается влияние внешнего окружения.

Обратимся, далее, к динамическим правилам суперотбора, которые порождаются внутренними симметриями систем элементарных частиц. В настоящее время к числу точных внутренних симметрий принято относить лишь четыре непрерывные однопараметрические группы $U(1)$, связанные с законами сохранения электрического Q , барионного B и двух лептонных L_e, L_μ зарядов; и каждой из этих симметрий отвечает и правило суперотбора. Таким образом, имеют место

7–10) Динамические правила суперотбора по "суперсохраняющимся" зарядам Q, B, L_e, L_μ . Соответствующие группы симметрии суть группы калибровочных преобразований первого рода (действующих на полевые операторы), и перечисленные заряды выступают как генераторы унитарных представлений этих групп в пространстве состояний системы. Одновременно они являются и суперотборными операторами (так что наблюдаемые, в отличие от полей, инвариантны при калибровочных преобразованиях: один из главных отличительных признаков, наблюдаемых в полевых системах). Они обладают целочисленным точечным спектром и порождают счетные семейства суперотборных секторов.

Этот перечень примеров несколько не притязает на полноту. В различных разделах квантовой теории указывались и другие правила суперотбора: скажем, суперотбор по числу частиц в фоковском формализме. Помимо этого, мы не затрагивали пока квантовополевых систем, выходящих за рамки традиционного формализма: калибровочных теорий, моделей с топологическими зарядами и т.п. В них, как мы ниже увидим (§ 6), возникают свои разновидности динамических правил суперотбора, которые могут обладать иной физической интерпретацией. Весьма важно, однако, что при всех физических различиях алгебраическая структура любых систем с правилами суперотбора — и притом не только глобальная, но и локальная (см. § 5) — в главных чертах всегда одинакова, универсальна. К нахождению этой универсальной структуры мы и переходим сейчас.

Сформулируем заново основные признаки, выделяющие систему с правилами суперотбора. Сначала возьмем простейший, дихотомический случай: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Было указано, что суперотборные секторы $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ должны быть инвариантными подпространствами глобальной алгебры:

$$R\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_k, \quad k = 1, 2. \quad (4.1)$$

Легко проверить, что этому равносильно следующее свойство: если Φ_λ — произвольная нормированная суперпозиция векторов из $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, т.е.

$$\Phi_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 + e^{i\lambda} \Phi_2), \quad \Phi_k \in \mathcal{H}_k, \quad k = 1, 2,$$

то для любых $A \in R$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$

$$(\Phi_{\lambda_1}, A\Phi_{\lambda_1}) = (\Phi_{\lambda_2}, A\Phi_{\lambda_2}). \quad (4.2)$$

Тем самым векторы Φ_{λ_1} и Φ_{λ_2} отвечают одному и тому же физическому

состоянию, и, следовательно, различающий их фазовый фактор $e^{i(\lambda_2 - \lambda_1)}$ является ненаблюдаемой величиной. Это — точная формулировка утверждения о "ненаблюдаемости относительной фазы между суперотборными секторами", часто встречаемого в физической литературе.

Условие (4.1) (или, равносильно, (4.2)) выражает взаимную разделенность суперотборных секторов. Как легко заметить, эта разделенность должна выражаться и еще в одном условии. В самом деле, в рамках формализма наблюдаемых и состояний физическое условие принадлежности к определенному суперотборному сектору должно относиться, конечно, не к отдельным векторам $\Phi \in \mathcal{H}$, а к физическим состояниям ω_Φ на R ; сектор должен быть не просто совокупностью векторов, а совокупностью физических состояний. Математическая формулировка этого условия очевидна: если $\mathcal{H}_k$ — суперотборный сектор, то вместе с любым $\Phi \in \mathcal{H}_k$ в $\mathcal{H}_k$ должен лежать и весь прообраз векторного состояния ω_Φ :

$$\bigvee_{\Phi \in \mathcal{H}_k} \mathfrak{M}_\Phi^R \subset \mathcal{H}_k, \quad k = 1, 2. \quad (4.3)$$

Легко показать, что это свойство эквивалентно инвариантности $\mathcal{H}_k$ относительно R' :

$$R'\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_k, \quad k = 1, 2. \quad (4.3')$$

Для этой цели получим следующее общее свойство прообразов:

$$\bigvee_{\Phi \in \mathcal{H}} L\{\mathfrak{M}_\Phi^R\} = \mathcal{H}_\Phi^{R'}. \quad (4.4)$$

Для любого $\Psi \in \mathfrak{M}_\Phi^R$ имеем

$$\|P_\Phi^{R'} \Psi\| = \omega_\Psi(P_\Phi^{R'}) = \omega_\Phi(P_\Phi^{R'}) = 1,$$

откуда $\Psi \in \mathcal{H}_\Phi^{R'}$. Применяя операцию $\overline{L\{\cdot\}}$ к соотношению

$$R'^U \Phi \subset \mathfrak{M}_\Phi^R \subset \mathcal{H}_\Phi^{R'} \quad (4.5)$$

(где левое включение очевидно), с учетом $L\{R'^U\} = R'$, имеем (4.4). Эквивалентность (4.3) и (4.3') следует из (4.4) сразу.

Следующим свойством является наличие для данного правила суперотбора суперотборного оператора: как мы указывали, такой оператор T должен коммутировать с R и иметь суперотборные секторы своими собственными подпространствами; но, помимо этого, он всегда связан с какой-либо симметрией системы и отвечает некоторой физической величине, т.е. является наблюдаемой. Таким образом, если число суперотборных секторов $\mathcal{H}_k$ конечно, и суперотборный оператор $T = \sum \lambda_k P_k$ заведомо ограничен, он должен лежать в R ; в силу же коммутативности T с R , T должен лежать и в центре $\mathcal{L}$.

Наконец, мы отмечали и еще одно необходимое свойство: суперпозиции векторов, лежащих в разных суперотборных секторах, всегда отвечают смешанным состояниям на R .

В итоге, система с дихотомическим правилом суперотбора характеризуется разложением пространства состояний $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, удовлетворяющим следующему набору свойств.

I. Суперпозиции векторов из $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ отвечают только смешанным состояниям.

II. А) Не допускаются переходы между $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ под действием операторов наблюдаемых:

$$(\Phi_1, A\Phi_2) = 0 \quad \forall A \in R, \quad \Phi_k \in \mathcal{H}_i, \quad k = 1, 2;$$

что равносильно, в суперпозиции Φ_λ векторов из $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ относительная фаза между компонентами из $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ является ненаблюдаемой:

$$(\Phi_{\lambda_1}, A\Phi_{\lambda_1}) = (\Phi_{\lambda_2}, A\Phi_{\lambda_2}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$$

и, что равносильно, секторы $\mathcal{H}_k$ — инвариантные подпространства R .

Б) Прообраз любого состояния ω_Φ , $\Phi \in \mathcal{H}_k$, лежит целиком в $\mathcal{H}_k$:

$$\forall \mathfrak{M}_\Phi^R \subset \mathcal{H}_k, \quad k = 1, 2, \\ \Phi \in \mathcal{H}_k$$

что равносильно, секторы $\mathcal{H}_k$ — инвариантные подпространства R' .

III. Существует оператор $T \in \mathcal{L}$ такой, что $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — его собственные подпространства.

Однако все эти свойства не являются независимыми между собой. Прежде всего, очевидно, что оба условия II и III равносильны тому, что проекторы P_k лежат в центре R , а это в свою очередь равносильно разложению R в прямую сумму алгебр фон Неймана, действующих соответственно в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$:

$$R = R_1 \oplus R_2, \quad R_k \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_k), \quad k = 1, 2.$$

Полный же набор взаимосвязей между свойствами I—III выражает простое

Предложение 4.1. Пусть задана квантовая система с глобальной алгеброй R . Тогда для произвольной дихотомии $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ пространства состояний $\mathcal{H}$ имеют место следующие соотношения между свойствами I—III:

$$I \Leftarrow II \Leftrightarrow III. \quad (4.6)$$

Доказательство вполне элементарно, и мы его опускаем. $\square$

Понятно, что если R — произвольная алгебра фон Неймана, то недостающая импликация в (4.6) заведомо не имеет места: множество "чистых векторов" (т.е. векторов $\Phi \in \mathcal{H}$ таких, что $\omega_{\Phi/\|\Phi\|}$ чисто) такой алгебры может быть пусто, условие I тогда выполняется автоматически для любой дихотомии $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ и не влечет никаких следствий. Однако такая ситуация заведомо расходится со сложившимися физическими представлениями: во всех физических анализах правил суперотбора твердо предполагалось, что условие I вполне содержательно, и его выполнение также служит, наряду с II и III, достаточным признаком наличия правила суперотбора. Поэтому указанная ситуация должна быть исключена, и наше описание правила суперотбора станет полным только тогда, когда в нем будет каким-то образом обеспечена и последняя импликация в (4.6). Этот завершающий элемент описания — в отличие от предшествующих! — уже должен быть ограничением не только на разбиение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, но и на алгебру R : условие I содержательно лишь тогда, когда в $\mathcal{H}$ имеются чистые векторы, а равносильность I свойствам II и III, как можно ожидать, будет некоторым условием на запас этих векторов. Сейчас мы найдем это условие.

Определение 4.1. Алгебру фон Неймана R будем называть *алгеброй Р-класса* (от английского pure — чистый), если множество $\mathcal{P}(R)$

всех ее чистых векторов является тотальным в $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \overline{L\{\mathcal{P}(R)\}} \equiv \mathcal{H}_p, \quad \mathcal{P}(R) = \{\Phi \in \mathcal{H} \mid \omega_{\Phi/\|\Phi\|} \in PV(R)\}.$$

Предложение 4.2. Пусть R — алгебра фон Неймана. Следующие условия эквивалентны:

1) для любого разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ каждое из свойств I–III влечет остальные два;

2) R есть алгебра P -класса.

Доказательство. Чтобы вывести импликацию $1 \rightarrow 2$, нам требуется простая

Лемма 4.3. Всякая алгебра фон Неймана R представима в виде $R = R_p \oplus R_m$, где R_p — алгебра P -класса, а R_m — алгебра фон Неймана, не имеющая чистых векторных состояний.

Доказательство леммы. Представив $\mathcal{H}$ в виде $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_p^\perp$, покажем, что проектор P_p на $\mathcal{H}_p$ лежит в $\mathcal{L}$. Для этого достаточно доказать, что для любого $\Phi \in \mathcal{P}(R)$

$$\mathcal{L}'\Phi \subset \mathcal{H}_p \tag{4.7}$$

(ибо тогда и $\mathcal{L}'\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_p$). Имеем $\mathcal{L}'\Phi = \overline{L\{R'\Phi\}}$. Поскольку вектор Φ чист тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}_\Phi^R$ — неприводимое подпространство R , то все векторы из $R\Phi$ отвечают чистым функционалам. Далее, для любого $\Psi \in \mathcal{P}(R)$ векторы из $R'\Psi$ также отвечают чистым функционалам, поскольку, как нетрудно проверить, функционал $\omega_{T\Psi}$, $T \in R'$, подчинен чистому функционалу ω_Ψ и, следовательно, совпадает с ним. Отсюда вытекает (4.7), и мы получаем $P_p \in \mathcal{L}$. Тем самым $R = R_p \oplus R_m$, где R_p и R_m — индукции R по проекторам P_p и $I - P_p$ соответственно. Очевидно, что

$$\mathcal{P}(R) = \mathcal{P}(R) \cap \mathcal{H}_p = \mathcal{P}(R_p), \quad \mathcal{P}(R_m) = \emptyset,$$

и лемма доказана. $\square$

Возвращаясь к предложению 4.2, допустим, что R не есть алгебра P -класса; тогда по лемме $R = R_p \oplus R_m$, где $R_m \neq 0$. По определению $\mathcal{H}_m$ найдется подпространство $\mathcal{H}_3 \subset \mathcal{H}_m$ такое, что проектор P_3 не лежит в центре алгебры R_m . Рассмотрим разбиение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, где $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_3$; очевидно, что $P_1, P_2 \notin \mathcal{L}$. Для этого разбиения выполняется свойство I (ибо все чистые векторы лежат в $\mathcal{H}_p$), но не выполняются свойства II и III (ибо они равносильны тому, что $P_1, P_2 \in \mathcal{L}$).

$2 \rightarrow 1$. Пусть R — алгебра P -класса, и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ — произвольная дихотомия $\mathcal{H}$. С учетом предложения 4.1, нам достаточно доказать, что если для этой дихотомии выполнено свойство I, то выполнены и II, III. В свою очередь для этого достаточно вывести $P_1, P_2 \in \mathcal{L}$. Прежде всего, из I имеем

$$\mathcal{P}(R) = (\mathcal{P}(R) \cap \mathcal{H}_1) \cup (\mathcal{P}(R) \cap \mathcal{H}_2), \tag{4.8}$$

откуда в силу $R\mathcal{P}(R) \subset \mathcal{P}(R)$, $R'\mathcal{P}(R) \subset \mathcal{P}(R)$ следует

$$R(\mathcal{P}(R) \cap \mathcal{H}_k) \subset \mathcal{P}(R) \cap \mathcal{H}_k, \quad R'(\mathcal{P}(R) \cap \mathcal{H}_k) \subset \mathcal{P}(R) \cap \mathcal{H}_k, \quad k = 1, 2. \tag{4.9}$$

Кроме того, из (4.8) также имеем

$$L\{\mathcal{P}(R)\} \cap \mathcal{H}_k = L\{\mathcal{P}(R) \cap \mathcal{H}_k\}, \quad k = 1, 2. \tag{4.10}$$

Если же R принадлежит P -классу, то $\overline{L\{\mathcal{P}(R)\}} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, что вместе с (4.10) дает

$$\overline{L\{\mathcal{P}(R) \cap \mathcal{H}_k\}} = \mathcal{H}_k, \quad k = 1, 2,$$

и отсюда в силу (4.9) имеем $R\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_k$, $R'\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_k$, $k = 1, 2$. $\square$

С л е д с т в и е 4.4. *Свойства I–III, характеризующие суперотборную структуру, все равносильны друг другу тогда и только тогда, когда R есть алгебра P -класса.*

Таким образом, с учетом сказанного выше, нам следует принять принадлежность алгебры R P -классу в качестве последнего из необходимых признаков наличия суперотбора. Теперь наш анализ дихотомического правила суперотбора полностью завершен, и, как его итог, мы можем сформулировать

О п р е д е л е н и е 4.2. Пусть задана квантовая система с глобальной алгеброй R P -класса, и существует разложение пространства состояний $\mathcal{H}$ в виде $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, удовлетворяющее какому-либо из структурных условий I–III (а следовательно, и всей совокупности этих условий). Тогда будем говорить, что в системе действует дихотомическое правило суперотбора, характеризуемое суперотборными секторами $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ и суперотборными операторами $T \in \mathcal{L}$ вида $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ ($\lambda_i \in \mathbf{R}^1$)).

Далее, вслед за дихотомическим следует аналогично рассмотреть произвольное правило суперотбора. Набор суперотборных секторов теперь может быть, вообще говоря, произвольным множеством — счетным, континуальным или любой другой мощности. Однако все структурные условия I–III, равно как и вывод о необходимой принадлежности алгебры R P -классу, характеризуют физическую суть не только дихотомического, но и вообще всякого суперотбора, и потому они должны сохраниться, пускай в модифицированных формулировках. Нетрудно найти соответствующие модификации.

Итак, положим, что для произвольного множества σ

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \mathcal{H}_\gamma. \quad (4.11)$$

Чтобы подпространства $\mathcal{H}_\gamma$ представляли собой суперотборные секторы, для разложения (4.11) должны быть, прежде всего, выполнены обобщения свойств I–III. Для свойств I и II такие обобщения очевидны: любые суперпозиции векторов, принадлежащих различным $\mathcal{H}_\gamma$, отвечают только смешанным состояниям (обобщение I); для каждой пары подпространств $\mathcal{H}_\gamma$, $\mathcal{H}_\beta$, $\gamma, \beta \in \sigma$, имеют место условия (4.1) и (4.4), а следовательно, и равносильные им (обобщение II). Далее, суперотборный оператор T также сохраняет прежний физический смысл как оператор, задающий суперотборное квантовое число; соответственно он должен коммутировать с R и одновременно быть наблюдаемой, а все подпространства $\mathcal{H}_\gamma$, $\gamma \in \sigma$, должны быть его собственными подпространствами. Поэтому он должен иметь вид $T = \sum_{\gamma \in \sigma} \lambda_\gamma P_\gamma$, $\lambda_\gamma \in \mathbf{R}$, $P_\gamma \in \mathcal{L}$ (P_γ — проекторы на $\mathcal{H}_\gamma$), и при бесконечном σ , в зависимости от набора коэффициентов λ_γ (или, точнее,

¹⁾ В случае $\lambda_i \in \mathbf{C}$ оператор T неэрмитов и потому не является наблюдаемой.

от выбора ограниченной функции $\lambda: \sigma \rightarrow \mathbf{R}$), он может быть неограниченным. В итоге имеем следующее обобщение III: существует оператор $T\eta\mathcal{L}$ (т.е. присоединенный к $\mathcal{L}$ и, вообще говоря, неограниченный) такой, что все $\mathcal{H}_\gamma$, $\gamma \in \sigma$, являются его собственными подпространствами. (Таким образом, P_γ служат спектральными проекторами T , и спектр T является чисто точечным, без непрерывной части.) Подобно дихотомическому случаю, непосредственно очевидно, что обобщения свойств II и III оба равносильны свойству $P_\gamma \in \mathcal{L} \ \forall \gamma \in \sigma$, и равносильны разложению глобальной алгебры в прямую сумму глобальных алгебр суперотборных секторов:

$$R = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} R_\gamma, \quad R_\gamma \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\gamma). \quad (4.12)$$

Обозначая полученные обобщения I'—III', мы просто убеждаемся, что для них справедливы те же соотношения, что и в дихотомическом случае, т.е. имеют место импликации

$$I' \Leftarrow II' \iff III',$$

а в том (и только в том) случае, когда R — алгебра P-класса, имеет место также и последняя импликация, т.е. следующие условия эквивалентны:

1) для любого разложения $\mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \mathcal{H}_\gamma$ каждое из свойств I—III влечет остальные два;

2) R есть алгебра P-класса.

Доказательства этих фактов прямо следуют доказательствам предложений 4.1 и 4.2. В итоге мы можем принять

О п р е д е л е н и е 4.3. Пусть задана квантовая система с глобальной алгеброй R P-класса, и существует разложение пространства состояний $\mathcal{H}$ в виде $\mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \mathcal{H}_\gamma$ (σ , вообще говоря, любое множество), удовлетворяю-

щее какому-либо из структурных условий I'—III', а, следовательно, и всей совокупности этих условий. Тогда будем говорить, что в системе действует *правило суперотбора* (общего вида), характеризуемое суперотборными секторами $\mathcal{H}_\gamma$ и суперотборными (вообще говоря, неограниченными) операторами $T\eta\mathcal{L}$, $T = \sum_{\gamma \in \sigma} \lambda_\gamma P_\gamma$.

Математическая суть данного определения проясняется, если взглянуть на него с позиций теории разложения алгебр фон Неймана; см. [[D, гл. II]] или [[БР, гл. 4]]. С точки зрения этой теории суперотборная структура, которую мы сопоставляем произвольному правилу суперотбора, есть не что иное, как разложение (4.11), (4.12) алгебры R и ее пространства $\mathcal{H}$, для которого алгеброй диагонализующих операторов служит подалгебра $\mathcal{L}_T \subset \mathcal{L}$, порождаемая суперотборным оператором T рассматриваемого правила суперотбора. Согласно одному из наших физических требований, T (а отсюда и все операторы из $\mathcal{L}_T$) должен иметь чисто точечный спектр; за счет этого разложения (4.11), (4.12), порождаемые алгеброй $\mathcal{L}_T$, имеют вид прямой суммы, а не прямого интеграла; обратно, если мы потребуем, чтобы эти разложения имели вид прямых сумм, то с необходимостью приходим к точечности спектра T . Эти связи с теорией разложения очень скоро окажутся для нас важными.

Далее, встает вопрос о достаточной полноте и общности нашей схемы. Согласно обычным концепциям для квантовых систем возможны два вида

правил суперотбора, дискретные и непрерывные, различающиеся тем, что для первых пространство состояний разлагается в прямую сумму, а для вторых — в прямой интеграл суперотборных секторов. В нашей же схеме допускается лишь первый вид разложений. С учетом этого — действительно ли наше определение 4.3 дает наиболее общий случай суперотборной структуры и охватывает все существующие и все в принципе возможные правила суперотбора?

Поскольку наша схема не постулируется, а вытекает однозначно из определенной системы физических допущений (а именно, из условий I'—III' и условия $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p$), то любые структуры, отличные от данной в определении 4.3, возможны лишь при отказе от той или иной части этих допущений. В свете этого возникший вопрос следует ставить так: существуют ли какие-либо "близкие" алгебраические структуры, которые, отличаясь от нашего определения, все же сохраняют некую "наиболее существенную" часть предполагаемых в нем физических свойств (например, позволяют ввести суперотборные секторы и связанный с центром суперотборный оператор) и потому могли бы рассматриваться как правила суперотбора некоторого иного вида? Так было бы, например, если бы в $\mathcal{L}$ имелись операторы с непрерывным спектром: их еще можно было бы считать суперотборными операторами, но порождаемое ими разложение $\mathcal{H}$ было бы прямым интегралом гильбертовых пространств. Для решения этого вопроса необходимы более детальные сведения о структуре алгебр Р-класса.

Предложение 4.5. Для произвольной алгебры фон Неймана R следующие условия эквивалентны:

- 1) R — алгебра Р-класса;
- 2) $R = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} R_\gamma$, где R_γ — факторы типа I;
- 3) R — алгебра типа I, и $\mathcal{L}$ включает только операторы с точечным спектром.

Доказательство. Удобнее всего установить эквивалентность 2 условиям 1 и 3. $2 \rightarrow 3$ очевидно, $3 \rightarrow 2$ следует из того, что абелевы алгебры операторов с чисто точечным спектром — это ближайшее обобщение конечномерных абелевых алгебр: если для всех $T \in \mathcal{L}$ $T = \sum_{\gamma \in \sigma(T)} \lambda_\gamma P_\gamma^{(T)}$, то существует и некоторое семейство $\{P_\gamma\}_{\gamma \in \sigma}$ взаимно ортогональных минимальных проекторов, порождающее $\mathcal{L}$ (ср. [GMN]):

$$\sum_{\gamma \in \sigma} P_\gamma = I, P_\gamma P_\beta = 0 \quad \forall \gamma, \beta \in \sigma, \left\{ \bigcup_{\gamma \in \sigma} P_\gamma \right\}'' = \mathcal{L}.$$

Отсюда в свою очередь вытекают дискретные разложения для $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$:

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \mathcal{C}(\mathcal{H}_\gamma), \quad \mathcal{L}' = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \mathcal{B}(\mathcal{H}_\gamma) \quad (4.13)$$

и дискретное центральное разложение для R :

$$R = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} R_\gamma, \quad \mathcal{L}_\gamma = \mathcal{C}(\mathcal{H}_\gamma),$$

и если R — типа I, то это же верно и для всех факторов R_γ .

$2 \rightarrow 1$. Из представления дискретного фактора R_γ в виде $R_\gamma = \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H}_2)$ легко увидеть, что R_γ — алгебра Р-класса; отсюда это верно и для $R = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} R_\gamma$.

1 $\rightarrow$ 2. Рассмотрим множество $\mathcal{P}_1(R)$ всех чистых единичных векторов R . Любой паре векторов $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{P}_1(R)$ отвечают неприводимые представления R , которые могут быть либо дизъюнкты, либо унитарно эквивалентны, так что их центральные носители $P_{\Phi_1}^{\mathcal{Z}'}$ и $P_{\Phi_2}^{\mathcal{Z}'}$ либо совпадают, либо взаимно ортогональны. Пусть $\mathcal{P}_1^0$ — максимальное множество векторов из $\mathcal{P}_1(R)$, для которых все $\mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{Z}'}$ попарно ортогональны. Поскольку $\mathcal{P}(R) \subset \bigcup_{\Phi \in \mathcal{P}_1^0} \mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{Z}'}$, то, с учетом 1,

$$\overline{L\{\mathcal{P}(R)\}} = \mathcal{H} = \bigoplus_{\Phi \in \mathcal{P}_1^0} \mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{Z}'} . \quad (4.14)$$

Поскольку же проекторы, отвечающие (4.14), лежат в $\mathcal{Z}$, то это разложение $\mathcal{H}$ порождает и разложение R :

$$R = \bigoplus_{\Phi \in \mathcal{P}_1^0} R_{P_{\Phi}^{\mathcal{Z}'}} . \quad (4.15)$$

Далее, индукция $R_{P_{\Phi}^{\mathcal{Z}'}} \rightarrow R_{P_{\Phi}^R}$ есть изоморфизм, так как центральный носитель $R_{P_{\Phi}^R}$ в $R_{P_{\Phi}^{\mathcal{Z}'}}$ есть единичный оператор на $\mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{Z}'}$. Следовательно, центры этих алгебр изоморфны, и из $R_{P_{\Phi}^R} = \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\Phi}^R)$ вытекает, что

$R_{P_{\Phi}^{\mathcal{Z}'}}$ — фактор, и притом типа I (как W^* -алгебра, изоморфная $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ в некотором $\tilde{\mathcal{H}}$). Таким образом, (4.15) есть искомое разложение R . $\square$

Вернемся теперь к вопросу о непрерывных правилах суперотбора. На самом общем уровне о наличии таких правил, противоположных дискретным, можно было бы говорить в трех случаях: 1) когда множество σ всех суперотборных секторов является не дискретным, а непрерывным, т.е. $\text{card } \sigma > \aleph_0$; 2) когда суперотборный оператор имеет не дискретный, а непрерывный спектр; 3) когда пространство состояний разлагается не в дискретную прямую сумму, а в непрерывный прямой интеграл суперотборных секторов:

$$\mathcal{H} \simeq \bigoplus \int \mathcal{H}(\xi) d\mu(\xi), \quad R \simeq \bigoplus \int R(\xi) d\mu(\xi). \quad (4.16)$$

Легко заметить, что два последних варианта эквивалентны друг другу: как видно из доказательства импликации 3 $\rightarrow$ 2, центральное разложение R происходит не в прямую сумму, а в прямой интеграл тогда и только тогда, когда в $\mathcal{Z}$ имеются операторы с непрерывным спектром. Если же мы рассматриваем отдельное правило суперотбора, то, как мы видели, соответствующая суперотборная структура есть такое разложение R , для которого алгеброй диагонализующих операторов служит подалгебра $\mathcal{Z}_T \subset \mathcal{Z}$, порождаемая суперотборным оператором T , и, совершенно аналогично, разложение по отношению к $\mathcal{Z}_T$ происходит не в прямую сумму, а в прямой интеграл тогда и только тогда, когда T имеет непрерывный спектр. Но, согласно предложению 4.5, для алгебры P -класса в $\mathcal{Z}$ (а следовательно, и среди операторов, присоединенных к $\mathcal{Z}$) не содержится операторов с непрерывным спектром. Мы заключаем: непрерывные пра-

вила суперотбора в смысле 2 или, равносильно, 3, описываемые прямыми интегралами суперотборных секторов, возможны лишь в случае, когда R не есть алгебра P -класса. В развитой выше схеме они исключаются. Вопросы о возможности выхода за рамки алгебр P -класса мы коснемся ниже, но стоит сразу заметить, что для структур вида (4.16) заведомо отсутствует подавляющая часть физических свойств, включаемых нами в понятие суперотбора: компоненты прямого интеграла не могут быть подпространствами $\mathcal{H}$, и для структуры (4.16), помимо отсутствия свойства $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p$, нельзя сформулировать ни свойство Π' , ни свойство I' .

В противоположность этому, наша схема вполне допускает непрерывные правила суперотбора в смысле 1, для которых суперотборные секторы, оставаясь подпространствами $\mathcal{H}$ и удовлетворяя всем физическим условиям, в то же время образуют несчетное множество ($\text{card } \sigma > \aleph_0$). Такой вид правил суперотбора выделяется простым математическим условием: как непосредственно очевидно, алгебра P -класса допускает суперотборные структуры с $\text{card } \sigma > \aleph_0$ в том и только в том случае, если ее центр $\mathcal{Z}$ не является σ -конечной алгеброй. Легко показать, что в этом случае алгебры R и $\mathcal{Z}$ не могут иметь ни тотализаторов, ни сепараторов. К указанному виду принадлежит, в частности, упоминавшееся выше правило суперотбора Баргмана по массе в квантовой теории, ковариантной относительно группы Галилея.

Наконец, вслед за анализом отдельного правила суперотбора нам необходимо рассмотреть, какая алгебраическая структура порождается совокупностью таких правил и, в частности, запасом всех правил суперотбора, присущих заданной квантовой системе; нужно также охарактеризовать этот запас в терминах алгебры R . Данные вопросы решаются без труда на основе предложения 4.5. Согласно этому предложению в случае алгебры P -класса все операторы, лежащие в $\mathcal{Z}$ или присоединенные к $\mathcal{Z}$, имеют только точечный спектр, и, согласно определению 4.3, каждому такому оператору отвечает правило суперотбора. Заданному правилу суперотбора сопоставляется не единственный оператор $T\eta\mathcal{Z}$, но, как легко видеть, всего единственный набор $\{P_\gamma\}_{\gamma \in \sigma}$ попарно ортогональных проекторов на суперотборные секторы или, что то же, единственное разложение единицы, лежащее в $\mathcal{Z}$. Таким образом, имеет место следующая характеристика запаса всех правил суперотбора:

существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех правил суперотбора заданной квантовой системы и множеством всех ортогональных разложений единицы из центра $\mathcal{Z}$ соответствующей глобальной алгебры P -класса.

Нетрудно увидеть, какая алгебраическая структура порождается этим множеством правил суперотбора. Поскольку любой паре правил суперотбора отвечают взаимно коммутирующие системы проекторов $\{P_\gamma\}_{\gamma \in \sigma_1}$ и $\{P_\beta\}_{\beta \in \sigma_2}$ (свойство "коммутативности правил суперотбора", имеющее место за счет $P_\gamma \in \mathcal{Z}$), то любые две суперотборные структуры в совокупности порождают третью, задаваемую разложением единицы $\{P_\gamma P_\beta\}_{\gamma \in \sigma_1, \beta \in \sigma_2}$ и, очевидно, "более тонкую": каждый ее сектор есть пересечение какого-либо сектора первой структуры и какого-либо сектора второй структуры. Аналогично, как следует из условия 2 предложения 4.5,

вся совокупность суперотборных структур также порождает некоторую единую, наиболее тонкую суперотборную структуру, и эта результирующая структура есть не что иное, как центральное разложение R . Секторы $\mathcal{H}_\gamma$ этой структуры — или, более полно, пары $\langle R_\gamma, \mathcal{H}_\gamma \rangle$, $R_\gamma \equiv R|_{\mathcal{H}_\gamma}$ — называются *когерентными суперотборными секторами*, и они выделены целым рядом важных отличий:

1) любой вектор, лежащий в когерентном секторе, является общим собственным вектором всего набора суперотборных операторов системы. Иначе говоря, всякий когерентный сектор есть пересечение семейства суперотборных секторов, выбранных по одному из каждой суперотборной структуры;

2) когерентные секторы являются "минимальными" секторами в том смысле, что внутри любого из них уже нельзя выделить никаких суперотборных секторов;

3) глобальные алгебры R_γ когерентных секторов являются факторами, тогда как для обычных секторов, отвечающих отдельным правилам суперотбора, они могут быть прямыми суммами факторов.

Итак, центральное разложение глобальной алгебры, в случае алгебр R -класса имеющее всегда вид

$$R = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} R_\gamma, \quad R_\gamma - \text{факторы типа I,}$$

интерпретируется как разложение R и $\mathcal{H}$ на минимальные или когерентные суперотборные секторы $\langle R_\gamma, \mathcal{H}_\gamma \rangle$. Очевидно, что для заданной квантовой системы оно единственно. Существование такого разложения — или что то же, существование минимальной, наиболее тонкой суперотборной структуры — тесно связано с коммутативностью правил суперотбора и, подобно последней, в нашей схеме обеспечивается автоматически, а в других описаниях — посредством особого постулата ("постулат Вайтмана о коммутативности правил суперотбора").

Тот факт, что разложение на когерентные секторы совпадает с центральным разложением алгебры наблюдаемых, несет немалое физическое содержание. Прежде всего, напомним, что в алгебраической статистической механике центральное разложение глобальной алгебры $\pi_\omega(\mathfrak{A})$ (где $\mathfrak{A}$ — квазилокальная алгебра статистической системы, π_ω — ее представление по физическому состоянию ω) есть, в типичных ситуациях, разложение состояния ω на чистые термодинамические фазы. Поэтому понятие когерентного сектора в квантовой теории поля параллельно понятию чистой фазы в статистической механике. Это — далеко идущая параллель не только математическая, но и физическая. Так, состояния, представляющие чистую фазу, выделяются тем, что они обладают фиксированными значениями макроскопических наблюдаемых [[P, § 6.5]]; этим же свойством, как легко видеть, наделены и состояния из когерентных секторов. Действительно, что такое макроскопические наблюдаемые? Макроскопические системы имеют классическое поведение, и все их наблюдаемые взаимно совместимы (т.е. алгебры наблюдаемых таких систем должны быть абелевы, что и подтверждается в наличных конструкциях (см., например, [C], [CG; Gi])). Для квантовой же системы ее классическими или макроскопическими наблюдаемыми будут те, которые совместимы

со всеми другими наблюдаемыми, т.е., в W^* -описании, наблюдаемые из центра $\mathcal{Z}$ глобальной алгебры, и в когерентных секторах все такие наблюдаемые имеют фиксированные значения. Связи между когерентными секторами и чистыми фазами мы еще коснемся в п. 7.2, а сейчас заметим, что ее обсуждение подвело нас также к известному вопросу о "глобальной природе правил суперотбора". Мы видим, что разложение на когерентные секторы — это такое разложение, в котором достигается полное разделение классических (макроскопических) и квантовых (микроскопических) свойств системы: центр $\mathcal{Z}$ есть алгебра классических наблюдаемых, и компоненты центрального разложения суть чисто квантовые системы, у которых такая алгебра тривиальна и которые отличаются друг от друга значениями суперотборных наблюдаемых, лежащих в $\mathcal{Z}$ и потому классических. Иначе говоря, физические характеристики, по которым происходит суперотбор, всегда имеют классическую, макроскопическую природу. В § 5, где мы изучим пространственно-временное строение систем с правилами суперотбора, этот вывод получит точную формулировку.

Построение же глобальной теории суперотбора в существенном завершено. Следует лишь отметить некоторые физические следствия из того факта, что глобальные алгебры когерентных секторов, вообще говоря, не являются неприводимыми, а представляют собой произвольные дискретные факторы.

Первый круг следствий касается принципа суперпозиции. В секторах с $R_\gamma \neq \mathcal{B}(\mathcal{H}_\gamma)$ (которые называются *неабелевыми*, поскольку для них коммутант R'_γ — неабелева алгебра) имеются не только чистые векторы, и потому выполнение в них этого принципа заранее вовсе не очевидно. Действительно, его обычная формулировка утверждает, что суперпозиция векторов, отвечающих чистым физическим состояниям, также задает чистое физическое состояние, т.е.

$$\omega_\Phi, \omega_\Psi \in PV(R) \Rightarrow \omega_{N^{-1}(\Phi + e^{i\lambda}\Psi)} \in PV(R), \quad (4.17)$$

$$\omega_{N^{-1}\chi} \equiv \omega_{\|\chi\|^{-1}\chi}.$$

Однако, по существу, такая формулировка чрезмерно ограничительна: физическое содержание, требуемое от принципа суперпозиции, отнюдь не приводит с необходимостью к (4.17). В самом общем виде это содержание заключается в следующем: о выполнении принципа суперпозиции для некоторого множества состояний (или некоторого подпространства $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$) мы говорим в случае, если состояния, получаемые в результате суперпонирования, взаимного наложения любых чистых состояний из этого множества (или же состояний вида ω_Φ , где Φ — чистый вектор из $\mathcal{M}$) в свою очередь сами тоже оказываются чистыми. Однако операция суперпонирования состояний может определяться по-разному. Ясно, что здесь эта операция должна пониматься в смысле образования линейных комбинаций не самих состояний ω_{Φ_i} (такие комбинации $\sum \lambda_i \omega_{\Phi_i}$, по определению, суть смеси), а соответствующих им векторов. Но каждому состоянию отвечает не единственный вектор, а многомерный (вообще говоря) прообраз $\mathfrak{M}_{\Phi_i}^R$; и это означает, что суперпозициями векторных состояний

ω_Φ и ω_Ψ мы должны считать не только состояния $\omega_{N^{-1}(\Phi + e^{i\lambda}\Psi)}$, но и любые состояния $\omega_{N^{-1}(\Phi_1 + e^{i\lambda}\Psi_1)}$, где $\Phi_1 \in \mathfrak{M}_\Phi^R$, $\Psi_1 \in \mathfrak{M}_\Psi^R$. (Будем называть такие состояния *обобщенными суперпозициями* ω_Φ и ω_Ψ .) Обычный принцип суперпозиции требует, чтобы все такие суперпозиции были чистыми состояниями, и, как нетрудно проверить, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\gamma$ дискретного фактора R_γ это требование не выполняется: множество всех чистых векторов здесь не есть линейал (именно, при $\Phi, \Psi \in \mathcal{P}(R_\gamma)$ $\Phi + \Psi \notin \mathcal{P}(R_\gamma)$ тогда и только тогда, когда Φ и Ψ принадлежат различным неприводимым подпространствам R'_γ и одновременно — различным неприводимым подпространствам R'_γ [X3, лемма 3]. Естественным обобщением данного требования является условие, чтобы к чистым состояниям принадлежала хотя бы одна из обобщенных суперпозиций. Как мы сейчас убедимся, такое ослабленное требование уже выполняется для R_γ .

О п р е д е л е н и е 4.4. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство алгебры фон Неймана R . Будем говорить, что в подпространстве $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ выполняется *обобщенный принцип суперпозиции*, если для любых двух чистых векторных состояний ω_Φ и ω_Ψ с $\Phi, \Psi \in \mathcal{M}$ найдутся векторы $\Phi_1 \in \mathfrak{M}_\Phi^R \cap \mathcal{M}$ и $\Psi_1 \in \mathfrak{M}_\Psi^R \cap \mathcal{M}$, нормированная суперпозиция которых также отвечает чистому состоянию:

$$\forall_{\substack{\Phi, \Psi \in \mathcal{M} \cap S_1 \\ \Phi, \Psi \in \mathcal{P}(R)}} \exists_{\substack{\Phi_1, \Psi_1 \in \mathcal{M} \cap S_1 \\ \Phi_1 \in \mathfrak{M}_\Phi^R, \Psi_1 \in \mathfrak{M}_\Psi^R}} \omega_{N^{-1}(\Phi_1 + \Psi_1)} \in PV(R).$$

Состояние $\omega_{N^{-1}(\Phi_1 + \Psi_1)}$ будем при этом называть *когерентной суперпозицией* состояний ω_Φ и ω_Ψ .

П р е д л о ж е н и е 4.6. Во всяком когерентном секторе $\langle R_\gamma, \mathcal{H}_\gamma \rangle$ выполняется обобщенный принцип суперпозиции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, нам потребуется следующее свойство чистых векторных состояний.

Л е м м а 4.7. Для произвольной алгебры фон Неймана R векторное состояние ω_Φ чисто тогда и только тогда, когда его прообраз заполняет всю единичную сферу в подпространстве $\mathcal{H}_\Phi^{R'}$:

$$\omega_\Phi \in PV(R) \iff \mathfrak{M}_\Phi^R = \mathcal{H}_\Phi^{R'} \cap S_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. **Не о б х о д и м о с т ь.** Как уже отмечалось, прямая проверка показывает, что $\omega_{T\Phi/\|T\Phi\|} < \omega_\Phi$ для всех $T \in R'$, откуда при $\omega_\Phi \in PV(R)$ имеем $(R'\Phi) \cap S_1 \subset \mathfrak{M}_\Phi^R$. Учитывая еще (4.5), получаем

$$(R'\Phi) \cap S_1 \subset \mathfrak{M}_\Phi^R \subset \mathcal{H}_\Phi^{R'} \cap S_1. \quad (4.18)$$

Но, как легко показать [CX1], любой прообраз $\mathfrak{M}_\Phi^R$ есть замкнутое множество, и потому из (4.18) имеем сразу искомое.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Покажем, что при $\mathfrak{M}_\Phi^R = \mathcal{H}_\Phi^{R'} \cap S_1$, всякий положительный функционал ω , подчиненный ω_Φ , совпадает с ним. В случае, когда Φ — циклический вектор R , хорошо известно [[Н, с. 237]], что

$$\omega < \omega_\Phi \Rightarrow \omega = \omega_{T\Phi}, \quad T \in R'.$$

Как нетрудно показать ([CX1], теорема 1), этот результат справедлив и в общем случае для любого $\Phi \in S_1$. Искомое утверждение вытекает отсюда сразу: так как $T\Phi/\|T\Phi\| \in \mathcal{H}_\Phi^{R'} \cap S_1 = \mathfrak{M}_\Phi^R$, то $\omega_{T\Phi/\|T\Phi\|} = \omega = \omega_\Phi$. $\square$

Теперь, чтобы построить когерентную суперпозицию чистых состояний ω_Φ и ω_Ψ , используем следующее свойство дискретных факторов:

$$\forall_{\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{P}(R)} \quad \mathcal{H}_{\Phi_1}^R \cap \mathcal{H}_{\Phi_2}^{R'} \neq \{0\}. \quad (4.19)$$

(Простой вывод (4.19) из (4.4) и леммы 4.7 мы предоставляем читателю.) Выбрав в секторе $\langle R_\gamma, \mathcal{H}_\gamma \rangle$ произвольный вектор $\chi \in \mathcal{P}(R_\gamma)$, заметим, что в силу (4.19) и леммы 4.7

$$\exists_{\Phi_1, \Psi_1} \quad \mathcal{H}_\chi^R \cap \mathfrak{M}_\Phi^R \ni \Phi_1 \neq 0, \quad \mathcal{H}_\chi^R \cap \mathfrak{M}_\Psi^R \ni \Psi_1 \neq 0.$$

По построению $\omega_{\Phi_1} = \omega_\Phi$, $\omega_{\Psi_1} = \omega_\Psi$, $\Phi_1 + \Psi_1 \in \mathcal{H}_\chi^R \subset \mathcal{P}(R_\gamma)$, и потому состояние $\omega_{N^{-1}(\Phi_1 + \Psi_1)} \in PV(R)$ — когерентная суперпозиция ω_Φ и ω_Ψ . $\square$

Название когерентной суперпозиции, которое мы дали построенной суперпозиции чистых состояний, продиктовано физическим содержанием понятия когерентности: взаимно когерентными называют такие чистые состояния, которые, суперпонируя между собой, способны вновь образовывать чистые состояния. (Как следует отсюда, принцип суперпозиции и свойство когерентности теснейше связаны между собой: по существу, когерентность некоторой системы чистых состояний и выполнение для нее принципа суперпозиции суть только разные формулировки одного и того же физического свойства.) В свете этого предложение 4.6 существенно дополняет физическую интерпретацию когерентного сектора: оно показывает, что такое его название в полном смысле оправдано, поскольку все чистые состояния из одного сектора взаимно когерентны. Верно также обратное: любые два взаимно когерентных состояния всегда лежат в одном когерентном секторе. Чтобы убедиться в этом, проверим равносильное утверждение: чистые состояния из разных когерентных секторов не могут образовывать когерентные суперпозиции. Действительно, если $\Phi \in \mathcal{H}_\gamma$, $\Psi \in \mathcal{H}_\beta$, $\gamma \neq \beta$, то и $\mathfrak{M}_\Phi^R \subset \mathcal{H}_\gamma$, $\mathfrak{M}_\Psi^R \subset \mathcal{H}_\beta$, и для любой пары $\Phi_1 \in \mathfrak{M}_\Phi^R$, $\Psi_1 \in \mathfrak{M}_\Psi^R$ вектор $\Phi_1 + \Psi_1$ не является чистым. Отсюда следует, что наше понятие взаимной когерентности обладает еще одним разумным свойством: два чистых состояния взаимно когерентны тогда и только тогда, когда они унитарно эквивалентны; как нетрудно показать [X3], их когерентная суперпозиция также унитарно эквивалентна им и является единственной с точностью до относительной фазы.

Другие трактовки принципа суперпозиции предлагались в рамках квантовой механической аксиоматики Яуха—Пирона [[J]], квантовой логики [Ch1], квантовой теории измерений [Нер]; сравнение с ними, а также более детальный анализ когерентных суперпозиций и обобщенного принципа суперпозиции проведены в [X3; En].

Отличие обобщенного принципа суперпозиции от обычного (4.17) имеет место исключительно в неабелевых когерентных секторах. В этой связи естественно возникает вопрос: а нужны ли, в самом деле, такие секторы?

В каких случаях, для каких квантовых систем действительно требуется их присутствие? До сих пор мы отнюдь не имели ответа на этот вопрос: мы изучали неабелевы секторы только на том основании, что они в принципе допускаются нашей схемой. Но полного ответа и нельзя получить в рамках чисто глобального формализма: физические свойства, выделяющие неабелевы секторы, выясняются лишь на базе исследования локальной структуры систем с правилами суперотбора. В § 6 мы укажем ряд таких свойств, в частности "параметр неабелевости" k'_γ (кратность дискретного фактора R_γ , равная 1 для абелева и одному из натуральных $n > 1$ или ∞ для неабелева сектора) получит глубокую интерпретацию как параметр, определяющий тип (пара)статистики когерентного сектора. На глобальном же уровне можно указать следующую особенность систем с неабелевыми секторами: в таких (и только таких) системах, помимо правил суперотбора, должны присутствовать и некоторые другие ограничения на множество наблюдаемых. Действительно, если правила суперотбора — единственный вид ограничений на алгебру R , то тем самым к наблюдаемым должны принадлежать все эрмитовы операторы, коммутирующие с суперотборными операторами, т.е. $R = \mathcal{L}'$; но тогда $R' = \mathcal{L}$, и все когерентные секторы абелевы. Наличие таких "несуперотборных" ограничений на множество наблюдаемых — несколько не экзотический случай. Как указывали еще в 1965 г. Вигнер и др. [H VW], "весьма маловероятно, чтобы все ограничения на измеримость самосопряженных операторов могли бы быть сформулированы в виде правил суперотбора". Нетрудно, в частности, указать широкий класс примеров, когда возникают неабелевы когерентные секторы: в моделях квантовой теории поля наблюдаемые весьма часто выделяются по свойству калибровочной инвариантности, т.е. глобальная алгебра R определяется как коммутант действующего в пространстве состояний унитарного представления $U(G)$ некоторой калибровочной группы G : $R = U(G)'$. И весьма просто убедиться (с помощью теоремы Петера–Вейля о разложении представления U на неприводимые), что во всех случаях, когда группа G компактна и неабелева, R есть алгебра Р-класса, а ее центральное разложение есть разложение на неабелевы когерентные секторы; при этом каждый сектор есть класс унитарной эквивалентности некоторого неприводимого представления G , а его "параметр неабелевости" k'_γ совпадает с размерностью данного представления.

В заключение коснемся еще раз вопроса о степени общности глобальной структуры Р-класса. При обсуждении непрерывных правил суперотбора мы уже отмечали, что отказ от этой структуры влечет утрату целого ряда физических понятий и свойств, прочно связываемых с явлением суперотбора: исчезают понятия суперпозиции векторов из разных суперотборных секторов и относительной фазы между секторами, не могут быть сформулированы структурные условия I и II и т.д. Но главное обстоятельство заключается в том, что это — единственная глобальная структура, в которой пространство состояний содержит чистые (векторные или нормальные) состояния. Как следует из леммы 4.3, если только чистые векторные состояния вообще существуют, они с необходимостью образуют структуру Р-класса, множество всех чистых векторов всегда либо пусто, либо тотально (либо — тривиальная комбинация этих случаев: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_m$). Поэтому единственную альтернативу структуре Р-класса составляют такие глобаль-

ные структуры, для которых в пространстве состояний не имеется ни одного чистого состояния. Они вполне обычны, например, в статистической механике (где глобальные алгебры чистых фаз с ненулевой температурой — факторы типа III), однако и в квантовой механике и в квантовой теории поля, с позиций их традиционной физической интерпретации, идея пространства состояний без единого чистого состояния представлялась бы неприемлемой; еще в книге Стритера и Вайтмана [[CB]] под "состояниями" понимались лишь исключительно чистые состояния. (Напомним, кстати, что при наличии вакуумного вектора в пространстве состояний постулаты локальной квантовой теории с необходимостью приводят к глобальной алгебре типа I (предложения 3.46); иначе говоря, глобальная алгебра вакуумного сектора всегда дискретна). Тем самым в рамках этой интерпретации алгебры Р-класса должны рассматриваться как универсальный класс глобальных алгебр для релятивистских квантовых систем. Но стоит при этом заметить, что сами рамки традиционной интерпретации в современной теории нередко раздвигаются или отбрасываются. Изучение таких новых классов квантовополевых систем, как калибровочные поля, киральные и солитонные модели, модели с фазовыми переходами, нередко приводит к таким формализмам, где стандартная интерпретация нуждается в обобщении или же пересмотре. Во всех подобных случаях адекватность либо неадекватность глобальной структуры Р-класса уже неочевидна; соответствующий пример мы встретим в § 7. Сюда же относятся и безмассовые теории: в них алгебра наблюдаемых как для свободных [DS 1, 2; DFG; Bog 2], так и для взаимодействующих [BD] систем, может обладать положительными, но не имеющими, конечно, вакуума, представлениями типа II или III. Физические выводы отсюда вполне естественны: при наличии безмассовых частиц требуется новая трактовка феномена суперотбора, принципа суперпозиции и многих элементов интерпретации квантовой теории. Однако пока такая трактовка отсутствует.

§ 5. ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПРАВИЛ СУПЕРОТБОРА: СВОЙСТВА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КОГЕРЕНТНЫХ СЕКТОРОВ

Как мы указывали, теория правил суперотбора должна стать исходным этапом на пути к тому, чтобы ввести в формализм наблюдаемых и состояний полевые свойства и полевые объекты. Действительно, вполне прозрачные физические соображения показывают тесную связь суперотборных структур с таковыми объектами. Интуитивно мы представляем квантованное поле как поток квантов — элементарных носителей квантовых чисел, характеризующих релятивистскую квантовую систему, таких, как заряд, спин, странность, барионное и лептонное число и т.п. Если состояние системы обладает определенными значениями квантовых чисел, то квант поля, действуя на него, изменяет эти значения. С квантовыми числами связываются законы сохранения, симметрии, а также и правила суперотбора; в последнем случае оператор соответствующей физической величины является суперотборным оператором, а множество всех состояний с заданным значением этой величины образует суперотборный сектор. (В частности, к суперотборным квантовым числам принадлежат всевозможные заряды, поскольку с зарядами всегда связаны градиентные группы, а, как мы

видели выше, представления градиентных групп порождают в пространстве состояний суперотборную структуру.) И очевидно, что в таком случае поле будет переводить состояния из одного суперотборного сектора в другой (тогда как наблюдаемые сохраняют эти сектора!). Мы получаем первый элементарный вывод: если задана локальная квантовая теория с динамическими правилами суперотбора, то в ней, наряду с наблюдаемыми, имеются (неявно) и полевые объекты, которым должны соответствовать операторы в пространстве состояний, отображающие один суперотборный сектор в другой.

Но, разумеется, отнюдь не всякий из таких операторов будет оператором поля. Подобно наблюдаемым, поля — локальные величины, они связаны с областями пространства-времени и обладают как глобальными, так и локальными (пространственно-временными) свойствами. Понятно, что поведение полей по отношению к суперотборной, т.е. глобальной, структуре квантовой системы относится к разряду глобальных свойств. Локальные же свойства полей, помимо главного свойства сосредоточения в областях $O \subset M$ (в силу которого поля, как и наблюдаемые, должны порождать сеть алгебр, отвечающих областям $O \in B(M)$), включают также перестановочные соотношения, сингулярности на малых расстояниях, асимптотическое поведение и т.п. И объекты, которые наделены не только глобальными, но и локальными свойствами полей, должны обладать определенным поведением не только по отношению к алгебре R , но и к алгебрам $R(O)$. Естественный класс таких объектов составляют операторы переплетения представлений алгебр $R(O)$ в когерентных секторах. Поэтому наш первый вывод уточняется так: *в рамках теории наблюдаемых поля должны возникать как операторы переплетения локальных алгебр суперотборных секторов.* Эта гипотеза, впервые выдвинутая Борхерсом в 1965 г. [B5], стала центральной для нового этапа развития алгебраического подхода. Она доставляла новый взгляд и на само понятие поля. Как ранее полагали (на базе очевидных теоретико-групповых соображений, а также единой спинорной теории Гейзенберга), если в квантовой теории поля вообще существуют некие первичные объекты, из которых построены все остальные, такими объектами могут быть только спинорные поля. Новая же идея предлагала строить любые поля из наблюдаемых, объектов с бозонной статистикой, открывая не подозреваемую прежде возможность построения фермионов из бозонов. (Заметим, однако, что полностью эта идея не осуществлена до сих пор. Она успешно проверена в некоторых моделях (см. § 6), но для общего случая обычный аппарат операторов переплетения оказывается слишком узок. Встающие задачи его обобщения приводят к глубокой проблематике К-теории для C^* -алгебр и теории двойственности для компактных групп; см. [DR1, 2].)

Реализация указанной идеи использует абстрактный способ описания суперотборной структуры как семейства представлений C^* -алгебры $\mathfrak{A}^1$).

¹) Абстрактное обобщение определения когерентного сектора можно сформулировать несколькими эквивалентными способами. Если теория (как часто бывает, см § 6) задана не алгеброй P -класса и не абстрактной алгеброй $\mathfrak{A}$, но квазилокальной алгеброй $\mathfrak{A}_0$ некоторого выделенного когерентного сектора $\langle R_0, \mathcal{H}_0 \rangle$, другие секторы могут рассматриваться как (факторные типа I) представления $\mathfrak{A}_0$. С другой стороны, задание факторного типа I представления $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}_0$ равносильно заданию

Он просто связан с развитым в § 4 конкретным способом описания этой структуры как центрального разложения W^* -алгебры R . Если задана локальная квантовая теория $\langle R, \mathcal{H} \rangle$ с суперотборной структурой $\mathcal{H} = \bigoplus_{\gamma \in \sigma} \mathcal{H}_\gamma$, то каждый когерентный сектор $\mathcal{H}_\gamma$ можно определить как субпредставление-сужение алгебры $\mathfrak{A}$:

$$\pi_\gamma: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_\gamma \equiv \mathfrak{A}|_{\mathcal{H}_\gamma}$$

(факторное типа I). Аналогично, определим представления

$$\pi_\gamma^{(O)} = \pi_\gamma|_{R(O)}: R(O) \rightarrow R(O)|_{\mathcal{H}_\gamma}.$$

Неограниченным областям вида O' с $O \in B(M)$ ввиду возможности $R(O') \not\subseteq \mathfrak{A}$ сопоставим особое семейство представлений: $\pi_\gamma^{(O')} = \pi_\gamma|_{\mathfrak{A}(O')}: \mathfrak{A}(O') \rightarrow \mathfrak{A}(O')|_{\mathcal{H}_\gamma}$, $\mathfrak{A}(O') = \bigvee_{\tilde{O} \subset O'} R(\tilde{O})$. Если два представления $\pi_\alpha^{(O)}$ и $\pi_\beta^{(O)}$

(или $\pi_\alpha^{(O')}$ и $\pi_\beta^{(O')}$), $\alpha, \beta \in \sigma$, квази- или унитарно эквивалентны, то существуют операторы переплетения $T_{\alpha\beta}^{(O)}$ (соответственно $T_{\alpha\beta}^{(O')}$), которые отображают $\mathcal{H}_\beta$ в $\mathcal{H}_\alpha$, а, кроме того, наделены и локальными свойствами, поскольку

$$T_{\alpha\beta}^{(O)} P_\beta \in R(O)', \quad T_{\alpha\beta}^{(O')} P_\beta \in R(O')'.$$

Среди таких семейств операторов и следует, очевидно, искать полевые объекты. Поэтому очередной задачей должно стать изучение свойств эквивалентности введенных семейств представлений: необходимо выяснить, являются ли нужные нам свойства следствиями аксиом локальной квантовой теории, и если нет, то какими дополнительными условиями можно обеспечить их выполнение.

Для каждого из трех семейств представлений определены три известных вида эквивалентности: слабая или физическая, квазиэквивалентность и унитарная эквивалентность, обозначаемые соответственно символами $\sim$, $\approx$ и $\simeq$ (§ 1). Суперотборная структура характеризуется, в результате, девятью видами эквивалентности когерентных секторов.

О п р е д е л е н и е 5.1. Когерентные секторы $\langle R_\alpha, \mathcal{H}_\alpha \rangle$ и $\langle R_\beta, \mathcal{H}_\beta \rangle$ будем называть:

- 1) *Физически эквивалентными*, если $\pi_\alpha \sim \pi_\beta$;
- 2, 3) *Физически эквивалентными локально (неограниченно)*, если

$$\pi_\alpha^{(O)} \sim \pi_\beta^{(O)} \quad (\pi_\alpha^{(O')} \sim \pi_\beta^{(O')});$$

- 4) *Квазиэквивалентными*, если $\pi_\alpha \approx \pi_\beta$;
- 5, 6) *Квазиэквивалентными локально (неограниченно)*, если

$$\pi_\alpha^{(O)} \approx \pi_\beta^{(O)} \quad (\pi_\alpha^{(O')} \approx \pi_\beta^{(O')}).$$

- 7) *Унитарно эквивалентными*, если $\pi_\alpha \simeq \pi_\beta$;
- 8, 9) *Унитарно эквивалентными локально (неограниченно)*, если

$$\pi_\alpha^{(O)} \simeq \pi_\beta^{(O)} \quad (\pi_\alpha^{(O')} \simeq \pi_\beta^{(O')}).$$

класса унитарной эквивалентности неприводимых представлений соответствующей алгебры, и такой класс эквивалентности также можно принять за абстрактное определение когерентного сектора.

Вопрос о том, вытекают ли эти свойства эквивалентности из аксиом локальной квантовой теории, решается с помощью простейшего контрпримера. Пусть задана некоторая совокупность теорий Хаага—Араки $\langle R_i, \mathcal{H}_i \rangle_{i \in I}$, в которых глобальные алгебры являются факторами типа I. Тогда мы можем построить новую теорию Хаага—Араки $\langle R, \mathcal{H} \rangle$, положив по определению для всех $O \in B(M)$

$$R(O) = \bigoplus_{i \in I} R(O)_i, \quad \mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i.$$

Это — теория Р-класса с когерентными секторами $\langle R_i, \mathcal{H}_i \rangle$, причем проекторы P_i на секторы $\mathcal{H}_i$ лежат в $R(O) \cap R'$. За счет этого всякий P_i является центральным носителем представления $\pi_i^{(O)}$, а также представлений $\pi_i^{(O')}$ и π_i , откуда следует, что во всех этих семействах представлений не может быть попарной квазиэквивалентности, тем более унитарной эквивалентности. Кроме того, $P_i \notin \ker \pi_i^{(O)}$, $P_i \in \ker \pi_j^{(O)} \quad \forall j \neq i$, и аналогично для семейств $\pi_i^{(O')}$ и π_i , так что эти семейства не могут быть и попарно физически эквивалентны. В итоге мы имеем пример теории Хаага—Араки с суперотборной структурой Р-класса (мы будем называть такие теории локальными теориями Р-класса), не удовлетворяющей ни одному из свойств 1—9.

Разумеется, свойства 1—9 не независимы, между ними имеются следующие очевидные импликации: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 6 \rightarrow 5$, $7 \rightarrow 9 \rightarrow 8$, $7 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, $8 \rightarrow 5 \rightarrow 2$, $9 \rightarrow 6 \rightarrow 3$. Кроме того, можно сразу заметить, что глобальные свойства 4 и 7 заведомо не имеют места, поскольку центральные носители представлений π_α и π_β (совпадающие соответственно с P_α и P_β) взаимно ортогональны. Среди остающихся свойств являются невыводимыми из других лишь свойства 1 и 9: физическая эквивалентность и неограниченная унитарная эквивалентность. К их анализу мы и обратимся сейчас.

Анализ физической эквивалентности секторов требует информации о структуре идеалов квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$ в локальной теории Р-класса. Но сначала мы рассмотрим структуру идеалов $\mathfrak{A}$ в общей теории Хаага—Араки. Ее главные свойства устанавливает известная теорема Борхерса [B8]:

Т е о р е м а 5.1. Пусть в теории Хаага—Араки выполнены аксиомы I—III, V, VI; пусть также $\mathcal{I}$ — замкнутый по норме двусторонний идеал $\mathfrak{A}$, $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ — центр $\mathfrak{A}$. Тогда

- 1) $\mathcal{I} \neq \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}} \neq \{0\}$;
- 2) $\mathcal{I}$ порождается множеством $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$, т.е. $\mathcal{I} = \mathfrak{A}(\mathcal{I} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}})$ и есть наименьший замкнутый по норме двусторонний идеал, содержащий $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$;
- 3) отображение $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ есть взаимно однозначное соответствие между замкнутыми по норме двусторонними идеалами $\mathfrak{A}$ и идеалами $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о использует следующее общее свойство идеалов C^* -алгебры, порождаемой сетью своих W^* -подалгебр.

Л е м м а 5.2. Пусть $\mathfrak{A}$ — C^* -алгебра в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, являющаяся C^* -индуктивным пределом последовательности $\{R_i\}_{i=1}^\infty$ алгебр фон Неймана:

$$R_i \subset R_{i+1} \subset \dots \subset \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} = \overline{\bigcup_{i=1}^\infty R_i}^{\|\cdot\|}$$

Пусть $\mathcal{J}$ — замкнутый по норме двусторонний идеал $\mathfrak{A}$. Тогда, начиная с некоторого n , $\mathcal{J} \cap R_n \neq \{0\}$, причем $\mathcal{J} \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i}^u = \mathcal{J}$.

Доказательство леммы. Пусть $A = A^* \in \mathcal{J}$, $\|A\| = 1$. Тогда для некоторого n в R_n найдется оператор B такой, что $B = B^*$, $\|A - B\| \leq 1/8$.

Аппроксимируя спектральное разложение $B = \int_{-N}^N \lambda dE_\lambda$, $E_\lambda \in R_n$, получаем, что существует набор попарно ортогональных спектральных проекторов $E_k \in R_n$, $k = -4, -3, \dots, 3, 4$, такой, что

$$\|B - \sum_{k=-4}^4 (k/4) E_k\| \leq 1/8.$$

Отсюда в совокупности с $\|A - B\| \leq 1/8$ вытекает

$$\|A - \frac{1}{4} \sum_{k=-4}^4 k E_k\| \leq 1/4, \quad (5.1)$$

причем из $\|A\| = 1$ следует, что не все E_k с $|k| \geq 3$ равны 0. Пусть теперь Π — некоторое точное представление C^* -алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{J}$, $\hat{T}$ — элемент $\mathfrak{A}/\mathcal{J}$, отвечающий $T \in \mathfrak{A}$. Тогда в силу $A \in \mathcal{J}$, $\hat{A} = \Pi(\hat{A}) = 0$ и из (5.1) имеем

$$\|\sum_{k=-4}^4 k \Pi(\hat{E}_k)\| \leq 1.$$

Отсюда, учитывая, что попарная ортогональность E_k влечет и $\Pi(\hat{E}_k) \Pi(\hat{E}_l) = \delta_{kl} \Pi(\hat{E}_k)$, имеем $\Pi(\hat{E}_k) = 0$ при $|k| > 2$, откуда, ввиду точности Π , $\hat{E}_k = 0$, что дает $E_k \in \mathcal{J} \cap R_n$, т.е. $\mathcal{J} \cap R_n \neq \{0\}$.

Для вывода последнего утверждения заметим, что из проделанного рассуждения вытекает следующее: для $A = A^* \in \mathcal{J}$ и любого $\epsilon > 0$ существует n такое, что в R_n найдутся операторы B, B_1 , для которых

$$\|A - B_1\| \leq \epsilon, \quad \|B - B_1\| \leq \epsilon, \quad B \in \mathcal{J} \cap R_n.$$

Отсюда следует, что $A \in \mathcal{J} \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i}^u$. $\square$

В силу леммы для (замкнутого по норме двустороннего) идеала $\mathcal{J}$ квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$ имеем

$$\mathcal{J} = \overline{\mathcal{J} \cap \mathcal{A}}^u, \quad (5.2)$$

и для некоторой $O \in B(M)$ существует $A = A^* = \int_{-M}^M \lambda dE_\lambda \in \mathcal{J} \cap R(O)$. По-

скольку $\mathcal{J} \cap R(O)$ — двусторонний идеал в $R(O)$, то для любого интервала $\Delta \subset [-M, M]$, не содержащего 0, имеем

$$A E_\Delta = \int_{\Delta} \lambda dE_\lambda \in \mathcal{J} \cap R(O),$$

$$E_\Delta = (A E_\Delta) \int_{\Delta} \lambda^{-1} dE_\lambda \in \mathcal{J} \cap R(O). \quad (5.3)$$

Далее, из определения эквивалентности проекторов сразу следует

$$E \in \mathcal{J} \cap R(O), \quad E \sim F \bmod R(O) \Rightarrow F \in \mathcal{J} \cap R(O). \quad (5.4)$$

Но в силу предложения 3.11 для любой области $O_1 \gg O$ и любого проектора $E \in R(O)$ найдется проектор F такой, что

$$F \sim E \bmod R(O_1), \quad F \in R(O_1) \cap R'.$$

Отсюда вместе с (5.4) следует, что существование нетривиального проектора $E_\Delta \in R(O) \cap \mathcal{J}$ влечет существование нетривиального проектора $F \in \mathcal{J} \cap R(O_1) \cap R' \subset \mathcal{J} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$, и утверждение 1 доказано.

Для доказательства 2 покажем сначала, что идеал $\mathcal{J} \cap R(O)$ порождается множеством $\mathcal{J}(O)^P$ своих проекторов. Действительно, в силу (5.3) для любого $\epsilon > 0$, $\epsilon < M$, имеем

$$E_\epsilon \equiv E_{(-M, -\epsilon)} + (I - E_{(-M, \epsilon)}) \in \mathcal{J}(O)^P,$$

и AE_ϵ лежит в идеале, порождаемом $\mathcal{J}(O)^P$. Но $\|A - AE_\epsilon\| \leq \epsilon$, и, следовательно, замыкание этого идеала совпадает с $\mathcal{J} \cap R(O)$. С учетом (5.2) это означает также, что $\mathcal{J}$ порождается множеством проекторов

$\bigcup_{O \in V(M)} \mathcal{J}(O)^P$. Пусть теперь $\mathcal{Y}$ — двусторонний замкнутый по норме идеал $\mathfrak{A}$, порождаемый идеалом $\mathcal{J} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ алгебры $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$; по определению $\mathcal{Y} \subset \mathcal{J}$. Для каждого $E \in \mathcal{J}(O)^P$, как мы видели, существует проектор F , эквивалентный E в некоторой алгебре $R(O_1)$ ($O_1 \gg O$) и лежащий в $\mathcal{J} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$. Такой проектор, очевидно, лежит в $\mathcal{Y}$, а тем самым и $E \in \mathcal{Y}$ и $\bigcup_{O \in V(M)} \mathcal{J}(O)^P \subset \mathcal{Y}$. Поскольку же $\bigcup_{O \in V(M)} \mathcal{J}(O)^P$ порождает $\mathcal{J}$, то $\mathcal{J} \subset \mathcal{Y}$, а значит, и $\mathcal{J} = \mathcal{Y}$.

Наконец, утверждение 3 вытекает из 2 с учетом коммутативности $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$. Если $\mathfrak{N}$ — идеал в $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$, то в $\mathfrak{A}$ им порождается замкнутый по норме двусторонний идеал $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$. Но в силу 2 любой такой идеал $\mathcal{J}$ из $\mathfrak{A}$ порождается идеалом $\mathcal{J} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$, т.е. имеет вид $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$ (с $\mathfrak{N} = \mathcal{J} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$), так что отображение $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{N}$ есть сюръекция. Обратно, всякий идеал $\mathfrak{N}$ из $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ представим в виде $\mathfrak{N} = \mathcal{J} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$, где $\mathcal{J} = \mathfrak{A}\mathfrak{N}$ — идеал в $\mathfrak{A}$, так что отображение $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ есть также сюръекция. $\square$

С л е д с т в и е 1. $\mathcal{J}$ есть максимальный двусторонний идеал в $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{J} \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ — максимальный идеал в $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$.

Доказательство следует из утверждения 3. $\square$

С л е д с т в и е 2. В произвольной теории Хаага–Араки следующие условия эквивалентны:

- 1) квазилокальная алгебра $\mathfrak{A}$ проста;
- 2) $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}} = \mathcal{C}(\mathcal{H})$

и вытекают из условия

- 3) глобальная алгебра R — фактор.

Доказательство требует лишь учета того, что $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ — единственная простая абелева C^* -подалгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Как мы увидим ниже, импликация $2 \rightarrow 3$ действительно не имеет места, и случаи ее нарушения ($\mathcal{L}_{\mathfrak{A}} = \mathcal{C}(\mathcal{H})$, но $\mathcal{L} \neq \mathcal{C}(\mathcal{H})$) выделяют обширный класс теорий с нетривиальным множеством физически эквивалентных когерентных секторов.

С л е д с т в и е 3. Пусть $\mathcal{J}$ — нетривиальный двусторонний идеал в алгебре всех локальных наблюдаемых $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{J}$ содержит нетривиальный проектор из центра $\mathcal{A} \cap R'$ этой алгебры.

Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения 1.

В локальной теории P -класса идеалы $\mathfrak{A}$ тесно связаны с классами физической эквивалентности когерентных секторов. Если задана произвольная

такая теория $\langle R, \mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha \in \sigma} \mathcal{H}_\alpha \rangle$, то множество σ ее когерентных секторов однозначно разбивается на множества σ_i , отвечающие классам физической эквивалентности:

$$\sigma = \bigcup_{i \in \Delta} \sigma_i \quad \forall \quad \alpha, \beta \in \sigma_i \quad \ker \pi_\alpha = \ker \pi_\beta.$$

Обозначив Q_i проектор на подпространство $\mathcal{H}_i = \bigoplus_{\alpha \in \sigma_i} \mathcal{H}_\alpha$, докажем

Предложение 5.3 [СХ4]. Пусть задана произвольная локальная теория Р-класса. Тогда квазилокальная алгебра $\mathfrak{A}$ и ее центр $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}$ имеют вид

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{i \in \Delta} \mathfrak{A} Q_i, \quad \mathcal{Z}_{\mathfrak{A}} = \bigoplus_{i \in \Delta} \mathcal{C}(\mathcal{H}_i).$$

Кроме того, для любого представления π_α его ядро есть максимальный двусторонний идеал в $\mathfrak{A}$, имеющий вид $(\alpha \in \sigma_i)$

$$\ker \pi_\alpha = (I - Q_i) \mathfrak{A}. \quad (5.5)$$

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}$ содержит хотя бы один нетривиальный проектор F ; ввиду $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}} \subset \mathcal{Z}$ имеем $F = \sum_{\alpha \in \sigma(F)} P_\alpha$, причем

$$\forall \quad \alpha \in \sigma(F) \quad F \notin \ker \pi_\alpha \quad \forall \quad \alpha \notin \sigma(F) \quad F \in \ker \pi_\alpha.$$

Отсюда $\sigma_i \cap \sigma_F \neq \emptyset$ влечет $\sigma_i \subset \sigma_F$, так что

$$F = \sum_{i \in \Delta_F \subset \Delta} Q_i. \quad (5.6)$$

Каждому $i \in \Delta$ сопоставим (заведомо непустое) множество

$$\mathcal{F}_i = \{F \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{A}} \mid F \geq Q_i\}.$$

По отношению к операции сравнения проекторов это есть частично упорядоченное множество, в котором, как видно из (5.6), любое линейно упорядоченное подмножество имеет нижнюю грань. По лемме Цорна $\mathcal{F}_i$ тогда имеет минимальный элемент $F_{m,i}$. Легко проверить, что $F_{m,i}$ — минимальный проектор в $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}$ и два минимальных проектора $F_{m,i}, F_{m,k}$ либо равны, либо ортогональны, а вся их совокупность в силу (5.6) образует разложение единицы: $I = \sum_{i \in \Delta} Q_i = \sum_{i \in \Delta} F_{m,i}$. Очевидно, что множество $M_i = F_{m,i} \mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}$ —

минимальный идеал в $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}$ (в противном случае существует идеал $M \subset M_i$, а в нем по теореме 5.1 проектор $F < F_{m,i}$, что невозможно). Тогда $N_i = (I - F_{m,i}) \mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}$ — максимальный идеал в $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}$ (в противном случае существует идеал $N \supset N_i$ такой, что $F_{m,i} N \neq 0$ (иначе $N = N_i$), а это влечет $F_{m,i} N \subset N \cap M_i \neq \{0\}$, что противоречит минимальности идеала M_i). Отсюда по следствию 1 теоремы 5.1 вытекает, что $\mathcal{J} = (I - F_{m,i}) \mathfrak{A}$ есть максимальный двусторонний идеал в $\mathfrak{A}$, причем для всех $\alpha \in \sigma_{F_{m,i}}$ $\mathcal{J} P_\alpha = 0$, т.е. $\mathcal{J} \subset \ker \pi_\alpha$, а так как $\ker \pi_\alpha$ — двусторонний идеал в $\mathfrak{A}$, то и $\mathcal{J} = \ker \pi_\alpha$ (так что $\ker \pi_\alpha$ — максимальный идеал). Но это значит, что для всех $\alpha, \beta \in \sigma_{F_{m,i}}$ $\ker \pi_\alpha = \ker \pi_\beta = \mathcal{J}$, так что для соответствующего $i \in \Delta$ $\sigma_{F_{m,i}} \subset \sigma_i$, т.е. $F_{m,i} < Q_i$. В силу (5.6) это влечет $F_{m,i} = Q_i$, и мы доказали второе утверждение предложения.

Вместе с тем мы также получили $Q_i \in \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$, откуда и

$$\bigoplus_{i \in \Delta} \mathcal{C}(\mathcal{H}_i) \subset \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}.$$

Обратное вложение получим с помощью элементарного факта: если $\mathcal{B}$ — *-подалгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, и $\{E_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ — разложение единицы из $\mathcal{B}'$, то

$$\mathcal{B} \subset \bigoplus_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{B}_k, \quad \mathcal{B}_k \equiv \mathcal{B}|_{E_k \mathcal{H}}.$$

Чтобы применить этот факт, нужно лишь показать, что для всех $i \in \Delta$

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}|_{\mathcal{H}_i} = \mathcal{C}(\mathcal{H}_i).$$

Для этой цели рассмотрим локальную теорию Р-класса $\langle R_{Q_i}, \mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha \in \sigma_i} \mathcal{H}_i \rangle$

в $\mathcal{H}_i$. Все ее секторы физически эквивалентны и, кроме того, отвечают точным представлениям $\pi_{\alpha}^{(i)}$ квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$, поскольку из уже доказанной формулы (5.5) сразу следует $\ker \pi_{\alpha}^{(i)} = \{0\}$. Но $\ker \pi_{\alpha}^{(i)}$ — максимальный двусторонний идеал в $\mathfrak{A}|_{\mathcal{H}_i}$, и, значит, $\mathfrak{A}|_{\mathcal{H}_i}$ проста. По следствию 2 теоремы 5.1 это влечет $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}|_{\mathcal{H}_i} = (\mathcal{L}_{\mathfrak{A}})|_{\mathcal{H}_i} = \mathcal{C}(\mathcal{H}_i)$, и предложение доказано, поскольку при отсутствии нетривиальных проекторов в $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ его справедливость очевидна. $\square$

Отдельно следует рассмотреть важный случай, когда все когерентные секторы физически эквивалентны.

Теорема 5.4 [СХ4]. Пусть задана локальная теория Р-класса. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) все когерентные секторы $\langle R_{\alpha}, \mathcal{H}_{\alpha} \rangle$ физически эквивалентны;
- 2) $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}} = \mathcal{C}(\mathcal{H})$;
- 3) алгебра $\mathfrak{A}$ проста;
- 4) хотя бы одно из представлений π_{α} алгебры $\mathfrak{A}$ точно;
- 5) алгебра $\mathcal{A}$ всех локальных наблюдаемых проста;
- 6) для всех двойных конусов D локальные алгебры являются факторами;
- 7) выполняется расширенная локальность: для всех двойных конусов D $R(D) \cap R(D') = \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

Доказательство. Из предложения 5.3 очевидны эквиваленции $1 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 4$; $2 \leftrightarrow 3$ — часть следствия 2 теоремы 5.1; $2 \rightarrow 5$ вытекает из следствия 3 теоремы 5.1, а $5 \rightarrow 3$ — из леммы 5.2. $2 \rightarrow 6$ очевидно из $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ (см. предложение 3.6). $6 \rightarrow 7$ тривиально. $7 \rightarrow 5$: если $\mathcal{A}$ не проста, то по следствию 3 теоремы 5.1 в $\mathcal{A} \cap R'$ существует нетривиальный проектор F , лежащий в $R(D)$ для некоторого двойного конуса D . Из $T(a) \in R$ и $F \in R(D) \cap R'$ для достаточно больших пространственноподобных трансляций a имеем

$$F(a) = F \in R(D + a) \subset R(D'),$$

откуда $F \in R(D) \cap R(D') \neq \mathcal{C}(\mathcal{H})$. $\square$

Заметим, что условие 2 этой теоремы имеет особый физический смысл: поскольку $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \cap \mathcal{L}$, то это условие есть не что иное, как утверждение "глобальной природы правил суперотбора": суперотборные операторы и их спектральные проекции не могут лежать в квазилокальной алгебре,

но являются чисто глобальными наблюдаемыми. Как мы видели в § 4, необходимость такого свойства диктуется физической интерпретацией наблюдаемых из $\mathcal{L}$ как макроскопических величин. Таким образом, эквиваленция $1 \leftrightarrow 2$ является дополнительным обоснованием требования физической эквивалентности. Наконец, присутствие в числе условий теоремы факторности $R(D)$, но не $R(D')$, объясняется тем, что, вообще говоря, $\mathcal{L}(D') \not\subset \mathcal{L}$ и служит первым из целого ряда отличий этих алгебр.

Далее, анализ свойств квазиэквивалентности (локальной и неограниченной) снова заключается в нахождении алгебраической структуры, порождаемой разбиением σ на классы — в данном случае на классы квазиэквивалентности представлений $\pi_{\alpha}^{(\tilde{D})}$ ($\tilde{D} = D$ или D' ; мы ограничимся такими областями ввиду факторности соответствующих представлений, вытекающей из предложения 3.6). При этом здесь различаются локальная (неограниченная) квазиэквивалентность на отдельной области $\tilde{D}$ и на всей совокупности таких областей — так называемая полная локальная (неограниченная) квазиэквивалентность. Исходя из факторности всех $\pi_{\alpha}^{(\tilde{D})}$, легко показать [СХ4, предложение 5], что разложение единицы $\{Q_i^{(\tilde{D})}\}_{i \in \Delta(\tilde{D})}$, образуемое проекторами $Q_i^{(\tilde{D})}$ на классы локальной (неограниченной) квазиэквивалентности, лежит в центре $R(\tilde{D})$. Отсюда вытекает представление

$$R(\tilde{D}) = \bigoplus_{i \in \Delta(\tilde{D})} R_i(\tilde{D}), \quad \mathcal{L}(\tilde{D}) = \bigoplus_{i \in \Delta(\tilde{D})} \mathcal{C}(\mathcal{H}_i), \quad (5.7)$$

в свою очередь влекущее

Предложение 5.5. В локальной теории R -класса следующие условия равносильны:

- 1) все когерентные секторы квазиэквивалентны на области $\tilde{D}$;
- 2) W^* -алгебра наблюдаемых области $\tilde{D}$ есть фактор;
- 3) в каком-либо секторе $\mathcal{H}_{\alpha}$ найдется аналитический по энергии вектор-сепаратор Φ_{α} для $R(\tilde{D})$;

и вытекают из условия

- 4) в каком-либо секторе $\mathcal{H}_{\alpha}$ найдется вектор Φ_{α} , $R(\tilde{D})$ -прообраз которого имеет нетривиальное пересечение с любым другим сектором.

Доказательство. $1 \leftrightarrow 2$ есть следствие (5.7). $3 \rightarrow 2$ вытекает из того, что Φ_{α} — тотализатор $\mathcal{L}(\tilde{D})'$ и лежит, в силу (5.7), в неприводимом подпространстве $\mathcal{L}(\tilde{D})'$. $2 \rightarrow 3$: для любого $\Phi \in \mathfrak{M}$

$$\mathcal{H}_{\Phi}^{R(\tilde{D})} = \mathcal{H}_{\Phi}^R \subset \mathcal{H}_{\Phi}^{R(\tilde{D})'},$$

откуда

$$\mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{L}(\tilde{D})'} = \overline{L\{R(\tilde{D})'\mathcal{H}_{\Phi}^{R(\tilde{D})'}\}} = \mathcal{H}_{\Phi}^{R(\tilde{D})'}$$

$4 \rightarrow 1$. При $\Phi_{\beta} \in \mathfrak{M}_{\Phi_{\alpha}}(\tilde{D})$ имеем

$$\pi_{\beta}^{(\tilde{D})} \approx \pi_{\Phi_{\beta}}^{(\tilde{D})} \simeq \pi_{\Phi_{\alpha}}^{(\tilde{D})} \approx \pi_{\alpha}^{(\tilde{D})},$$

где $\pi_{\Phi_{\alpha}, \beta}^{(\tilde{D})}$ — представления $R(\tilde{D})$, порождаемые функционалами $\omega_{\Phi_{\alpha}, \beta}^{(\tilde{D})}$ на $R(\tilde{D})$. $\square$

Последние два условия этого предложения, выражающиеся в терминах локального прообраза $\mathfrak{M}_\Phi(\tilde{D})$ (напомним, что, согласно (4.4), $\mathcal{H}_\Phi^{R(\tilde{D})'} = L\{\mathfrak{M}_\Phi(\tilde{D})\}$), не кажутся особенно удобными или физически содержательными. Они, однако, приобретают интерес в том важном случае, когда в числе когерентных секторов присутствует вакуумный сектор $\mathcal{H}_0$, в котором имеется вакуумное состояние ω_Ω , $\Omega \in \mathcal{H}_0$ (согласно предложению 3.47, такое состояние единственно в $\mathcal{H}_0$ и чисто). В этом случае локальный прообраз $\mathfrak{M}_\Omega(D')$ имеет особую физическую интерпретацию.

О п р е д е л е н и е 5.2 [Kr; Li1]. Будем говорить, что вектор $\Phi \in \mathcal{H}$ и состояние ω_Φ на R строго локализованы в области $O \subset M$, если ω_Φ совпадает с вакуумным состоянием¹⁾ на подалгебре наблюдаемых области O' :

$$\omega_\Phi|_{R(O')} = \omega_\Omega|_{R(O')}.$$

Множество всех векторов, строго локализованных в O , будем обозначать $SL(O)$; положим также $SL = \bigcup_{O \subset M} SL(O)$, $\mathcal{H}(O) = L\{SL(O)\}$, и в случае теории Р-класса $\langle R, \mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha \in \sigma} \mathcal{H}_\alpha \rangle$, $SL(O)_\alpha = SL(O) \cap \mathcal{H}_\alpha$, $\mathcal{H}(O)_\alpha = \overline{L\{SL(O)_\alpha\}}$.

Как непосредственно видно, для любой $O \subset M$

$$SL(O) = \mathfrak{M}_\Omega(O'), \quad \mathcal{H}(O) = \mathcal{H}_\Omega^{R(O')'}, \quad (5.8)$$

и, с учетом $\Omega \in \mathfrak{N}$, имеем

П р е д л о ж е н и е 5.6. В локальной теории Р-класса с вакуумным сектором $\langle R_0, \mathcal{H}_0 \rangle$ следующие условия равносильны:

- 1) все когерентные секторы квазиэквивалентны на области D' ;
- 2) алгебра $R(D')$ есть фактор;
- 3) $\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}$

и вытекают из условия

4) каждый из секторов содержит хотя бы один строго локализованный в D вектор:

$$\forall_{\alpha \in \sigma} SL(D)_\alpha \neq \emptyset.$$

Таким образом, в теории, обладающей вакуумом, за счет (5.8) возникают различия между свойствами локальной и неограниченной квазиэквивалентности. Подобные различия обнаруживаются и для свойств полной локальной и неограниченной квазиэквивалентности.

Изучение указанных свойств представляет собой простую задачу теории сетей C^* - и W^* -алгебр, развитой Хаагом, Кадисоном и Кастлером [НКК]. Задача заключается в том, чтобы найти, какая подалгебра $Z_{\mathfrak{A}}$ определяет разложение на классы полной локальной (неограниченной) квазиэквивалентности, подобно тому как сама $Z_{\mathfrak{A}}$ определяет разложение на классы

¹⁾ Если теория обладает различными вакуумными состояниями ω_{Ω_i} , то каждое из них порождает соответствующее множество строго локализованных векторов. Множества, отвечающие различным ω_{Ω_i} , не пересекаются, и наше дальнейшее обсуждение относится к любому из таких множеств.

физической эквивалентности, а подалгебра $\mathcal{Z}(\tilde{D}) \subset \mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}$ — на классы $\tilde{D}$ -квазиэквивалентности. При этом за счет возможности $\mathcal{Z}(\tilde{D}_1) \neq \mathcal{Z}(\tilde{D}_2)$ для $\tilde{D}_1 \neq \tilde{D}_2$ возникает различие между классами полной локальной (неограниченной) квазиэквивалентности и дизъюнктивности, которые определяются так: в первом случае секторы $\mathcal{H}_\alpha$ и $\mathcal{H}_\beta$ — в одном классе, если $\pi_\alpha^{(\tilde{D})} \approx \pi_\beta^{(\tilde{D})}$ для всех $\tilde{D}$, во втором случае секторы $\mathcal{H}_\alpha$ и $\mathcal{H}_\beta$ — в одном классе, если $\pi_\alpha^{(\tilde{D})} \approx \pi_\beta^{(\tilde{D})}$ хотя бы для одной $\tilde{D}$. Решение указанной задачи находится просто: как легко убедиться [СХ4, § 2], разбиение на классы полной локальной (неограниченной) квазиэквивалентности определяется объединением всех центров $\mathcal{Z}(\tilde{D})$ — W^* -алгеброй $\mathcal{Z}^\approx = \{ \bigcup_{\tilde{D} \subset M} \mathcal{Z}(\tilde{D}) \}''$, разбиение

же на классы полной локальной (неограниченной) дизъюнктивности определяется пересечением всех центров $\mathcal{Z}(\tilde{D})$ — W^* -алгеброй $\mathcal{Z}^\delta = \bigcap_{\tilde{D} \subset M} \mathcal{Z}(\tilde{D})$,

которая при $\tilde{D} = D'$ совпадает с алгеброй асимптотических наблюдаемых $\mathcal{Z}_{as} = \bigcap_{D \subset M} R(D')$, введенной в п. 3.5. (Иначе говоря, искомые классы

совпадают с неприводимыми подпространствами, соответственно $\mathcal{Z}^\approx$ и $\mathcal{Z}^\delta$.) Отсюда, в частности, следует, что все когерентные секторы образуют один класс полной неограниченной дизъюнктивности тогда и только тогда, когда алгебра асимптотических наблюдаемых тривиальна:

$$\forall_{\alpha, \beta \in \sigma} \exists_{D \subset M} \pi_\alpha^{(D')} \approx \pi_\beta^{(D')} \iff \mathcal{Z}^\delta = \bigcap_{D \subset M} R(D') = \mathcal{C}(\mathcal{H}).$$

Полная же локальная квазиэквивалентность за счет $R(D) \subset \mathfrak{A}$ оказывается равносильной физической эквивалентности: для любых $\alpha, \beta \in \sigma$

$$\forall_{D \subset M} \pi_\alpha^{(D)} \approx \pi_\beta^{(D)} \iff \pi_\alpha \sim \pi_\beta, \quad (5.9)$$

что сразу очевидно из предложения 5.5 и условия 6 теоремы 5.4. Понятно, что это совпадение классов эквивалентности равносильно и совпадению соответствующих центральных подалгебр:

$$\mathcal{Z}^\approx = \{ \bigcup_{D \subset M} \mathcal{Z}(D) \}'' = \mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}.$$

Как следствие (5.9), полная локальная квазиэквивалентность всех когерентных секторов равносильна также всем условиям теоремы 5.4, в частности простоте $\mathfrak{A}$, глобальной природе правил суперотбора и условию расширенной локальности.

Наконец, свойства локальной (неограниченной) унитарной эквивалентности являются прямыми усилениями соответствующих свойств квазиэквивалентности, и потому критерии их выполнения складываются из двух частей: 1) условия локальной (неограниченной) квазиэквивалентности; 2) условия, при которых указанная квазиэквивалентность влечет унитарную эквивалентность. Такое разделение вполне естественно: условия 1 устанавливают, когда алгебры $R(\tilde{D})_\alpha$ и $R(\tilde{D})_\beta$ изоморфны; условия 2 устанавливают, когда данный изоморфизм является пространственным. Рассмотрим

условие 2. Вообще говоря, для произвольных алгебр фон Неймана необходимые и достаточные условия пространственности их изоморфизмов неизвестны; имеются лишь отдельно ряд необходимых и ряд достаточных условий. Тем не менее для случая локальных алгебр $R(\tilde{D})_\alpha$ в теории Р-класса вывести такие условия не составляет труда. Известные достаточные условия пространственности изоморфизма W^* -алгебр связаны с наличием бициклических векторов у этих алгебр [[D, с. 222]] или же с мощностями разложений единицы в их коммутантах [[D, с. 301]]. В случае же локальных алгебр $R(\tilde{D})_\alpha$ подобные условия за счет теоремы Рее—Шлидера оказываются фактически условиями на глобальную структуру, и благодаря этому легко устанавливается, что в данном случае они не только достаточны, но и необходимы. В итоге мы получаем необходимые и достаточные условия перехода от квазиэквивалентности к унитарной эквивалентности, которые являются ограничениями лишь на глобальные параметры теории (размерности секторов $\mathcal{H}_\alpha$ и кратности κ'_α дискретных факторов R_α) и потому имеют один и тот же вид и для локальных, и для неограниченных свойств. Эти условия таковы:

$$(a) \text{ если } \kappa'_\alpha \leq \aleph_0, \text{ то } \kappa'_\beta \leq \aleph_0 \text{ и } \dim \mathcal{H}_\alpha = \dim \mathcal{H}_\beta, \quad (5.10)$$

$$(б) \text{ если } \kappa'_\alpha > \aleph_0, \text{ то } \kappa'_\beta = \kappa'_\alpha \text{ и } \dim \mathcal{H}_\alpha = \dim \mathcal{H}_\beta.$$

Их вывод [СХ4, теорема 3] элементарен: условие (б) получается на основе критерия [[D, с. 301]], а условие (а) — на основе критерия [[D, с. 222]] и с помощью следующего факта, просто вытекающего из предложения 3.4: в локальной теории Р-класса секторная алгебра $R(O)_\alpha$ ($O' \neq \phi$) имеет бициклический вектор тогда и только тогда, когда $\kappa'_\alpha \leq \aleph_0$.

Условия же 1 рассмотрены выше. В результате критерии локальной унитарной эквивалентности даются тем же предложением 5.5, где в условии 1 заменяем $\approx$ на $\simeq$, а к каждому из условий 2 — 4 добавляем требования (5.10). При этом, заметим, условие 4 становится равносильным 1 — 3, ибо $\pi_\alpha^{(D)} \simeq \pi_\beta^{(D)}$ означает наличие изометрического оператора переплетения, а такой оператор в силу (3.37) оставляет прообразы $\mathfrak{M}_\Phi(D)$ инвариантными. Критерии неограниченной унитарной эквивалентности выводятся точно так же, однако в данном случае из предложения 5.6 мы получаем дополнительную группу таких критериев в терминах строго локализованных векторов. Кроме того, учитывая, что из

$$\mathcal{H}_0 = \overline{L\{R'\mathcal{H}_\Omega^R\}} = L\{R'\mathcal{H}_\Omega^{R(D)}\} \subset \mathcal{H}_\Omega^{R(D)'}$$

вытекает $\mathcal{H}(D)_0 = \mathcal{H}_0$, а изометрический оператор переводит тотальное множество в тотальное, мы находим, что условие 3 предложения 5.6 усиливается до тотальности каждого отдельного множества $SL(D)_\alpha$ в соответствующем секторе. В итоге имеет место

Предложение 5.7. В локальной теории Р-класса с вакуумным сектором $\langle R_0, \mathcal{H}_0 \rangle$ следующие условия равносильны:

- 1) все когерентные секторы унитарно эквивалентны на области D' ;
- 2) каждый сектор содержит тотальное множество строго локализованных в D векторов и удовлетворяет (5.10) по отношению к вакуумному сектору;

3) каждый сектор содержит хотя бы один строго локализованный в D вектор и удовлетворяет (5.10) по отношению к вакуумному сектору.

Как нетрудно увидеть, наличие тотального множества строго локализованных векторов, а тем самым и свойство неограниченной унитарной эквивалентности налагают определенные ограничения на асимптотическое поведение векторных состояний системы.

Предложение 5.8. Пусть в локальной теории R -класса имеется вакуумный сектор, и все когерентные секторы неограниченно унитарно эквивалентны. Тогда любое векторное состояние ω_Φ обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$1) \lim_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} \omega_\Phi(A(a)) = \omega_\Omega(A),$$

где ω_Ω — вакуумное состояние;

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_\Phi^{(D'_n)} - \omega_\Omega^{(D'_n)}\| = 0,$$

где $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность бесконечно расширяющихся двойных конусов: $D_n \subset D_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^\infty D_n = M$;

$$3) \lim_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} \omega_\Phi(A(a)B) = \omega_\Omega(A)\omega_\Phi(B)$$

(обобщенное кластерное свойство).

Доказательство. Свойства 1 — 3 суть усиления асимптотических и кластерных свойств общей теории Хаага—Араки (см. теорему 3.42), легко получаемые за счет присутствия в каждом секторе хотя бы одного строго локализованного состояния. $\square$

Следствие. Локальная теория R -класса, в которой все когерентные секторы неограниченно унитарно эквивалентны, имеет не более чем одно вакуумное состояние.

Доказательство. Допуская, что существуют два вакуумных состояния ω_{Ω_1} и ω_{Ω_2} , из свойства 1 немедленно получаем $\omega_{\Omega_1} = \omega_{\Omega_2}$. $\square$

Таким образом, последний и наиболее сильный вид эквивалентности когерентных секторов, неограниченная унитарная эквивалентность, выделяет класс систем с определенным асимптотическим поведением, а именно, с отсутствием дальнего действия, коль скоро в асимптотическом пределе все состояния совпадают с вакуумом. Вследствие этого данное свойство эквивалентности характерно для теорий с сильными взаимодействиями и нарушается, например, в квантовой электродинамике. Действительно, электромагнитное поле — один из примеров калибровочных полей, подчиняющихся закону Гаусса. Для всех таких полей, в состояниях, где имеются источники поля, поток поля через сферу сколь угодно большого радиуса — ненулевая величина; напротив, для вакуумного состояния эта величина равна нулю. Поскольку же поток есть наблюдаемая, а поток через бесконечно отдаленную сферу — наблюдаемая любой области D' , то указанные состояния заведомо не удовлетворяют условию 2 предложения 5.8 и не являются неограниченно унитарно эквивалентными вакуумному состоянию. Подробнее о различиях свойств эквивалентности различных типов систем мы будем говорить в § 6.

**§ 6. ПРОГРАММА ПОСТРОЕНИЯ ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ
ПУТЕМ РЕКОНСТРУКЦИИ ЗАРЯДОВЫХ СЕКТОРОВ.
МЕТОД МОРФИЗМОВ И КОЦИКЛОВ**

Изложенные результаты, давая условия существования различных операторов переплетения суперотборных секторов, в то же время еще не указывают никакого практического пути для явного получения полевых свойств теории. Они не говорят ничего о том, как можно определить понятия спина, статистики, зарядового сопряжения, как следует вводить объекты типа зарядов, токов, античастиц, наконец, и самих полей. Иными словами, мы до сих пор еще не приступили к конкретному построению реалистической полевой теории на базе локальной квантовой теории. Но почва для него уже подготовлена, и сейчас мы без труда сможем наметить его общую схему (к сожалению, лишь обзорно, ибо полное изложение этой проблематики заняло бы отдельную книгу).

Прежде всего мы выяснили, что искомая полевая теория должна быть теорией с правилами суперотбора, ибо последние принадлежат не к частным особенностям лишь некоторых полевых систем, а к самой сути понятия квантованного поля. Уже и этот начальный вывод совсем не столь тривиален и тесно связан с той глубокой переориентацией квантовой теории поля, которая совершилась в последнее десятилетие. За этот период произошел решительный сдвиг в представлениях о том, какие классы или типы квантовополевых моделей являются наиболее существенными для описания взаимодействий элементарных частиц. В качестве таких типов теперь выступают в первую очередь модели с калибровочными полями, фазовыми переходами, топологическими зарядами и правилами суперотбора различных видов. Большею частью такие модели были известны и прежде, однако они рассматривались скорее как некие достаточно экзотические частные случаи: и в вайтмановской аксиоматике, и на раннем этапе конструктивной теории преобладало (подспудное или явное) убеждение в том, что все главные черты, которые относятся к самой природе релятивистского квантового взаимодействия, — по крайней мере, сильных взаимодействий — присутствуют уже в простой теории нейтрального скалярного поля.

Именно этот взгляд и оказался в корне неверным. Пришлось понять, что все перечисленные выше явления — такие, как правила суперотбора, локальные калибровочные симметрии и т.п. — ни в коей мере не служат только источниками второстепенных технических усложнений, но принципиально важны для понимания самого существа релятивистской квантовой динамики. Их присутствие должно рассматриваться скорее как норма, как почти обязательная черта всякой реалистической модели взаимодействий элементарных частиц. Подобное заключение сложилось на основании очень многих факторов, одним из которых послужило и выяснение тесной связи правил суперотбора с природой квантованного поля.

За счет этой связи правила суперотбора занимают особое место среди перечисленных явлений. Все остальные из них — будь то солитоны, фазовые переходы или калибровочные поля — выделяют какой-либо класс квантовых моделей или систем, характеризующийся определенными особенностями своей структуры и динамики. Но правила суперотбора — это не определяющий признак еще одного класса моделей, а общая черта всех классов.

При этом выясняется, что у каждого из классов суперотборная структура обладает определенными отличиями, специфическими именно для данного класса. Это означает, что явление суперотбора доставляет нам основу для единой трактовки целого ряда систем, имеющих на первый взгляд совершенно различную природу. Все эти системы мы можем рассматривать с единой точки зрения — как системы с правилами суперотбора, характеризующиеся тем или иным конкретным типом суперотборной структуры. Тем самым тип суперотборной структуры выступает как ключевая характеристика квантовополевой системы, порождающая новый принцип классификации таких систем. Это становится возможным, когда суперотборная структура понимается в своем полном объеме, т.е. включает в себя не только глобальные (§ 4), но и локальные (§ 5) свойства. (Причем, как мы убедимся, именно локальные свойства, т.е. свойства эквивалентности когерентных секторов, в первую очередь и отражают присущий системе тип взаимодействий. Это вполне естественно: точно так же в традиционной квантовой теории поля динамику системы выражают свойства локализации и асимптотические свойства физических состояний и операторов.)

Указанная классификация имеет прямое отношение к проблеме построения реалистической полевой теории: как мы увидим, каждому виду систем по этой классификации соответствует и своя методика, свой конкретный способ этого построения. Поэтому сейчас мы кратко ее опишем.

I. "Обычным" системам, не содержащим частиц нулевой массы или калибровочных полей, соответствуют суперотборные структуры, в которых имеет место неограниченная унитарная эквивалентность когерентных секторов, т.е. семейство представлений π квазилокальной алгебры, отвечающих физическим состояниям, выделяется свойством

$$\pi^{(D')} \simeq \pi_0^{(D')} \quad (6.1)$$

(π — вакуумный сектор, D — некоторый двойной конус, зависящий от π). Данный класс систем включает, прежде всего, традиционные модели сильных взаимодействий типа мезодинамики с юкавским лагранжианом. В таких системах существуют заряженные поля и состояния заряженных частиц, локализованные в ограниченных областях пространства Минковского, ибо эквивалентность сектора или состояния вакуумному сектору (состоянию) на области D' позволяет считать, что в этом секторе взаимодействие сосредоточено в ограниченной области $D'' = D$. Глобальная же структура такой модели определяется наличием одной или нескольких групп калибровочных преобразований первого рода, которые могут быть абелевыми (как группы электрического и барионного зарядов) либо неабелевыми (как группа изоспина $SU(2)$). Эти группы порождают полную калибровочную группу G , которая при достаточно общих предположениях (полнота системы асимптотических in-состояний и конечная кратность каждой неприводимой компоненты представления $\mathcal{P}^\dagger$ в одночастичном пространстве) оказывается компактной [DHR 1]. В полном пространстве состояний, включающем все когерентные секторы, действует унитарное представление G , и физические наблюдаемые представляются операторами, инвариантными относительно этого представления:

$$R = U(G)'.$$

Множество всех когерентных секторов изоморфно спектру $\hat{G}$ группы G и вследствие компактности G является дискретным, так что R — алгебра R -класса. Суперотборные операторы, собственными подпространствами которых служат когерентные секторы, совпадают с операторами Казимира группы G , а операторы зарядов (тесно связанные с суперотборными операторами, но, вообще говоря, отличные от них в случае неабелевой G) выступают как генераторы однопараметрических подгрупп G . Наконец, заряженные поля, разумеется, переводят физические состояния из одного когерентного сектора в другой.

Именно для таких систем впервые был развит алгебраический формализм, позволяющий, исходя лишь из локальных наблюдаемых, прийти к явному описанию полевых свойств системы. Это был аппарат "локализованных морфизмов" Доплихера, Хаага и Робертса [DHR 1–4], который, как сначала могло казаться, всецело зависел от свойства неограниченной унитарной эквивалентности когерентных секторов. В дальнейшем, однако, путем существенных дополнений и обобщений его удалось освободить от этой зависимости (о чем см. ниже). В результате на базе техники Доплихера–Хаага–Робертса был создан универсальный "метод морфизмов и коциклов", пригодный для изучения зарядовых секторов практически любых квантовополевых систем и составляющий, можно смело сказать, основу алгебраического подхода на современном этапе.

II. Непосредственным развитием формализма Доплихера–Хаага–Робертса для "традиционных" моделей сильных взаимодействий явилось проделанное Бухгольцем и Фреденхагеном [BF3] исследование систем, обладающих локализованными заряженными состояниями¹⁾. Здесь были найдены наиболее общие условия, достаточные для существования таких состояний, причем обнаружилось, что эти условия слабее, чем условие Доплихера–Хаага–Робертса, требующее совпадения локализованного состояния ω с вакуумным состоянием на некоторой области D' и тем самым обеспечивающее локализацию ω в ограниченной области D . В общем случае область локализации заряженного состояния оказывается неограниченной и имеющей вид $D \cup S$, где S — пространственноподобный конус сколь угодно малого угла раствора, — так сказать, "утолщающаяся струна". При этом направление конуса S не является наблюдаемой величиной; это свидетельствует, что соответствующий заряд является топологическим зарядом. Таким образом, общий вид локализованного заряженного состояния дают не состояния, локализованные в двойных конусах, а состояния, локализованные в струнах, и критерий (6.1) отбора физических состояний заменяется на более слабое условие:

$$\pi^{(S')} \simeq \pi_0^{(S')}, \quad (6.2)$$

где S (при заданном π) есть произвольный пространственноподобный конус. В результате в рассмотрение вводится новый класс суперотборных структур, которые удовлетворяют условию (6.2), но не условию (6.1). Встает, разумеется, вопрос: каким же физическим системам отвечают подобные структуры? Очевидные соображения подсказывают, что это

¹⁾ Имеется в виду обсуждаемое ниже обобщенное понимание заряженного состояния, предполагающее лишь его неэквивалентность вакуумному состоянию.

должны быть системы с калибровочными полями: как известно, именно в них заряженные состояния не могут быть изолированы в ограниченных областях, поскольку они являются источниками бесконечных линий ("струн") потока заряженного поля. Кроме того, если для заряженного состояния нарушено условие (6.1), то соответствующий заряд создает ненулевой поток через сферу сколь угодно большого радиуса и тем самым является "зарядом калибровочного типа", который должен удовлетворять некоторому аналогу закона Гаусса. К этому же приходим и "методом исключения": во всех "обычных" моделях сильных взаимодействий без частиц нулевой массы заведомо выполняется критерий Доплихера—Хаага—Робертса (6.1). Нужно, однако, отбросить и теории с непрерывной абелевой калибровочной группой: в таких теориях, согласно обобщению теоремы Швецы [BF 2], заряженные состояния возможны лишь при наличии безмассовых частиц (а весь анализ [BF 3], как и формализм Доплихера—Хаага—Робертса, справедлив только в чисто массивных теориях). В итоге выделяется класс калибровочных теорий, имеющих только массивные частицы и неабелеву или же дискретную калибровочную группу. Первый практический пример такой теории исследован в новой работе Фреденхагена и Марку [FM]. Разобранная ими модель есть калибровочное поле на решетке Z^d , $d \geq 2$, с калибровочной группой Z_2 , взаимодействующее с дискретным аналогом поля Хиггса. Методами евклидовой и конструктивной теории поля на решетке тут были явно построены (в определенной области фазовой диаграммы модели) заряженные состояния, свойства которых полностью подтверждают предсказания общего анализа [BF 3]. (Отсутствие же "строго локализованных" состояний (6.1) в данной модели демонстрируется в качестве простого предварительного результата.)

III. Сравнительно близкими по структуре к только что описанному классу оказываются абелевы калибровочные теории без записания заряда, среди которых главное место занимает квантовая электродинамика. В квантовой электродинамике существует, как известно, правило суперотбора по электрическому заряду Q , с которым связана группа калибровочных преобразований первого рода. Поскольку заряд Q удовлетворяет закону Гаусса, то для соответствующих зарядовых секторов свойство неограниченной унитарной эквивалентности, разумеется, не имеет места; однако наиболее общие свойства локализации заряженных состояний, найденные в [BF 3], выполняются. Тем самым заряженные состояния в квантовой электродинамике (которые являются функционалами на квазилокальной алгебре, порождаемой операторами наблюдаемых $j_\nu(g^\nu)$ и $F_{\mu\nu}(f^{\mu\nu})$ и трактуемой как абстрактная C^* -алгебра) также локализованы в "струнах" S и соответствующие им представления удовлетворяют критерию (6.2). Но далее начинаются важные отличия. Наличие в системе безмассовых бозонов сказывается в том, что асимптотическое направление струны S теперь становится наблюдаемой величиной, и притом за счет своего асимптотического характера эта наблюдаемая является "классической", т.е. коммутирует со всеми наблюдаемыми и, следовательно, порождает правило суперотбора — новое правило суперотбора в квантовой электродинамике, помимо давно привычного суперотбора по электрическому заряду.

Вывод о том, что "инфракрасная проблема", т.е. виртуальное присутствие в любом физическом состоянии "облака" низкоэнергетических фото-

нов, должна в числе многих своих проявлений приводить и к некоторому правилу суперотбора, высказывался неоднократно и из разных соображений (см., например, [F1; FMS2]); наиболее детальный анализ проделан в работе Бухгольца [Bu6]. Как здесь показано, суперотборной наблюдаемой является величина φ , отвечающая асимптотическому распределению потока электромагнитного поля по различным направлениям n :

$$\varphi(n) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 (n E(rn)),$$

где E — вектор напряженности электрического поля. Любые две различные функции $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$ отвечают различным суперотборным секторам ("φ-секторы") с тем лишь ограничением, что полный поток $\int d\omega \varphi(n)$ должен быть кратен заряду электрона. Физически данный суперотбор можно считать, как и сказано выше, суперотбором по асимптотическому направлению струны, где локализовано заряженное состояние, порождающее поток φ (поскольку можно связать функцию φ с указанным направлением локализации).

В результате каждый зарядовый сектор (сектор суперотбора по заряду Q) расщепляется на несчетное множество φ-секторов, отвечающих всевозможным направлениям локализации состояний с заданным значением заряда. Иными словами, суперотборная структура для систем данного типа строится из секторов, которые определяются двумя характеристиками: значением q заряда Q и направлением конуса локализации S , причем для любого заданного q найдется сектор $[\pi]$ с любым заданным направлением локализации. Представления с заданным направлением локализации S выделяются критерием

$$\pi^{(S')} \simeq \pi_0^{(S')}, \quad (6.3)$$

причем теперь при заданном π S уже не произволен, но однозначно фиксирован. Сходным критерием можно охарактеризовать и представления с заданным зарядом q . Во всякой теории, где заряженные частицы массивны, заряд может быть определен путем измерений в любом конусе будущего V_x^+ , $x \in M$: в самом деле, мировая линия массивной частицы времениподобна, и при достаточно больших временах частица заведомо окажется внутри V_x^+ . Поэтому, если два представления π_1, π_2 унитарно эквивалентны на некотором конусе V_x^+ , то они несут один и тот же заряд:

$$\exists_{x \in M} \pi_1(V_x^+) \simeq \pi_2(V_x^+) \Rightarrow q(\pi_1) = q(\pi_2).$$

Отсюда, при малоограничительных допущениях, можно вывести, что сектор с фиксированным зарядом q образуют все те и только те представления π , для которых

$$\pi^{(V^+)} \simeq \pi_q^{(V^+)}, \quad (6.4)$$

где π_q — любое из представлений с зарядом q . В итоге поля и заряды в системах данного типа должны возникать (по упомянутой в п. I универсальной методике) как объекты, связанные с семейством представлений, которое определяется критериями отбора (6.3) и (6.4).

IV. Общий суперотборный подход естественно распространяется и на системы с топологическим зарядом. Как было уже прослежено на целом ряде примеров, наличие нетривиальной топологической структуры квантовой системы, порождаемой такими объектами, как квантовые солитоны, вихри, монополи, или же нетривиальной топологией самого пространства-времени, приводит к правилам суперотбора и описывается посредством суперотборной структуры. Напомним, что уже в классе II заряд ввиду ненаблюдаемости направления конуса S имеет топологическую природу; однако в системах, где топологические феномены — единственный источник суперотбора, отличия от свойств наиболее традиционного класса I более значительны. В таких системах по-прежнему присутствуют операторы заряда, в данном случае топологического, — однако в теории, вообще говоря, нет калибровочной инвариантности, и эти операторы не выступают как генераторы групп калибровочных преобразований. Тем самым, конечно, и физические наблюдаемые уже не определяются по свойству калибровочной инвариантности. Вместо этого для систем данного класса типично наличие некоторого исходного семейства локальных нейтральных бозонных полей, которые и совпадают с наблюдаемыми. В случае класса I единственными полями в системе предполагались заряженные поля ψ , а наблюдаемыми служили калибровочно инвариантные конструкции вида $\varphi = \bar{\psi}\psi$ из этих полей. В данном же случае величины φ выступают как первичные поля. Они порождают сеть локальных алгебр вакуумного сектора; высшие секторы возникают как представления этой алгебры и характеризуются наличием вышеуказанных топологических объектов: так, в солитонных моделях набор секторов нумеруется числом солитонов, т.е. N -й сектор содержит N -солитонные состояния. Заряженные поля, переплетающие эти секторы, образуют другое семейство полей, и потому реконструкция полной суперотборной структуры для подобных систем обычно интерпретируется не как "восстановление полей по наблюдаемым", а скорее как установление связи между двумя различными полевыми моделями. В типичной ситуации, когда заряженные поля ψ — фермионы, интерпретация их как операторов переплетения представлений алгебры бозонных полей φ может рассматриваться как сведение фермионной системы к бозонной (или наоборот), если учесть, что обе системы порождают одни и те же зарядовые секторы. В этом смысле поле φ иногда называют "бозонизацией" поля ψ , а ψ в свою очередь — "фермионизацией" φ .

Укажем основные примеры. Самый известный из них — это связь между моделью синус-Гордона и массивной моделью Тирринга, впервые указанная Коулменом [Co] и строго (хотя не совсем еще полно) описанная Фрелихом [F 2–5], а также Сушко и Погребковым [ПС; Су]. В данном случае системы нейтральных полей-наблюдаемых φ — это модель с самодействием $(\sin \varphi)_2$. Высшие суперотборные секторы $\mathcal{H}_n (n \in \mathbb{Z})$ этой модели содержат n -солитонные состояния (которые можно связать с классическими солитонами, т.е. решениями классических уравнений движения, не убывающими на бесконечности и наделенными конечной энергией), а заряженные поля ψ , переплетающие солитонные секторы, совпадают с фермионными полями массивной модели Тирринга. Другой пример — модель Стритера и Уайлда [SW]. В этом случае φ — свободное скалярное нейтраль-

ное поле нулевой массы в двумерном пространстве-времени; высшие суперотборные секторы образуют несчетное семейство, параметризуемое значениями двух топологических зарядов, а заряженные поля ψ удовлетворяют некоторым перестановочным соотношениям, более общим чем нормальные бозон-фермионные соотношения (однако для определенного подмножества секторов эти перестановочные соотношения оказываются антикоммутаторами, и операторы ψ являются фермионами). Как и в предыдущем случае, построение суперотборной структуры здесь было сделано вполне строго. Общие идеи соответствовали программе Доплихера—Хаага—Робертса, однако практическое построение зарядовых секторов было проведено оригинальным методом, согласно которому новые неэквивалентные представления квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$ вакуумного сектора получались с помощью преобразований сдвига вейлевских операторов — образующих $\mathfrak{A}$ (см. § 9). Данный метод справедлив для систем, описываемых алгебрами канонических коммутационных или антикоммутационных соотношений, и в дальнейшем он успешно применялся еще ко многим таким системам (см., в частности, [KrS; PRS; HeS]). Для ряда трех- и четырехмерных систем с топологическими зарядами возможность их описания посредством суперотборной структуры демонстрировалась в работах Эзавы [Ez 1,2] (однако лишь "на физическом уровне строгости", т.е. без анализа проблем корректности, вызываемых использованием обобщенных функций и неограниченных операторов). По аналогии с моделями Стритера—Уайлда и $(\sin \varphi)_2$ в [Ez 1] проведено построение суперотборной структуры для абелевой и неабелевой калибровочных моделей, описывающих "вихри" — трехмерные аналоги двумерных квантовых солитонов. Затем в качестве обобщения в [Ez 2] более бегло показано, что аналогичная структура, включающая семейство суперотборных секторов и операторы переплетения между ними, несущие топологический заряд, характеризует также четырехмерные системы с дираковскими монополями и "дионами" — связанными состояниями из монополей и изодублетных бозонов. Наконец, как было упомянуто выше, топологические заряды, сопровождаемые правилами суперотбора, могут возникать и за счет топологии пространства-времени. Данный эффект весьма отчетливо демонстрирует модель, разобранный в [AsS]: свободное электромагнитное поле в метрике Шварцшильда—Крускала. В такой Вселенной поле, несмотря на отсутствие источников, имеет нетривиальный электрический и магнитный заряды. Эти два топологических заряда могут принимать любые вещественные значения и порождают двухпараметрическое семейство суперотборных секторов.

V. Изучая зарядовые секторы квантовополевой системы, мы всегда должны исходить из некоторого вакуумного сектора, предполагая его заданным. Понятно, однако, что анализ системы не может считаться полным, пока он не включает в себя также и исследование этого вакуумного сектора. Здесь встают следующие основные вопросы: является ли вакуумный сектор абелевым? Являются ли вакуумное состояние и вакуумный сектор единственными для данной системы? Если же единственность, в общем случае, нарушена (чего мы можем ожидать, зная о разнообразных явлениях вырождения основного состояния), то каково строение множества всех вакуумных состояний? Часть из этих вопросов мы рассмотрим в

следующем разделе (§ 7), сейчас же для нас важны лишь ответы. И самый существенный ответ — тот, что строение множества всех вакуумных состояний описывается опять-таки с помощью некоторого правила суперотбора. Это "вакуумное правило суперотбора" не связано с наличием зарядов и заряженных полей. По своему физическому содержанию оно выражает возможность пребывания квантовополевой системы, подобно системам статистической механики, в различных фазах. Каждой фазе отвечает свое основное состояние, и при определенных условиях (см. § 7) различные фазы многофазной квантовополевой системы оказываются разделены правилом суперотбора. Как интерпретация, так и исследование вакуумного суперотбора обладает своей спецификой. Не будучи связаны с зарядами, вакуумные правила суперотбора менее связаны с асимптотическим поведением и еще менее — с локальной структурой системы. Множество вакуумных секторов находится не с помощью критериев типа (6.1) — (6.4), а с помощью евклидовой формулировки изучаемой модели: таким путем модели сопоставляется определенная система классической статистической механики, фазовая диаграмма которой и дает информацию о множестве основных состояний. Кроме того, интерпретация вакуумных секторов как физических фаз подсказывает, что в данном случае уже не только наблюдаемые, но и поля не могут переводить состояния из одного сектора в другой, и, следовательно, в системах с вакуумным суперотбором не только алгебра наблюдаемых, но и алгебра полей должна быть приводимой. С учетом этих отличий, является примечательным, что для широкого класса систем подобный суперотбор описывается все той же глобальной структурой Р-класса, хотя, наряду с такими системами, не исключается и возможность непрерывного вакуумного суперотбора, когда суперотборные секторы образуют прямой интеграл гильбертовых пространств.

* *

*

Из этого описания различных классов систем можно сразу извлечь два вывода. Во-первых, суперотборная структура — это действительно, центральный элемент во всей структуре квантовополевой системы; все главные динамические и полевые свойства последней так или иначе связаны с ней и определяются ею. Поэтому задача "построения реалистической полевой теории" на своем первом этапе должна ставиться как задача реконструкции суперотборной структуры, т.е. построения некоторого семейства зарядовых секторов. Во-вторых, приступая к построению полевой теории, мы не должны считать заданной изначально глобальную структуру Р-класса. Она должна появляться не в начале, а только в конце пути — как итог построения пространства физических состояний. Глобальная структура теории несет в себе целый ряд полевых и динамических характеристик, которые мы никак не можем считать известными на начальном этапе: напротив, мы хотим исходить только из множества локальных наблюдаемых, с тем чтобы по нему все эти характеристики восстановить. Иными словами, мы не можем исходить из некоторого заранее заданного набора суперотборных секторов, но должны построить этот набор, учитывая конкретные физические условия, типа критериев отбора (6.1) — (6.4). Суперотборная

структура должна не задаваться, а выводиться, и в этом смысле полевая теория, конструируемая на базе локальных наблюдаемых, есть "квантовая теория поля, предсказывающая свои правила суперотбора", согласно известной формуле Стритера [BS].

Минимальный исходный материал для реконструкции суперотборной структуры составляет абстрактная сеть локальных алгебр и некоторое основное состояние, или же, равносильно, сеть локальных алгебр вакуумного когерентного сектора. Таким образом, высшие зарядовые секторы будут получаться как некоторые представления квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$ вакуумного сектора. Эти представления, как только что сказано, должны отбираться на основании физических условий. И первым из них должно быть, очевидно, такое условие, которое выделяло бы представления, отвечающие заряженным состояниям как таковым, вне зависимости от конкретного типа заряда. Подобное условие, более общее чем критерии (6.1) — (6.4), охватывающее все виды зарядов, дает следующий простой критерий, уже подготовленный всей "суперотборной идеологией" настоящей главы.

О п р е д е л е н и е 6.1 ("к р и т е р и й Б о р х е р с а" [B6]). Состояние ω квантовой системы, описываемой квазилокальной алгеброй $\mathfrak{A}$, назовем *заряженным состоянием*, если в отвечающем ему представлении π_ω выполнены аксиомы Хаага—Араки, и в то же время не имеется вакуумного состояния. Класс эквивалентности $[\pi_\omega]$ заряженного состояния ω будем называть *зарядовым сектором*.

Особенность этого определения в том, что оно не включает в себя никаких явных требований существования заряда и, казалось бы, вообще ничего не говорит о заряде. Разумеется, это не случайно. Круг идей, которые мы излагаем сейчас, представляет собой, по сути, новый самостоятельный взгляд на структуру квантовополевых систем, в котором во главу угла ставится понятие суперотбора. В рамках этих идей заряд выступает как нечто производное по отношению к суперотборной структуре, и его наличие является, в определенном смысле, автоматическим следствием секторного строения множества физических состояний. Действительно, если имеется семейство зарядовых секторов в смысле определения 6.1, то мы можем последовательно сопоставлять этому семейству различные полевые объекты и характеристики: поля — как операторы переплетения секторов семейства, спектр значений заряда — как множество значений параметра, нумерующего семейство, и т.д. — пока на определенном этапе не станет возможным ввести и некоторый оператор, имеющий указанное множество своим спектром; с достаточным основанием этот оператор можно будет называть (обобщенным) зарядом.

Нельзя не заметить, что описанная логика прямо противоположна логике построения классической лагранжевой теории, по инерции долгое время сохранявшейся и в квантовой теории поля. Как известно, в классическом лагранжевом формализме заряды и токи вводятся с самого начала в числе исходных объектов, возникающих сразу с заданием лагранжиана; напротив, зарядовые секторы тут — весьма вторичный объект, который в классической теории почти не изучался до недавнего времени (ср. [PSV1, 2]), а в квантовой поддается построению разве с большим трудом (ибо нужно строить спектральные разложения операторов заряда, как правило, очень плохо определенных). Практика уже давно показала непригодность лаг-

ранжева формализма в качестве основы для строгого описания квантово-полевых систем вне теории возмущений; однако сколько-нибудь равноценная альтернативная схема построения теории, разумеется, была выработана далеко не сразу. Последовательными этапами освобождения от структурных стереотипов лагранжева формализма явились аксиоматическая, и затем конструктивная теории поля; в излагаемом же подходе "локальной квантовой физики" (как предлагают называть данное направление Хааг и Вайтман) это освобождение, пожалуй, уже близится к своему завершению.

Конкретным осуществлением идей "локальной квантовой физики" служит упоминавшаяся уже неоднократно методика морфизмов алгебр наблюдаемых и коциклов групп симметрии, в настоящее время уже достаточно глубоко развитая и продемонстрировавшая свою эффективность на примерах квантово-полевых моделей всех типов I — IV (напомним, что тип V не связан с зарядом). Надеюсь в дальнейшем вернуться к обстоятельному обсуждению этой методики, сейчас мы лишь кратко сформулируем ее начальные элементы [F2—6; R3].

Мы видели, что для всех типов систем первым этапом реконструкции полевой теории служит построение семейства зарядовых секторов $[\pi_\omega]$, т.е. классов эквивалентности представлений квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$ вакуумного сектора, удовлетворяющих аксиомам Хаага—Араки. На дальнейших же этапах должно осуществляться явное построение полевых объектов. Естественным, что первый этап мало связан с конкретными особенностями изучаемой системы, и потому в этой своей части методика морфизмов и коциклов является универсальной — справедливой для всех выше-описанных классов систем. Напротив, на последующих этапах эта методика сильно дифференцируется и принимает свою особую форму для каждого из классов. Ниже мы ограничимся главным образом универсальными элементами.

Исходные допущения таковы: предполагаем, что вакуумная квазилокальная алгебра $\mathfrak{A}$ неприводима, сеть ее локальных подалгебр $\{R(O)\}$ удовлетворяет условию дуальности (что, впрочем, используется лишь на более поздних этапах), а искомые секторы $[\pi_\alpha]$ должны быть локально унитарно эквивалентны (см. определение 5.1) вакуумному сектору. С учетом результатов п. 3.5 и § 5, только второе из этих допущений может считаться ограничением общности, однако в нашей задаче оно физически естественно: условие дуальности выражает максимальность взятого множества локальных наблюдаемых, и разумно ожидать, что лишь по максимальному множеству наблюдаемых возможно восстановить все полевые свойства системы. Первым шагом в построении искомого аппарата является переход к описанию зарядовых секторов посредством морфизмов алгебры $\mathfrak{A}$. Морфизм ρ операторной C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ есть частный случай представления $\mathfrak{A}$, получаемый, когда последнее действует в том же пространстве $\mathcal{H}$. Поэтому для морфизмов определены все обычные свойства представлений, в частности понятия неприводимости (морфизм ρ неприводим, если $\rho(\mathfrak{A})'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$) и унитарной эквивалентности. По каждому представлению π или состоянию ω морфизм ρ позволяет определить новое представление или состояние: $\pi' = \pi \circ \rho$, $\omega' = \omega \circ \rho$. В частности, когда $\mathfrak{A}$ — квазилокальная алгебра вакуумного сектора,

ее тождественное представление π_{id} можно считать отвечающим вакуумному состоянию $\omega_0 = \omega_\Omega$, т.е. $\pi_{id} = \pi_{\omega_0}$. Тогда морфизмам ρ соответствуют состояния $\omega_0 \circ \rho$ и представления, также имеющие Ω циклическим вектором и действующие в подпространствах

$$\mathcal{H}_\rho = \rho(\mathfrak{A})\Omega \subset \mathcal{H}.$$

Легко убедиться, что всякое представление π_α , локально унитарно эквивалентное π_{id} , т.е. такое, что для некоторого двойного конуса D

$$\pi_\alpha^{(D)} = V_\alpha^{(D)} \cdot V_\alpha^{(D)*}$$

($V_\alpha^{(D)}$ — изометрический оператор переплетения $\pi_{id}^{(D)}$ и $\pi_\alpha^{(D)}$) определяет эквивалентный себе морфизм ρ_α алгебры $\mathfrak{A}$ по формуле

$$\rho_\alpha(A) = V_\alpha^{(D)*} \pi_\alpha(A) V_\alpha^{(D)} \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Поскольку $\rho_\alpha \simeq \pi_\alpha$, то $[\rho_\alpha] = [\pi_\alpha]$, и построение зарядовых секторов сводится к построению морфизмов $\mathfrak{A}$. При этом требуется отбирать такие морфизмы, которые удовлетворяют аксиомам Хаага—Араки; но так как морфизм есть представление $\mathfrak{A}$, то из этих аксиом ограничения на класс морфизмов являются лишь аксиомы V, VI. Таким образом, на данном этапе единственная проблема заключается в построении морфизмов, удовлетворяющих условиям пуанкаре-ковариантности и спектральности.

Требование пуанкаре-ковариантности морфизма ρ формулируется согласно общему определению ковариантного представления (п. 3.5): в $\mathcal{H}$ должно существовать непрерывное унитарное представление U_ρ группы Пуанкаре такое, что для всех $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow, A \in \mathfrak{A}$

$$\rho(\alpha_{a, \Lambda}(A)) = U_\rho(a, \Lambda) \rho(A) U_\rho(a, \Lambda)^{-1}.$$

Эквивалентным образом можно выразить это требование в терминах ковариантных состояний, причем, поскольку в данном аппарате приходится использовать и другие группы ковариантности, мы приведем такую формулировку в более общем виде: для произвольной локально компактной группы G морфизм ρ C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ называется G -ковариантным, если для всякого G -ковариантного состояния ω состояние $\omega \circ \rho$ также является G -ковариантным. Очевидно, что построение G -ковариантных морфизмов включает в себя две задачи: во-первых, нужно уметь, исходя из представления группы G в вакуумном секторе, строить новые представления G ; во-вторых, нужно уметь строить морфизмы алгебры $\mathfrak{A}$, ковариантность которых реализуется этими представлениями. Путь к решению этих задач открывается, если, наряду с представлениями группы G , рассматривать также и коциклы этой группы.

О п р е д е л е н и е 6.2. Пусть $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ — C^* -динамическая система, ω — G -ковариантное состояние на $\mathfrak{A}$, U_ω — соответствующее представление G в $\mathcal{H}_\omega$. Отображение

$$\Gamma : G \rightarrow U(\mathcal{H}_\omega)$$

называется G -коциклом на $\mathcal{H}_\omega$, если $\Gamma(g)$ сильно (или слабо) непрерывно и удовлетворяет тождеству коциклов:

$$\Gamma(g_1 g_2) = \Gamma(g_1) U_\omega(g_1) \Gamma(g_2) U_\omega(g_1)^*.$$

Из этого определения сразу следует

Предложение 6.1. Пусть ω — G -ковариантное состояние, U_ω — соответствующее унитарное представление G в $\mathcal{H}_\omega$, Γ — G -коцикл на $\mathcal{H}_\omega$. Тогда набор операторов $V(g) = \Gamma(g) U_\omega(g)$ реализует унитарное сильно непрерывное представление G в $\mathcal{H}_\omega$.

Таким образом, G -коцикл позволяет по заданному представлению U_ω построить новое непрерывное унитарное представление V . Очевидно и обратное соответствие: всякая пара непрерывных унитарных представлений V, U группы G в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определяет G -коцикл Γ по формуле

$$\Gamma(g) = V(g)U(g)^*.$$

Отсюда уже ясно, что поскольку каждому G -ковариантному морфизму ρ алгебры $\mathfrak{A}$ отвечает представление V_ρ группы G , то ему также отвечает и G -коцикл $\Gamma_\rho(g) = V_\rho(g) U(g)^*$, где U — представление G , отвечающее вакуумному состоянию ω_0 (которое, по определению, считаем G -ковариантным для всех рассматриваемых групп G). Иначе говоря, существование G -коцикла Γ_ρ является необходимым условием G -ковариантности морфизма ρ . Нам, однако, скорее требуются достаточные условия G -ковариантности морфизмов. Такие условия формулируются с помощью важного понятия транспортабельного морфизма.

Определение 6.3. Морфизм ρ C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ называется G -транспортабельным, если существуют G -ковариантное состояние ω и G -коцикл Γ_ρ на $\mathcal{H}_\omega$ такие, что для всех $g \in G, A \in \mathfrak{A}$

$$\pi_\omega(\alpha_g^{-1} \circ \rho \circ \alpha_g(A)) = \Gamma_\rho(g)^* \pi_\omega(\rho(A)) \Gamma_\rho(g).$$

Как видим, понятие G -транспортабельности морфизма ρ включает в себя существование G -коцикла Γ_ρ , а тем самым и нового представления $V_\rho(g) = \Gamma_\rho(g) U(g)$ группы G , определенным образом связанных с этим морфизмом. Вообще говоря, такой связи еще недостаточно для G -ковариантности ρ , поскольку представление V_ρ может выводиться из пространства $\mathcal{H}_\rho$ морфизма ρ . Однако имеется целый ряд простых дополнительных условий, которые в совокупности с G -транспортабельностью ρ уже обеспечивают его G -ковариантность. Несложно проверяются следующие утверждения.

Пусть морфизм ρ G -транспортабелен. Тогда каждое из следующих условий является достаточным для G -ковариантности ρ :

- 1) $\mathcal{H}_\rho$ есть инвариантное подпространство представления V_ρ ;
- 2) ρ — неприводимый морфизм;
- 3) ρ — локализованный морфизм (т.е. $\rho|_{\mathfrak{A}(O')} = \text{Id}$ для некоторой области $O \in B(M)$; подробнее о таких морфизмах см. ниже).

Таким образом, в широком классе ситуаций искомые G -ковариантные морфизмы совпадают с G -транспортабельными, а для получения последних достаточно иметь коциклы Γ_ρ группы G . При этом G — какая-либо из групп симметрии квантовополевых систем; коциклы этих групп — гораздо более простые и хорошо изученные объекты, нежели морфизмы C^* -алгебр, и в конкретных моделях обычно существуют доступные способы их построения. В первую очередь при построении зарядовых секторов используются коциклы группы $\hat{M}_{s,1}$ трансляций $(s+1)$ -мерного аналога пространства

Минковского $M = M_{3,1}$. (Поскольку весь метод применяется к широкому спектру моделей, включая двумерные солитоны, трехмерные вихри и т.д., его естественно формулировать для пространства произвольной размерности). Конечно, с их помощью можно строить лишь трансляционно-ковариантные морфизмы, однако получение таковых и есть главный этап в построении зарядовых секторов: на них можно налагать условие спектральности, позволяющее обеспечить неэквивалентность состояний ω_0 и $\omega_0 \circ \rho$; а, скажем, в квантовой электродинамике, где симметрия относительно группы Лоренца спонтанно нарушена [FMS1], зарядовым секторам достаточно обладать лишь трансляционной ковариантностью. Удобным для практических применений является подкласс квазилокальных трансляционных коциклов, которые уже по своему определению порождают некоторые морфизмы алгебры $\mathfrak{A}$.

О п р е д е л е н и е 6.4. Трансляционный коцикл $\Gamma(a)$, $a \in \hat{M}_{s,1}$, на пространстве $\mathcal{H}$ называется *квазилокальным*, если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\Gamma(a)A\Gamma(a)^* \in \mathfrak{A} \quad \forall a \in \hat{M}_{s,1}, \quad A \in \mathfrak{A}$;
- 2) для всех локальных наблюдаемых $A \in \mathcal{A}$ и всех способов стремления к пространственноподобной бесконечности в $M_{s,1}$ ($|a| \rightarrow \infty$, $a^2 < 0$) существует не зависящий от указанного способа предел

$$\rho_\Gamma(a) = \lim_{\substack{|a| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} w\text{-} \Gamma(a)A\Gamma(a)^*, \quad (6.5)$$

который является локально нормальным морфизмом $\mathfrak{A}$ (т.е. $\omega_0 \circ \rho_\Gamma$ — локально нормальное состояние);

- 3) $\lim_{\substack{|a|, |a+b| \rightarrow \infty \\ a^2 < 0, (a+b)^2 < 0}} w\text{-} \alpha_{(-a)}(\Gamma(b)\alpha_{(a)}(A)\Gamma(b)^*) = A \quad \forall A \in \mathfrak{A}$.

Как нетрудно проверить [F5,6], морфизмы ρ_Γ , вводимые согласно (6.5), $M_{s,1}$ -транспортибельны, а значит, при любом из приводившихся дополнительных условий также и $M_{s,1}$ -ковариантны. Получение заряженных состояний по формуле (6.5) допускает прозрачную физическую интерпретацию: как указывалось еще в цикле Доплихера—Хаага—Робертса, соотношения такого типа выражают естественную концепцию, согласно которой заряженное состояние можно мыслить как получаемое из вакуумного состояния путем переноса заряда из бесконечности в некоторую область локализации. Это свойство заряженного состояния может считаться универсальным, общим для всех типов заряда, выделенных выше. Поэтому в конкретных применениях морфизмы вида ρ_Γ действительно оказываются эффективным источником зарядовых секторов.

Дальнейшее выявление полевых свойств требует уже перехода к тому или иному конкретному классу систем. Как уже отмечалось, обсуждаемый метод применим к любому из классов I — IV: для каждого из них возможно подобрать такие типы морфизмов и коциклов, которые позволят учесть его отличительные особенности. Однако подробное исследование и спектр результатов, приближающийся к полноте, пока имеются только для класса I.

Определяющим признаком класса I, объединяющего системы без калибровочных полей и частиц нулевой массы, является свойство (6.1) — не-

ограниченная унитарная эквивалентность суперотборных секторов. Используя условие дуальности (не применявшееся еще до сих пор), нетрудно убедиться, что любой сектор, неограниченно унитарно эквивалентный вакуумному сектору, представляет собой класс эквивалентности так называемых локализованных морфизмов.

О п р е д е л е н и е 6.5 [DHR3]. Морфизм ρ C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ называется *локализованным*, если существует область $O \in B(M)$ такая, что

$$\rho(R(O)) \subset R(O), \quad \rho|_{\mathfrak{A}(O')} = \text{Id}.$$

Область O называется *носителем* локализованного морфизма ρ .

Любой локализованный морфизм может быть получен посредством асимптотического соотношения вида (6.5) из некоторого коцикла группы Пуанкаре; с помощью этой связи можно охарактеризовать морфизмы, заведомо неэквивалентные вакуумному сектору, т.е. обладающие нетривиальным зарядом [F5, теорема 2.16].

Обширный комплекс свойств системы класса I, получаемый путем анализа локализованных морфизмов, иногда называют "полевой теорией без полей": в нем присутствуют практически все свойства реалистической полевой теории, и все они выражены без участия полевых операторов или полевых алгебр. Укажем лишь главные результаты. Значительная часть их связана с той кардинальной особенностью полевой теории, что всякой частице должна соответствовать античастица. Эта особенность порождает целый ряд требований к описанию: для каждого значения заряда должно иметься "противоположное" значение, т.е. на множестве всех секторов должна существовать групповая структура; должна наличествовать операция зарядового сопряжения, переводящая каждый сектор в "противоположный" ему; "взаимно противоположные" секторы должны иметь одинаковый спектр масс и спинов, и т.п. Определение зарядового сопряжения по Доплихеру—Хаагу—Робертсу основано на идее переноса заряда из бесконечности в носитель морфизма ρ и строится с помощью асимптотических формул типа (6.5). Другой круг результатов связан с введением статистики частиц и секторов. Определение типа статистики произвольного сектора $[\rho]$ дается в терминах перестановочных свойств композиций морфизмов. Выясняется, что этот тип однозначно определяется значением для данного сектора "параметра статистики" λ_ρ , спектр всех значений которого имеет вид $\{0, \pm 1/d\}$, $d \in \mathbb{N}$. Секторы с $\lambda_\rho = \pm 1$ обладают нормальной Бозе (Ферми) статистикой, а секторы с $\lambda_\rho = \pm 1/d$, $d > 1$, — парабозе (параферми) статистикой порядка d . Случай $\lambda_\rho = 0$ является нефизическим, и недавно на базе аксиом III и VIa удалось доказать его невозможность [Fr1]. В конкретном описании сектору со статистикой $\lambda_\rho = \pm 1/d$ отвечает глобальная алгебра R_ρ такая, что R'_ρ — фактор типа I_d . Секторы с нормальной статистикой выделены целым рядом свойств. Именно, следующие условия эквивалентны [DHR3]: 1) сектор $[\rho]$ обладает статистикой Бозе — Ферми; 2) сектор $[\rho]$ абелев; 3) все морфизмы ρ_i сектора $[\rho]$ являются автоморфизмами, $\rho_i(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$; 4) в секторе выполнена дуальность, $\rho_i(\mathfrak{A}(D')) = \rho_i(R(D))'$. Последний цикл результатов [DHR4] устанавливает для систем класса I теорему о связи спина и статистики и существование теории рассеяния; в новых работах Доплихера [D6; DL]

показано, что, предполагая выполнение свойства F , можно построить операторы плотности заряда. Упомянем, наконец, что задача о реконструкции полевых алгебр решена в [DHR2] (упрощенный обзор см. [D3; PCX]) для случая отсутствия параполей; в общем случае имеются лишь частичные результаты [DR1,2].

При переходе к системам класса II ослабление свойств локализации приводит к тому, что морфизмы, выделяемые критерием (6.2), могут не обладать свойством $\rho(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}$ и должны определяться как отображения из $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тем не менее для таких систем все же удалось [BF3] обобщить основные из перечисленных результатов: наличие античастицы для каждой из частиц (и тем самым корпускулярную интерпретацию формализма), подчинение секторов Бозе или Ферми статистике или парастатистике конечного порядка и существование теории рассеяния. Что же касается классов III и IV, то результаты, полученные для них, более фрагментарны¹⁾ и отчасти упомянуты выше при описании этих классов. Нужно помнить, однако, что весь обсуждаемый предмет находится в состоянии активного развития, и наша попытка фиксации его сегодняшнего состояния имеет лишь относительный смысл. . .

В заключение следует вспомнить и о системах класса V, не охватываемых обсуждаемым методом. Мы уже указывали, что изучение таких систем является необходимым дополнением к изучению систем классов I–IV: мы получаем из него данные о строении множества основных состояний, последние же служат исходными объектами для метода морфизмов и коциклов. Данный метод отправляется от некоторого выбранного основного состояния; однако при наличии у системы целого семейства таких состояний метод, вообще говоря, должен быть применен к каждому из них. При этом нельзя исключать той возможности, что для разных основных состояний реконструируемые по ним наборы зарядовых секторов будут принадлежать к различным типам по нашей классификации. Иначе говоря, в качестве общей квантовополевой системы мы можем мыслить систему, в которой присутствуют все виды правил суперотбора. В подобной "универсальной" системе множество всех когерентных секторов образует как бы двумерную структуру: существует ряд вакуумных секторов, разделенных правилом суперотбора вида V, и над каждым из этих секторов строится иерархия зарядовых секторов, принадлежащая к одному из видов I – IV. Методика полного исследования "универсальной системы" должна включать в себя как аппарат евклидовой теории для построения "горизонта" вакуумных секторов, так и технику морфизмов и коциклов для построения "башен" зарядовых секторов. Прообраз такой системы и такой методики мы уже имеем в простейшей модели φ_2^4 и в ее анализе, проделанном Фрелихом [F2–5]: эта модель обнаруживает правила суперотбора двух видов, вакуумные и солитонные, и изучение солитонных секторов проводится посредством морфизмов и коциклов, тогда как вакуумные секторы строятся с помощью евклидовой теории.

¹⁾ Существенное продвижение, достигнутое за последний период в структурном анализе квантовой электродинамики, в своей значительной части связано не с методом морфизмов, а с так называемой теорией Строкки–Вайтмана [StW], использующей пространства состояний с индефинитной метрикой (см. Приложение).

§ 7. Op^* -АЛГЕБРЫ ПОЛЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ
И ВАКУУМНЫЕ ПРАВИЛА СУПЕРОТБОРА

После того как теория правил суперотбора и аппарат морфизмов локальных алгебр в полной мере выяснили различия между полями и наблюдаемыми, возник целый ряд исследований, в которых структура квантово-полевых систем изучалась на основе алгебр полей. Такой подход давал известные преимущества сравнительно с аксиоматикой алгебр наблюдаемых: конкретная квантовополевая система задается, как правило, определенным набором полей, так что алгебры, порождаемые этими полями, дают самый простой и краткий путь к ее алгебраическому описанию (для получения же алгебр наблюдаемых нужно проводить дополнительные построения, выделяя наблюдаемые какими-либо условиями типа калибровочной инвариантности). Помимо этого, если исходными объектами служат квантованные поля, то их задание дает более подробную информацию, нежели задание сети алгебр наблюдаемых: прежде всего, более богатыми оказываются свойства релятивистской ковариантности; см. п. 3.3, 3.5, 8.2. Но, с другой стороны, алгебры, описывающие физическую систему, теперь, вообще говоря, не заданы с самого начала, а должны каким-либо образом строиться из полей. Задача такого построения не решается автоматически, поскольку все бозонные поля представляются неограниченными операторами, тогда как аппарат алгебраического подхода рассчитан на описание квантовой системы (при заданном гильбертовом пространстве состояний) с помощью алгебр фон Неймана. Поэтому возникает альтернатива: строить алгебраическое описание непосредственно на основе неограниченных полевых операторов или же предварительно перейти от неограниченных операторов к ограниченным, каким-либо образом сопоставив системе полей сеть алгебр фон Неймана. Оба варианта этой альтернативы имеют свои преимущества и свою сферу применения. Первый из них мы рассмотрим в данном разделе, второй — в следующем.

Представление системы вайтмановских полей $A(f)$, $f \in S(\mathbb{R}^4)$ (мы ограничимся нейтральной скалярной теорией), в форме алгебраической структуры не составляет никакого труда. В силу аксиом Вайтмана все поля $A(f)$ — замыкаемые операторы, заданные на общей плотной инвариантной области $\mathcal{D}$ (области Гординга, названной так по аналогии с теорией групп Ли; см. [[РС, т. 1, с. 335]]) и тем самым порождающие так называемую полиномиальную алгебру $\tilde{\mathcal{P}}$ — совокупность всех опреде-

ленных на $\mathcal{D}$ комбинаций вида $\sum_{k=1}^n A(f_1) \dots A(f_k)$. Поскольку $A(f)$

симметричны при $f = \bar{f}$, то $\tilde{\mathcal{P}}$ есть $*$ -алгебра относительно инволюции $A(f) \rightarrow A(f)^* = A(f)^*|_{\mathcal{D}}$ и она может быть наделена сетью локальных подалгебр $\tilde{\mathcal{P}}(O)$, порождаемых всеми операторами $A(f)$, $\text{supp } f \subset O$.

Однако теория вайтмановского типа обладает и более глубоким алгебраическим содержанием. Это сразу становится очевидным при анализе соответствия $f \rightarrow A(f)$ между основными функциями и полевыми операторами, выражаемого теоремой реконструкции. С математической точки зрения эта известная теорема [[БЛТ, гл. 3, § 3]] выражает простой и чисто алгебраический факт: обобщение на определенный класс топологических небанаховых $*$ -алгебр канонической конструкции ГНС, сопоставляющей каждому состоянию на алгебре представление этой алгебры. При этом в качестве алгебры здесь служит наделенное алгебраической структурой множество основных функций, а сама вайтмановская теория $\{A(f), \mathcal{H}\}$ выступает, в итоге, как представление указанной алгебры в алгебру всех неограниченных операторов в $\mathcal{H}$ с областью $\mathcal{D}$. Последовательная переработка вайтмановской теории под этим углом зрения приводит к самостоятельному варианту аксиоматической квантовой теории поля, который обычно называют *алгебраическим подходом Борхерса*. Его основы заложены в известной работе Борхерса в 1962 г. [B2], но главные идеи были одновременно высказаны также в работах Ульмана [U] и Морена [Mau1,2].

Рассмотрим градуированное множество основных функций вайтмановской теории:

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n, \quad \mathcal{A}_0 = \mathbb{C}, \quad \mathcal{A}_k = S(\mathbb{R}^{4k}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

и наделим его структурой топологической $*$ -алгебры с единицей. Инволюция в $\mathcal{A}$ вводится по закону:

$$f = (f_0, f_1(x_1), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n), \dots) \rightarrow f^* = (\bar{f}_0, \bar{f}_1(x_1), \dots, \bar{f}_n(x_n, \dots, x_1), \dots);$$

сложение и умножение на элементы поля $\mathbb{C}$ определены естественным образом, единицей служит элемент $f = (1, 0, 0, \dots)$. Операцию умножения в $\mathcal{A}$ можно вводить различными способами, как коммутативным образом (что используется в статистической механике; см. [[P]]), так и некоммутативным. В подходе Борхерса выбирают следующее некоммутативное умножение:

$$f \times g = (f_0 g_0, f_0 g(x_1) + f_1(x_1) g_0, \dots, \sum_{k=0}^n f_k(x_1, \dots, x_k) g_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots).$$

Топологии $\tau_{S,n}$ пространств $S(\mathbb{R}^{4n})$ индуцируют в $\mathcal{A}$ топологию $\tau_{\mathcal{A}}$ прямой суммы, определяемую следующим образом: примем, что последовательность $\{f^{(\gamma)}\} \subset \mathcal{A}$ сходится к нулю, если при любом $n > 0$ $f_n^{(\gamma)} \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow \infty$ по топологии $\tau_{S,n}$ (а при $n = 0$ — в смысле сходимости в $\mathbb{C}$)

и, кроме того, найдется $n_0 \in \mathbb{N}$, не зависящее от γ и такое, что

$f_n^{(\gamma)} \equiv 0$ при всех γ и $n > n_0$. Топология $\tau_{\mathcal{A}}$ превращает $\mathcal{A}$ в полное ядерное пространство и топологическую $*$ -алгебру $[[H, \S 8]]$, называемую алгеброй Борхерса. Всякий элемент $\mathcal{A}$ имеет лишь конечное число ненулевых компонент. Алгебра $\mathcal{A}$ полупроста; она не имеет минимальных идеалов и не имеет идемпотентов, кроме 0 и 1; центр ее тривиален ($\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} = \mathbb{C}$), и ни один элемент вне центра не имеет обратного. Дуальное пространство $\mathcal{A}^*$ есть также полное ядерное пространство; его элементами

служат произвольные последовательности $(T_n)_{n=0}^{\infty}$, $T_n \in S(\mathbb{R}^{4n})'$, т.е.

$\mathcal{A}^* = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n^*$. Ряд важных отличий $\mathcal{A}$ от C^* -алгебры связан со свойствами

положительных конусов в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Как и в C^* -алгебре, в $\mathcal{A}$ существует порождающий конус $\mathcal{A}^+$, задающий отношение порядка на $\mathcal{A}$, т.е. $f = f^* \in \mathcal{A}$ влечет однозначное представление $f = g - h$, $g, h \in \mathcal{A}^+$. Однако

теперь элементы конуса имеют общий вид не $f = f^{(1)*} f^{(1)}$, а $f = \sum_{i=1}^{\infty} f^{(i)*} f^{(i)}$,

$f^{(i)} \in \mathcal{A}$, причем $\mathcal{A}^+$ не содержит внутренних точек. Далее, как и для C^* -алгебры, $\mathcal{A}^+$ определяет дуальный себе конус $\mathcal{A}^{*+}$ в $\mathcal{A}^*$, состоящий из всех $T \in \mathcal{A}^*$, таких, что $T(f) \geq 0$ для всех $f \in \mathcal{A}^+$. Элементы $\mathcal{A}^{*+}$ называются, по определению, *положительными функционалами на $\mathcal{A}$* . Как и для C^* -алгебры, всякий положительный функционал на $\mathcal{A}$ непрерывен, однако теперь уже не всякий эрмитов функционал ($T(f^*) = \overline{T(f)}$) представим как разность положительных функционалов. Несложные доказательства этих фактов см. в [Wy].

Согласно теореме реконструкции описание полевой системы с помощью операторов $A(f)$ возникает как представление алгебры $\mathcal{A}$, получаемое канонически по некоторому состоянию W на $\mathcal{A}$. Это означает, что в подходе Борхерса физическая система задается парой $(\mathcal{A}, W)$, так что все ее свойства должны передаваться свойствами этой пары. Алгебра $\mathcal{A}$ задает только класс основных функций теории, и потому на ней отражаются лишь немногие физические свойства, скажем, такие, как перенормируемость (при нарушении которой пространство Шварца должно заменяться другим пространством) или отсутствие частиц ненулевых спинов (при их наличии основные функции должны быть тензорами группы Лоренца). Все же остальные свойства и в первую очередь аксиомы Вайтмана должны выражаться как требования на состояние W . Зная, как выражаются аксиомы Вайтмана в терминах полей или же функций Вайтмана, легко найти формулировки этих аксиом и в терминах W .

1) Релятивистская ковариантность. На алгебре $\mathcal{A}$ определено автоморфное представление $\alpha: \mathcal{P}_+^{\uparrow} \rightarrow \text{Aut } \mathcal{A}$ собственной группы Пуанкаре, действующее по формуле

$$\alpha_{(a, \Lambda)}(f) = f(a, \Lambda) =$$

$$= (f_0, f_1(\Lambda^{-1}(x - a)), \dots, f_n(\Lambda^{-1}(x_1 - a) \dots \Lambda^{-1}(x_n - a)), \dots).$$

Состояние W , задающее физическую теорию, является пуанкаре-инвариантным: для всех $f \in \mathcal{A}, (a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^{\uparrow}$

$$W(f_{(a, \Lambda)}) = W(f).$$

2) Локальность. В алгебре $\mathcal{A}$ существует двусторонний незамкнутый пуанкаре-инвариантный $*$ -идеал

$$\mathcal{Y}_l = L \{ f \in A \mid f_n(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - \\ - g(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n); g(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ при } (x_i - x_{i+1})^2 \geq 0 \},$$

называемый *идеалом локальности*. Состояние W таково, что его левое ядро

$$N_W = \{ f \in A \mid W(f^* \times f) = 0 \}$$

включает в себя идеал локальности, $\mathcal{Y}_l \subset N_W$.

3) Спектральность. В алгебре $\mathcal{A}$ существует левый замкнутый пуанкаре-инвариантный $*$ -идеал

$$\mathcal{Y}_{sp} = \{ f \in A \mid \tilde{f}_n(p_1, \dots, p_n) = 0 \text{ при } p_1 \in \overline{V^+}, p_1 + p_2 \in \overline{V^+}, \dots \\ \dots, p_1 + \dots + p_n \in \overline{V^+} \}$$

($\tilde{f}_n$ — фурье-образ f_n), называемый *идеалом спектральности*. Состояние W таково, что его левое ядро включает в себя идеал спектральности, $\mathcal{Y}_{sp} \subset N_W$ ¹⁾.

4) Существование и цикличность вакуума (вакуумного вектора в пространстве состояний, определяемом функционалом W). Это свойство автоматически следует из пуанкаре-инвариантности W (условие 1).

5) Единственность вакуума. Это условие (как и в C^* -теории; см. п. 3.5) равносильно кластерному свойству состояния W :

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ a^2 < 0}} W(f \times g_{(\lambda a, 1)}) - W(f)W(g) = 0.$$

Заметим, однако, что требование единственности вакуума является далеко не столь же фундаментальным, как остальные в этом списке, и в данном разделе мы будем изучать более общие теории, которые не удовлетворяют ему.

Приведенные формулировки обсуждались неоднократно (см., например, [[БЛТ, гл. 3, § 3.1]]), и вывод их можно проделать в качестве упражнения.

Состояние W на алгебре Борхерса $\mathcal{A}$, удовлетворяющее условиям 1–4, называется *функционалом Вайтмана*. Как уже сказано, развернутое описание теории, включающее полевые операторы, получается путем сопоставления функционалу Вайтмана $*$ -представления Π алгебры $\mathcal{A}$; при этом W называется *порождающим функционалом* Π . Благодаря положительности W пространство $\mathcal{H}_\Pi$ представления Π будет сепарабельным [[СВ, с. 172]] гильбертовым пространством, однако поскольку $\mathcal{A}$ не является B^* -алгеброй, операторы $\Pi(f)$ этого представления будут, вообще говоря, неограниченными операторами в $\mathcal{H}_\Pi$, заданными на общей плотной области $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_\Pi$, т.е. Π есть представление $\mathcal{A}$ в алгебру $L_+(\mathcal{D})$ всех линейных операторов в $\mathcal{H}_\Pi$ с общей плотной областью $\mathcal{D}$. Операторы $\Pi(f)$ обладают всеми свойствами вайтмановских полей, а при $f = (0, f_1, 0, \dots)$ точно совпадают

¹⁾ Понятно, что в условиях 2 и 3 первая часть является констатацией и лишь вторая — требованием.

с ними. Значения порождающего функционала W на произведениях таких элементов задают набор функций Вайтмана.

Образ $\Pi(\mathcal{A}) \equiv \mathcal{P}$ алгебры $\mathcal{A}$ есть $*$ -алгебра, принадлежащая классу так называемых Op^* -алгебр (см. ниже определение 7.1). Она может быть снабжена сетью подалгебр $\mathcal{P}(O)$, относящихся к областям $O \in V(M)$ и характеризующих локальную структуру полевой теории. Такие подалгебры получаются как образы сужений представления Π на локальные подалгебры $\mathcal{A}(O) \subset \mathcal{A}$; последние же образуются теми элементами $f \in \mathcal{A}$, у которых носитель каждой из компонент $f_n(x_1, \dots, x_n)$ по каждой из переменных заключен в области O :

$$\mathcal{A}(O) = \{ f \in \mathcal{A} \mid \text{supp } f_n \subset O^{\times n}, \quad n = 1, 2, \dots \}.$$

$$\mathcal{P}(O) = \{ \Pi(f), \quad f \in \mathcal{A}(O) \}$$

($O^{\times n} = O \times O \times \dots \times O$ — декартово произведение n копий области O). Очевидно, что алгебры $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}(O)$ отличаются от введенных выше алгебр $\tilde{\mathcal{P}}$ и $\tilde{\mathcal{P}}(O)$, порождаемых непосредственно вайтмановскими полями, за счет присутствия "обобщенных полевых операторов" $\Pi(f_n)$. Это отличие несущественно, поскольку благодаря ядерности пространств Шварца обобщенные полевые операторы определяются произведениями обычных полей: всякий непрерывный функционал на факторизуемых функциях $f_n(x_1, \dots, x_n) = g^1(x_1) \dots g^n(x_n), g^i(x_i) \in S(\mathbf{R}^4)$, определяет функционал на всем пространстве $S(\mathbf{R}^{4n})$. С учетом этого, алгебра Борхерса может быть эквивалентным образом выбрана в виде

$$\mathcal{A} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{i=0}^n \mathcal{A}_i, \quad \mathcal{A}_0 = \mathbf{C}, \quad \mathcal{A}_i = S(\mathbf{R}^4), \quad i = 1, 2, \dots$$

Сеть алгебр неограниченных операторов $\{ \mathcal{P}(O) \}_{O \in V(M)}$ задает алгебраическую формулировку вайтмановской теории по образцу локальной квантовой теории. Легко проверить, что, как следствие аксиом Вайтмана 1–4, эта сеть удовлетворяет следующему набору аксиом, аналогичному системе аксиом I–VI алгебраического подхода:

изотония;

сильная аддитивность: для любых $O_1, O_2 \in V(M)$ $\mathcal{P}(O_1 \cup O_2) = \mathcal{P}(O_1) \vee \mathcal{P}(O_2)$;

локальность: при $O_1 \times O_2$ $\mathcal{P}(O_1)$ и $\mathcal{P}(O_2)$ перестановочны на $\mathcal{D}$;

релятивистская ковариантность;

спектральность;

существование и цикличность (относительно алгебры $\mathcal{P}$) вакуумного вектора.

В этом списке аксиом только аддитивность не является очевидной либо прямо следующей из условий 1–4. Беря алгебру Борхерса в виде, указанном выше, и учитывая, что каждый элемент $f \in \mathcal{A}$ имеет только конечное число ненулевых компонент f_n , а область $(O_1 \cup O_2)^{\times n}$ можно представить как объединение областей вида $O_1^{\times k} \times O_2^{\times l}$, мы получаем свойство аддитивности для сети подалгебр $\mathcal{A}(O)$ алгебры Борхерса:

$$\mathcal{A}(O_1 \cup O_2) = \mathcal{A}(O_1) \vee \mathcal{A}(O_2).$$

Это свойство алгебры $\mathcal{A}$ переносится в ее представление Π и дает искомую формулировку. В локальной квантовой теории аналогичное свойство (аксиома IIa) влечет слабую аддитивность (аксиома II), которая заключается в том, что совокупность всех сдвигов любой локальной алгебры порождает глобальную алгебру. Но в подходе Борхерса слабая аддитивность требует особого изучения, ибо сначала нужно уточнить, каким образом локальные алгебры $\mathcal{P}(O)$ порождают глобальную алгебру $\mathcal{P}$. В алгебре Борхерса связь локальных алгебр с глобальной очевидна. Для любого n подмножество всех функций с компактным носителем плотно в $S(\mathbb{R}^{4n})$ по его топологии. Отсюда объединение всех подалгебр $\mathcal{A}(O)$, $O \in B(M)$, плотно в $\mathcal{A}$ по топологии $\tau_{\mathcal{A}}$; а так как в пространствах Шварца есть разложение единицы, то это же будет верно и для объединения всех сдвигов $\mathcal{A}(O+a)$, $a \in M$, при фиксированной $O \in B(M)$, т.е.

$$\mathcal{A} = \overline{\bigvee_{O \in B(M)} \mathcal{A}(O)}^{\tau_{\mathcal{A}}} = \overline{\bigvee_{a \in M} \mathcal{A}(O+a)}^{\tau_{\mathcal{A}}}$$

Однако для переноса такой формулы в представление Π требуется нетривиальный анализ свойств непрерывности Π и топологий на алгебре $\mathcal{P} = \Pi(\mathcal{A})$; поэтому нужный результат пока не был получен.

Выполнение системы аксиом для сети $\{\mathcal{P}(O)\}$ позволяет обобщить для этой сети многие результаты алгебраического подхода, не связанные специфически с категорией C^* - или W^* -алгебр. В частности, для $\mathcal{P}(O)$ справедлива теорема Рее–Шлидера: хотя в теории Хаага–Араки для ее вывода требовалась слабая аддитивность, в полевой теории последняя не нужна. Это — одно из различий между полевой теорией и теорией наблюдаемых, вызванных тем, что поля $A(f)$ зависят от поточечно определенных функций $f(x)$. За счет этого применение спектральности, дающее в теории Хаага–Араки лишь

$$(\Phi, R(O)\Omega) = 0 \Rightarrow (\Phi, R(O+a)\Omega) = 0 \quad \forall a \in M$$

(ср. с. 31), в полевой теории дает сразу "свойство Рее–Шлидера"

$$(\Phi, \mathcal{P}(O)\Omega) = 0 \Rightarrow (\Phi, \mathcal{P}\Omega) = 0$$

(ср. [CB, теорема 4–2]). В итоге имеет место равенство

$$\overline{\mathcal{P}(O)\chi} = \overline{\mathcal{P}\chi}$$

для всех областей $O \subset M$ и всех векторов χ , аналитических по энергии и лежащих в области Гординга (т.е. $\chi \in \mathfrak{N} \cap \mathcal{D}$; как показал Снеллман [Sn], это множество плотно в $\mathcal{H}$). Этот результат нуждается, однако, в одном замечании. В теории Хаага–Араки теорема Рее–Шлидера сразу давала часто используемое следствие: в неприводимой теории ($R = \mathcal{B}(\mathcal{H})$) любая локальная алгебра $R(O)$ имеет плотное множество $\mathfrak{N}$ циклических векторов. Данное следствие уже не переносится на $\mathcal{P}(O)$, поскольку в неприводимой вайтмановской теории ($\mathcal{P}, \mathcal{D}$) векторы из $\mathcal{D}$ могут не быть циклическими для $\mathcal{P}$ (см. лемму 7.3). Тем не менее для неприводимой вайтмановской теории с сильной аксиомой спектральности VIa и единственным вакуумным вектором Ω^1) удастся установить существование плотного

¹) Неприводимость вайтмановской теории, вообще говоря, не влечет единственности вакуума: это — "аномалия Борхерса", обсуждаемая в п. 7.2.

множества циклических векторов для алгебр $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}(O)$. Это — недавний результат Дрисслера и Саммерса [DrS2]: они доказали, что множество векторов

$$C_{\mathcal{P}} = \{ \Phi \in \mathcal{D} \mid \Phi = A\Omega, A \in \mathcal{P} \quad \exists \quad \begin{matrix} BA\Omega = \Omega, \\ B\Omega = 0 \end{matrix} \quad B = B(A) \in \mathcal{P} \}$$

(где оператор A называется вакуумно приводимым, а оператор B — аннигилятором A) плотно в $\mathcal{H}$, и каждый его элемент является циклическим для $\mathcal{P}$. Соответственно каждый вектор $\chi \in C_{\mathcal{P}} \cap \mathfrak{N}$ является циклическим для $\mathcal{P}(O)$, и множество $C_{\mathcal{P}} \cap \mathfrak{N}$, согласно [DrS2], также плотно в $\mathcal{H}$. В итоге вопрос о циклических векторах локальных алгебр в подходе Борхерса получает не менее полное решение, чем в теории Хаага—Араки.

В целом, однако, формализм алгебр $\mathcal{P}(O)$ оказывается удобным средством лишь для довольно узкого круга физических задач. Главная причина этого, разумеется, в том, что алгебры неограниченных операторов — значительно более сложный и малоисследованный класс объектов, нежели алгебры фон Неймана или C^* -алгебры. Формализм полевых алгебр фон Неймана (см. § 8) оказывается гораздо более эффективным для конкретной физической проблематики, тогда как в подходе Борхерса пока изучались по большей части математические проблемы: строение дуального пространства алгебры Борхерса и Op^* -алгебр, структура тензорных алгебр основных функций, различные способы топологизации Op^* -алгебр (работы лейпцигской школы; см. [La1,2]). Из небольшого числа физических задач, в которых данный подход сумел заметно продвинуться, две, безусловно, являются основными: это — проблема существования вайтмановской теории с нетривиальным взаимодействием и описание вакуумной структуры вайтмановской теории. Первая из этих задач есть пресловутая ”проблема нетривиального примера” аксиоматической теории — одна из центральных для любого из вариантов аксиоматического подхода в квантовой теории поля. В ее изучении подход Борхерса имеет перед локальной квантовой теорией то преимущество, что в рамках вайтмановской теории известен большой набор критериев, различающих свободные и взаимодействующие системы (см. [[БЛТ]] и § 9). Эти критерии удается переформулировать в терминах свойств непрерывности функционала Вайтмана W [Ho]. Однако доказательство существования положительного функционала W' , удовлетворяющего аксиомам 1 — 3 и заведомо отличного от функционала Вайтмана свободного или обобщенно свободного поля (абстрактное решение проблемы нетривиального примера), приводит к целому ряду вопросов о свойствах идеалов локальности и спектральности, для решения которых в теории алгебр типа $\mathcal{A}$ или $\mathcal{P}$ отнюдь не имеется готового аппарата. На достигнутых пока здесь промежуточных результатах мы не будем останавливаться [B15; Y 3–5; Ho].

Напротив, задачу о вакуумной структуре мы рассмотрим подробно: она тесно связана с проблематикой правил суперотбора (см. § 6), а полученные результаты тут более законченны. По своему физическому содержанию эта задача дополняет анализ вакуумной структуры локальной квантовой теории в п. 3.5: в ней имеются новые аспекты, порождаемые соответствием между вайтмановской теорией и квантовой статистической

механикой [[ЕКТП]]. В самом деле, как устанавливает евклидова квантовая теория поля, функции Вайтмана являются прямыми аналогами корреляционных функций статистической системы, а каждый набор корреляционных функций задает, как известно, определенную физическую фазу. Отсюда понятие фазы переносится и на вайтмановскую теорию, и возникает проблематика описания многофазных квантовополевых систем, изучения фазовых диаграмм полевых моделей и т.п.; подобная проблематика весьма актуальна сейчас в исследованиях по конструктивной теории поля. Из сказанного ясно, что все задачи такого рода должны ставиться и изучаться именно в полевом формализме, в терминах функционалов Вайтмана и алгебр вайтмановских полей. Прежде чем переходить к их рассмотрению, мы приведем основные сведения об Op^* -алгебрах.

7.1. Элементы теории Op^* -алгебр.

Общие сведения. В математической литературе вводились и изучались различные классы алгебр неограниченных операторов: алгебры измеримых и локально измеримых операторов [Se2], [[CAXC]], EW^* -алгебры Инуэ [In], V^* и SV^* — алгебры Эпифанио и Трапани [ET; AET] и др. Среди этих классов Op^* -алгебры выделяются рядом свойств, которые делают их удобными для широкого круга как математических, так и физических приложений: за счет наличия общей плотной области определения для всех своих операторов именно такие алгебры служат образами представлений топологических (ненормированных) * -алгебр; в физике же к этому классу принадлежат все алгебры, порождаемые системами вайтмановских полей, как в общей аксиоматической теории, так и в конкретных моделях. Перейдем к точным определениям.

Определение 7.1. Пара $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$, где $\mathcal{P}$ — совокупность линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ — линейное множество (линеал), плотное в $\mathcal{H}$, называется *Op-алгеброй*, если $\mathcal{P}$ есть алгебра с единицей и для всех операторов A из $\mathcal{P}$ выполнены условия:

$$1) \text{dom } A = \mathcal{D}, \quad A\mathcal{D} \subset \mathcal{D};$$

если, кроме того, имеют место условия

$$2) \text{dom } A^* \supset \mathcal{D};$$

$$3) A^*|_{\mathcal{D}} \equiv A^+ \in \mathcal{P},$$

то $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ называется *Op^* -алгеброй*.

Символ области $\mathcal{D}$ мы будем, как правило, опускать. Очевидно, что Op^* -алгебра $\mathcal{P}$ есть * -алгебра по отношению к инволюции $A \rightarrow A^+$, и все операторы из $\mathcal{P}$ замыкаемы. Все Op^* -алгебры с заданной областью $\mathcal{D}$ можно рассматривать как подалгебры с единицей Op^* -алгебры $L_+(\mathcal{D})$, включающей все операторы A такие, что $\text{dom } A = \mathcal{D}$, $A\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $A^*\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$.

Очень часто удобно рассматривать Op^* -алгебру как образ представления $\Pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ некоторой * -алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру всех линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. (В частности, для вайтмановской полевой Op^* -алгебры такой алгеброй служит алгебра Борхерса.) Поскольку в определение Π входит требование существования плотного в $\mathcal{H}$ линеала $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Pi)$, называемого областью Π и такого, что $\text{dom } \Pi(f) = \mathcal{D}$ для всех $f \in \mathcal{A}$, то образ $\Pi(\mathcal{A})$ всякого представления Π есть *Op-алгебра*; если же

представление Π удовлетворяет условию

$$\Pi(f)^* \supset \Pi(f^*) \text{ для всех } f \in \mathcal{A}$$

(такие представления называются *эрмитовыми*), то образ Π есть Op^* -алгебра.

Существует частичная параллель между теорией эрмитовых представлений и теорией эрмитовых (симметрических) операторов. Подобно расширениям симметрического оператора, с эрмитовым представлением Π^* -алгебры $\mathcal{A}$ канонически ассоциируются его определенные расширения. Рассмотрим в $\mathcal{H}$ области

$$\mathcal{D}(\bar{\Pi}) = \bigcap_{f \in \mathcal{A}} \text{dom } \overline{\Pi(f)}, \quad \mathcal{D}(\Pi^*) = \bigcap_{f \in \mathcal{A}} \text{dom } \Pi(f)^*,$$

где $\overline{\Pi(f)}$ — замыкание оператора $\Pi(f)$. Для всякого $f \in \mathcal{A}$ положим, по определению,

$$\bar{\Pi}(f) = \overline{\Pi(f)}|_{\mathcal{D}(\bar{\Pi})}, \quad \Pi^*(f) = \Pi(f^*)^*|_{\mathcal{D}(\Pi^*)}.$$

Рассмотрим также область

$$\mathcal{D}(\Pi^{**}) = \bigcap_{f \in \mathcal{A}} \text{dom } \Pi^*(f)^*$$

и положим, по определению,

$$\Pi^{**}(f) = \Pi^*(f^*)^*|_{\mathcal{D}(\Pi^{**})}.$$

О п р е д е л е н и е 7.2. Пусть Π эрмитово представление * -алгебры $\mathcal{A}$. Отображения

$$\bar{\Pi}: f \rightarrow \bar{\Pi}(f), \quad \Pi^*: f \rightarrow \Pi^*(f), \quad \Pi^{**}: f \rightarrow \Pi^{**}(f)$$

алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ определяют представления $\bar{\Pi}$, которые мы будем называть *замыканием* представления Π , *сопряженным* к Π и *вторым сопряженным* к Π соответственно.

Непосредственно из определений ясно, что справедливы следующие соотношения:

$$\Pi \subset \bar{\Pi} \subset \Pi^{**} \subset \Pi^*, \tag{7.1}$$

где символ $\Pi_1 \subset \Pi_2$ означает, что представление Π_2 есть расширение Π_1 , т.е. $\mathcal{D}(\Pi_1) \subset \mathcal{D}(\Pi_2)$ и для всех $f \in \mathcal{A}$ $\Pi_1(f) \subset \Pi_2(f)$ (а Op^* -алгебра $\Pi_1(\mathcal{A})$ называется расширением Op^* -алгебры $\Pi_2(\mathcal{A})$). При этом любое из включений (7.1), вообще говоря, может не быть равенством. Нетрудно проверить, что эрмитовость Π влечет эрмитовость $\bar{\Pi}$ и Π^{**} . Напротив, Π^* , вообще говоря, является неэрмитовым, однако для него справедливы следующие легко выводимые равенства [GS, теорема 2]:

$$\Pi^* = \bar{\Pi}^* = \Pi^{***}.$$

О п р е д е л е н и е 7.3. Эрмитово представление Π (а также Op^* -алгебру $\Pi(\mathcal{A})$) будем называть ¹⁾:

¹⁾ Отметим различия с терминологией работ [P1] и [Ba3]: у Пауэрса в [P1] само-сопряженным в существенном называется представление Π такое, что $\bar{\Pi} = \Pi^*$; у Васильева в [Ba3] замкнутым называется представление Π такое, что $\Pi^{**} = \Pi$.

замкнутым, если $\Pi = \bar{\Pi}$;

самосопряженным в существенном, если $\Pi^{**} = \Pi^*$;

самосопряженным, если $\Pi = \Pi^*$.

Как легко видеть, для замкнутости Π достаточно, чтобы был замкнут хотя бы один из операторов $\Pi(f)$; для самосопряженности Π достаточно, чтобы хотя бы один из $\Pi(f)$ был самосопряжен. Замкнутым представлениям можно также дать другую характеристику в терминах весьма употребительной в теории Op^* -алгебр граф-топологии на $\mathcal{D}(\Pi)$.

О п р е д е л е н и е 7.4. Пусть Π — представление $*$ -алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, S — конечное подмножество элементов $\mathcal{A}$. Граф-топологией на области $\mathcal{D}(\Pi)$ назовем топологию, порождаемую следующей системой окрестностей нуля:

$$\mathcal{N}(S, \epsilon) = \{ \Psi \in \mathcal{D}(\Pi) \mid \sum_{f \in S} \|\Pi(f)\Psi\| < \epsilon \}.$$

Замыкание множества $\mathfrak{M} \subset \mathcal{D}(\Pi)$ в граф-топологии будем обозначать $\overline{\mathfrak{M}}^G$. Вектор $\chi \in \mathcal{D}(\Pi)$ такой, что $\overline{\Pi(\mathcal{A})\chi}^G \supset \mathcal{D}(\Pi)$ будем называть *сильно циклическим*, а всякое представление, обладающее такими векторами, — *сильно циклическим*.

Согласно этому определению все операторы $\Pi(f)$, $f \in \mathcal{A}$, непрерывны в граф-топологии. Как показал Пауэрс [P1], представление Π является замкнутым тогда и только тогда, когда его область $\mathcal{D}(\Pi)$ замкнута в граф-топологии. Иначе говоря, имеет место равенство

$$\overline{\mathcal{D}(\Pi)}^G = \mathcal{D}(\bar{\Pi}). \quad (7.2)$$

Введем, далее, сильный Π'_s и слабый Π'_w коммутанты Op^* -алгебры $\Pi(\mathcal{A})$ с областью $\mathcal{D}$:

$$\Pi'_s = \{ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid AT \supset TA \quad \forall A \in \Pi(\mathcal{A}) \},$$

$$\Pi'_w = \{ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid (A^*\Phi, T\Psi) = (T^*\Phi, A\Psi) \quad \forall A \in \Pi(\mathcal{A}), \Phi, \Psi \in \mathcal{D} \}.$$

В последний период все шире начинают употребляться различные определения коммутанта $\Pi(\mathcal{A})$ как множества неограниченных операторов [ET; AET; AJ]; в частности, непосредственным обобщением Π'_w является "слабый неограниченный коммутант":

$$\Pi'_\sigma = \{ X \in C(\mathcal{D}, \mathcal{H}) \mid (A^*\Phi, X\Psi) = (X^*\Phi, A\Psi) \quad \forall A \in \Pi(\mathcal{A}), \Phi, \Psi \in \mathcal{D} \},$$

где $C(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ — множество всех замыкаемых операторов B в $\mathcal{H}$ таких, что $\mathcal{D} \subset \text{dom } B \cap \text{dom } B^*$. Очевидно, что $\Pi'_w = \Pi'_\sigma \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Теорию неограниченных коммутантов мы полагаем преждевременным излагать в книге, однако в п. 7.2 мы уже укажем первые физические применения коммутанта Π'_σ . Что же до ограниченных коммутантов, то несложно установить их следующие главные свойства:

- 1) Π'_w есть слабо замкнутое линейное $*$ -подмножество $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, содержащее единицу;
- 2) Π'_w линейно порождается своими положительными элементами;
- 3) $\Pi'_w = \bar{\Pi}'_w$;
- 1') Π'_s есть алгебра с единицей;

2') $\bar{\Pi}'_s$ слабо замкнут;

3') $\Pi'_s \subset \Pi'_w$; если $\Pi = \Pi^*$, то $\Pi'_s = \Pi'_w$.

Здесь свойства 1, 3, 1', 3' очевидны либо проверяются непосредственно. Свойство 2 следует из того, что в силу 1 Π'_w линейно порождается своими эрмитовыми элементами, а при $T = T^* \in \Pi'_w$ имеем и $\|T\|I \pm T \in \Pi'_w$, причем $\|T\|I \pm T \geq 0$ и $T = \frac{1}{2}(\|T\|I + T) - \frac{1}{2}(\|T\|I - T)$. Для вывода 2'

возьмем направленность $\{T_\alpha\}$ из $\bar{\Pi}'_s$, слабо сходящуюся к некоторому $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Для всех $A \in \Pi(A)$, $\Phi \in \mathcal{D}$ имеем $T_\alpha A \Phi = A T_\alpha \Phi$, так что пара $(T_\alpha \Phi, T_\alpha A \Phi)$ принадлежит графику A и при $T_\alpha \rightarrow T$ слабо сходится к $(T\Phi, TA\Phi)$. Но на линейных подмножествах слабая и сильная сходимости совпадают, откуда следует, что $(T\Phi, TA\Phi)$ принадлежит графику $\bar{A}$ и, значит, $T \in \bar{\Pi}'_s$.

Класс простых примеров, когда Π'_w не является алгеброй, был указан Пауэрсом, который доказал [P1, лемма 3.2], что для эрмитовых представлений Π свободной абелевой $*$ -алгебры $\mathcal{A}$, порождаемой одним эрмитовым генератором A_0 (т.е. $\mathcal{A} \ni A = \sum z_i A_0^i$), Π'_w есть алгебра в том и только в том случае, если оператор $\Pi(A_0)$ в существенном самосопряжен. Условие, что Π'_w — алгебра фон Неймана, выделяет важный подкласс Op^* -алгебр; как легко видеть, он более широк, чем подкласс самосопряженных ($\Pi = \Pi^*$) Op^* -алгебр и, в частности, включает в себя все Op^* -алгебры, для которых $\Pi^{**} = \Pi^*$.

Для содержащей единицу $*$ -подалгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ проекторы из ее коммутанта находятся во взаимно однозначном соответствии с ее инвариантными подпространствами и с действующими в таких подпространствах ее субпредставлениями. Для Op^* -алгебр эта связь, как и само понятие инвариантного подпространства, приобретает более сложный характер. За счет возможности различного геометрического расположения подпространства по отношению к области $\mathcal{D}$ Op^* -алгебры $\mathcal{P}$ здесь возникает целый ряд различных видов инвариантных и приводящих подпространств $\mathcal{M}$. Мы остановимся лишь на главных из них (более полный анализ см. в [BCX1, § 2]). Линейное, вообще говоря, незамкнутое подмножество (линеал) $\mathcal{M}$ в $\mathcal{H}$ будем называть *инвариантным* относительно Op^* -алгебры $\mathcal{P}$, если

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{D}, \mathcal{P}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}.$$

В этом случае для всех операторов $A \in \mathcal{P}$ существуют сужения $A|_{\mathcal{M}}$ и их совокупность, как легко проверить, образует Op^* -алгебру $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$, действующую в гильбертовом пространстве $\bar{\mathcal{M}}$; иначе говоря, если $\mathcal{P} = \Pi(\mathcal{A})$, то в $\bar{\mathcal{M}}$ действует эрмитово субпредставление $\Pi_{\mathcal{M}}: \Pi(f) \rightarrow \Pi(f)|_{\mathcal{M}} \quad \forall f \in \mathcal{A}$, эрмитова представления Π . Первое важное отличие от свойств $*$ -алгебр ограниченных операторов заключается в том, что проектор $P_{\mathcal{M}}$ на $\bar{\mathcal{M}}$ может не коммутировать с алгеброй $\mathcal{P}$ ни в сильном, ни в слабом смысле. Условия $P_{\mathcal{M}} \in \Pi'_s$ или $P_{\mathcal{M}} \in \Pi'_w$ оказываются необходимыми и достаточными для принадлежности $\bar{\mathcal{M}}$ к некоторым определенным видам инвариантных и приводящих подпространств, однако они вовсе не обязательны для произвольного элемента из совокупности всех таких подпространств.

Лемма 7.1. Пусть Π — эрмитово представление, $\mathcal{D}_1$ — линеал в $\mathcal{H}$, P_1 и $P_1^\perp$ — проекторы на $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}_1$ и $\mathcal{H}_1^\perp$ соответственно. Тогда следующие

условия эквивалентны:

- 1) $P_1 \in \Pi'_s$;
- 2) $P_1^\perp \in \Pi'_s$;
- 3) $\mathcal{D}_1$ "ортогонально приводит" Π , т.е.

$$P_1 \mathcal{D}(\Pi) = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{D}(\Pi), \quad \Pi(A)P_1 \mathcal{D}(\Pi) \subset P_1 \mathcal{D}(\Pi), \\ \Pi(A)P_1^\perp \mathcal{D}(\Pi) \subset P_1^\perp \mathcal{D}(\Pi).$$

Кроме того, эквивалентны следующие условия:

- 1') $P_1 \in \Pi'_w$;
- 2') $P_1^\perp \in \Pi'_w$;
- 3') $\mathcal{D}_1$ "слабо ортогонально приводит" Π , т.е.

$$P_1 \mathcal{D}(\Pi) \subset \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{D}(\Pi), \quad \Pi^*(A)P_1 \mathcal{D}(\Pi) \subset P_1 \mathcal{D}(\Pi), \\ \Pi^*(A)P_1^\perp \mathcal{D}(\Pi) \subset P_1^\perp \mathcal{D}(\Pi).$$

Доказательство. Эквиваленции $1 \leftrightarrow 2$ и $1' \leftrightarrow 2'$ — следствие наличия единицы в Π'_s и Π'_w . $1 \rightarrow 3$ и $1' \rightarrow 3'$ очевидны из того, что $P_1 \in \Pi'_s$ влечет $P_1 \mathcal{D}(\Pi) \subset \mathcal{D}(\Pi)$ и $\Pi(A)P_1 \mathcal{D}(\Pi) \subset P_1 \mathcal{D}(\Pi)$ (т.е. линейал $P_1 \mathcal{D}(\Pi)$ инвариантен относительно $\Pi(\mathcal{A})$), а $P_1 \in \Pi'_w$ влечет $P_1 \mathcal{D}(\Pi) \subset \mathcal{D}(\Pi)^*$ и $\Pi^*(A)P_1 \mathcal{D}(\Pi) \subset P_1 \mathcal{D}(\Pi)$, и аналогично для $P_1^\perp$. Получим $3 \rightarrow 1$. Для всех $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}(\Pi)$ и $f \in \mathcal{A}$

$$(\Pi(f)P_1\Phi, \Psi) = (\Pi(f)P_1\Phi, P_1\Psi) + (\Pi(f)P_1\Phi, P_1^\perp\Psi) = (P_1\Pi(f)P_1\Phi, \Psi),$$

поскольку в силу Π -инвариантности $P_1 \mathcal{D}(\Pi)$, $P_1^\perp \Pi(f)P_1\Phi = 0$. С другой стороны, в силу Π -инвариантности $P_1^\perp \mathcal{D}(\Pi)$ имеем

$$(P_1\Pi(f)\Phi, \Psi) = (P_1\Pi(f)P_2\Phi, \Psi) + (P_1\Pi(f)P_1^\perp\Phi, \Psi) = \\ = (P_1\Pi(f)P_1\Phi, \Psi),$$

так что для всех $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi)$ и $f \in \mathcal{A}$ $\Pi(f)P_1\Phi = P_1\Pi(f)\Phi$, т.е. $P_1 \in \Pi'_s$. Вывод $3' \rightarrow 1'$ аналогичен. $\square$

В случае самосопряженного представления $\Pi = \Pi^*$, когда $\Pi'_s = \Pi'_w \equiv \Pi'$ есть алгебра фон Неймана, условие $P_1 \in \Pi'$ выделяет класс подпространств, где действуют самосопряженные субпредставления Π . Такие подпространства называются *самосопряженными*.

Предложение 7.2 [P1]. Пусть Π — самосопряженное представление, $\mathcal{H}_1$ — подпространство $\mathcal{H}$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $P_1 \in \Pi'$;
- 2) $\mathcal{H}_1$ — самосопряженное подпространство.

При этом самосопряженное представление, действующее в $\mathcal{H}_1$, единственно и имеет область $\mathcal{D}_1 = P_1 \mathcal{D}(\Pi) = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{D}(\Pi)$.

Доказательство. $1 \rightarrow 2$. Согласно лемме 7.1 при $P_1 \in \Pi'$ $P_1 \mathcal{D}(\Pi)$ есть плотный линейал в $\mathcal{H}_1$, инвариантный относительно $\Pi(\mathcal{A})$, так что в $\mathcal{H}_1$ корректно определено эрмитово субпредставление $\Pi_{\mathcal{D}_1}$ с областью $\mathcal{D}_1 = P_1 \mathcal{D}(\Pi)$. Чтобы доказать самосопряженность $\Pi_{\mathcal{D}_1}$, выберем $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_{\mathcal{D}_1}^*)$ и покажем, что $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi_{\mathcal{D}_1}) = P_1 \mathcal{D}(\Pi)$. Поскольку для всех $f \in \mathcal{A}$ $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi(f)|_{\mathcal{D}_1}^*)$, то существует константа K , зависящая от f и Φ ,

и такая, что

$$|(\Phi, \Pi(f)\Psi)| \leq K \|\Psi\| \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}_1.$$

С учетом условия 1 и $P_1 \Phi = \Phi$, для всех $\chi \in \mathcal{D}(\Pi)$ имеем

$$|(\Phi, \Pi(f)\Psi)| = |(\Phi, \Pi(f)P_1\Psi)| \leq K \|P_1\Psi\| \leq K \|\Psi\|.$$

Это означает, что $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi(f)^*)$ для всех $f \in \mathcal{A}$, откуда $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi^*) = \mathcal{D}(\Pi)$ и $P_1 \Phi = \Phi$ дают искомого: $\Phi \in P_1 \mathcal{D}(\Pi)$.

$2 \rightarrow 1$. Сначала покажем, что область $\mathcal{D}_1$ самосопряженного представления $\Pi_{\mathcal{E}_1}$ в $\mathcal{H}_1$ совпадает с $P_1 \mathcal{D}(\Pi)$. Сразу имеем $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{D}(\Pi) \subset P_1 \mathcal{D}(\Pi)$. Для вывода обратного вложения возьмем $\Phi \in P_1 \mathcal{D}(\Pi)$, т.е. $\Phi = P_1 \Phi_1$, $\Phi_1 \in \mathcal{D}(\Pi)$. Для всех $\Psi \in \mathcal{D}_1$ имеем

$$(\Phi, \Pi(f)\Psi) = (P_1 \Phi_1, \Pi(f)\Psi) = (\Phi_1, \Pi(f)\Psi). \quad (7.3)$$

Ввиду $\mathcal{D}(\Pi) \subset \mathcal{D}(\Pi^*)$, $\Phi_1 \in \mathcal{D}(\Pi(f)^*)$ для всех $f \in \mathcal{A}$. Следовательно, существует константа K , зависящая от f и Φ_1 и такая, что для всех $\Psi \in \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}(\Pi)$ $|(\Phi_1, \Pi(f)\Psi)| \leq K \|\Psi\|$ (можно взять, например, $K = \|\Pi(f)^* \Phi_1\|$). Тогда с учетом (7.3), для всех $\Psi \in \mathcal{D}_1$

$$|(\Phi, \Pi(f)\Psi)| = |(\Phi_1, \Pi(f)\Psi)| \leq K \|\Psi\|,$$

что дает $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi(f)^*)$ для всех $f \in \mathcal{A}$, т.е. $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi^*) = \mathcal{D}(\Pi_{\mathcal{E}_1}) = \mathcal{D}_1$ благодаря самосопряженности $\Pi_{\mathcal{E}_1}$. Мы получили, что

$$\mathcal{D}_1 = P_1 \mathcal{D}(\Pi).$$

Далее, с учетом доказанного, для всех $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}(\Pi)$ и $f \in \mathcal{A}$ имеем

$$(\Pi(f)^* \Phi, P_1 \Psi) = (\Phi, \Pi(f)P_1 \Psi) = (\Phi, P_1 \Pi(f)P_1 \Psi),$$

а также

$$\begin{aligned} (\Phi, P_1 \Pi(f)\Psi) &= (\Pi(f)^* P_1 \Phi, \Psi) = (P_1 \Pi(f^*) P_1 \Phi, \Psi) = \\ &= (\Pi(f^*) P_1 \Phi, \Psi) = (\Phi, P_1 \Pi(f)P_1 \Psi), \end{aligned}$$

откуда следует, что $P_1 \in \Pi'_w = \Pi'$. $\square$

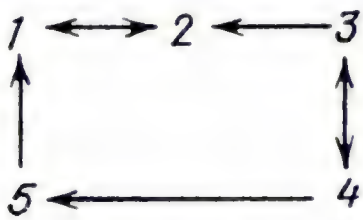
Таким образом, для самосопряженного представления Π существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех проекторов из Π' и множеством всех самосопряженных подпространств $\mathcal{H}$ (но отнюдь не всех инвариантных подпространств).

Эрмитовы представления Π (а равно Op^* -алгебры $\Pi(\mathcal{A})$), для которых $\Pi'_w = \mathcal{C}(\mathcal{H})$, называются *неприводимыми*. Свойства их существенно отличаются от привычных свойств неприводимых представлений нормированных $*$ -алгебр. В первую очередь здесь нарушаются стандартные эквиваленции между неприводимостью представления, отсутствием у него замкнутых инвариантных подпространств и цикличностью любого вектора из пространства представления.

Л е м м а 7.3 [GS]. *Класс неприводимых самосопряженных представлений характеризуется следующим набором достаточных условий:*

- 1) представление Π неприводимо, $\Pi'_w = \mathcal{C}(\mathcal{H})$;
- 2) Π не имеет нетривиальных самосопряженных подпространств;
- 3) Π не имеет нетривиальных замкнутых в граф-топологии инвариантных подпространств;

4) любой вектор из $\mathcal{D}(\Pi)$ сильно циклический;
 5) любой вектор из $\mathcal{D}(\Pi)$ циклический,
 которые однако, не все являются необходимыми и эквивалентными друг другу, а связаны лишь следующими импликациями:



Доказательство. Импликации $3 \rightarrow 2$ и $4 \rightarrow 5$ тривиальны. $1 \leftrightarrow 2$ вытекает из предложения 7.2.

$3 \rightarrow 4$. Для произвольного $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi)$ $\Pi(\mathcal{A})\Phi$ есть нетривиальный инвариантный линеал Π . Докажем, что его граф-замыкание (лежащее в $\mathcal{D}(\Pi)$ в силу замкнутости Π) есть также инвариантный линеал. Для произвольного $\Psi \in \Pi(\mathcal{A})\Phi$ существует направленность $\{\Psi_\alpha\}$ из $\Pi(\mathcal{A})\Phi$, граф-сходящаяся к Ψ . Отсюда для любых $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ имеем

$$\Pi(f_1)\Pi(f_2)\Psi_\alpha = \Pi(f_1f_2)\Psi_\alpha \rightarrow \Pi(f_1f_2)\Psi = \Pi(f_1)\Pi(f_2)\Psi,$$

так что $\varinjlim_\alpha \Pi(f_2)\Psi_\alpha = \Pi(f_2)\Psi$. Отсюда следует, что

$$\Pi(\mathcal{A})\overline{\Pi(\mathcal{A})\Phi}^G \subset \overline{\Pi(\mathcal{A})\Phi}^G,$$

т.е. $\overline{\Pi(\mathcal{A})\Phi}^G$ — граф-замкнутый инвариантный линеал. В силу 3 $\overline{\Pi(\mathcal{A})\Phi}^G = \mathcal{D}(\Pi)$, т.е. Φ сильно циклический.

$4 \rightarrow 3$. Если $\mathcal{D}_1$ — граф-замкнутый инвариантный линеал, отличный от $\mathcal{D}(\Pi)$, то любой $\Phi \in \mathcal{D}_1$ не является сильно циклическим.

$5 \rightarrow 1$. В силу предложения 7.2 любому нетривиальному проектору $P_1 \in \Pi'$ отвечает нетривиальное самосопряженное подпространство $\mathcal{H}_1$. Для любого вектора $\Phi \in P_1\mathcal{D}(\Pi)$ имеем $\Pi(\mathcal{A})\Phi = \mathcal{H}_1$, т.е. Φ не циклический. $\square$

Наконец, приведем обобщение для Op^* -алгебр канонической конструкции ГНС, которая в случае нормированных $*$ -алгебр устанавливает взаимную связь между состояниями на алгебре и ее циклическими представлениями. Аналогом класса циклических представлений теперь выступают сильно циклические представления.

Предложение 7.4. Каждому состоянию W на $*$ -алгебре $\mathcal{A}$ с единицей отвечает сильно циклическое эрмитово представление Π алгебры $\mathcal{A}$ такое, что для всех $f \in \mathcal{A}$

$$W(f) = W_{\Phi_0}(f) = (\Phi_0, \Pi(f)\Phi_0), \quad (7.4)$$

где Φ_0 — сильно циклический вектор Π . При этом представление Π , порожденное состоянием W , неприводимо тогда и только тогда, когда W чисто.

Доказательство. Конструкция гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и операторов $\Pi(f)$ представления Π , проводимая так же, как в теории C^* -алгебр, дана в теореме реконструкции Вайтмана [[БЛТ, гл. 3, § 3]]. В обычные формулировки этой теоремы не включается лишь утверждение о сильной циклическости представления Π . Чтобы убедиться в ней, заметим, что Π определяется как замыкание представления $\hat{\Pi}$ с областью $\mathcal{D}(\hat{\Pi}) = \{\hat{\Pi}(f)\Phi_0\}_{f \in \mathcal{A}}$, где $\Phi_0 \in \mathcal{H}$ — класс эквивалентности единичного элемента из $\mathcal{A}$. Отсюда, согласно (7.2), $\mathcal{D}(\Pi) = \overline{\mathcal{D}(\hat{\Pi})}^G = \overline{\Pi(\mathcal{A})\Phi_0}^G$.

Соответствие между неприводимыми сильно циклическими представлениями и чистыми состояниями также устанавливается аналогично C^* -теории. Если W не чисто, то $W = \lambda W_1 + (1 - \lambda) W_2$, где W_1 и $W_2 \neq W_1$ — состояния на $\mathcal{A}$, $\lambda \in (0, 1)$. По состоянию W_1 введем на $\{\Pi(\mathcal{A})\Phi_0\} \times \{\Pi(\mathcal{A})\Phi_0\}$ билинейную форму:

$$\langle \Pi(f)\Phi_0, \Pi(g)\Phi_0 \rangle = \lambda W_1(f^*g).$$

Используя тот факт, что $W(f^*f) > \lambda W_1(f^*f) > 0$ для всех $f \in \mathcal{A}$, показываем, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ однозначно определяет положительный оператор $0 < B < \lambda I$ такой, что для всех $f, g \in \mathcal{A}$

$$\langle \Pi(f)\Phi_0, \Pi(g)\Phi_0 \rangle = (\Pi(f)\Phi_0, B\Pi(g)\Phi_0)$$

и для всех $f, g_1, g_2 \in \mathcal{A}$

$$(\Pi(g_1)\Phi_0, B\Pi(f)\Pi(g_2)\Phi_0) = (\Pi(f^*)\Pi(g_1)\Phi_0, B\Pi(g_2)\Phi_0). \quad (7.5)$$

Поскольку операторы $\Pi(f)$ и $\Pi(f^*)$ непрерывны в граф-топологии, а $\Pi(\mathcal{A})\Phi_0$ плотно в ней в $\mathcal{D}(\Pi)$, (7.5) сохраняет справедливость при замене $\Pi(g_1)\Phi_0$ и $\Pi(g_2)\Phi_0$ на произвольные $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}(\Pi)$, что дает

$$(\Phi, B\Pi(f)\Psi) = (\Pi(f^*)\Phi, B\Psi),$$

т.е. $B \in \Pi'_w$ и Π — приводимое представление.

Обратно, если $\Pi'_w \neq \mathcal{C}(\mathcal{H})$, выберем $B \in \Pi'_w$, $0 < B < I$. Заметим, что $(\Phi_0, B\Phi_0) > 0$, поскольку в противном случае для всех $f \in \mathcal{A}$

$$(\Pi(f)\Phi_0, B\Pi(f)\Phi_0) = (\Pi(f^*f)\Phi_0, B\Phi_0) = 0,$$

что влечет $B = 0$. Для всех $f \in \mathcal{A}$ имеем

$$(\Phi_0, B\Pi(f^*f)\Phi_0) = (\Pi(f)\Phi_0, B\Pi(f)\Phi_0) > 0,$$

$$(\Phi_0, (I - B)\Pi(f^*f)\Phi_0) = (\Pi(f)\Phi_0, (I - B)\Pi(f)\Phi_0) > 0.$$

Это означает, что $W_1(\cdot) \equiv (\Phi_0, B\Phi_0)^{-1}(\Phi_0, B\Pi(\cdot)\Phi_0)$ и $W_2(\cdot) \equiv (\Phi_0, (I - B)\Phi_0)^{-1}(\Phi_0, (I - B)\Pi(\cdot)\Phi_0)$ суть состояния на $\mathcal{A}$, причем $W = \lambda W_1 + (1 - \lambda) W_2$, где $\lambda = (\Phi_0, B\Phi_0)$, и $W_1 \neq W_2$ ввиду $B \neq cI$. $\square$

Векторные состояния на Op^* -алгебрах. Очевидно, что при изучении вакуумной структуры вайтмановской теории, характеризуемой полевой Op^* -алгеброй $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ и произвольным вакуумным подпространством $\mathcal{H}_0$, центральным объектом оказывается функционал Вайтмана — векторное состояние $W_\Omega = (\Omega, \cdot \Omega)$ на алгебре $\mathcal{P}$ такое, что $\Omega \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{D} \cap S_1$. В этой связи предварительно возникает математическая задача о свойствах векторных состояний W_Φ , $\Phi \in \mathcal{D} \cap S_1$, на Op^* -алгебрах. Анализ состояний W_Φ удобно проводить в сопоставлении со свойствами векторных состояний на алгебрах фон Неймана. Для этой цели мы, наряду с Op^* -алгеброй $\mathcal{P}$, введем ассоциированную с ней алгебру фон Неймана $R = (\mathcal{P}'_w)'$ и будем параллельно рассматривать для векторов $\Phi \in \mathcal{D} \cap S_1$ состояние W_Φ на $\mathcal{P}$ и состояние ω_Φ на R . Главными характеристиками состояния ω_Φ являются носитель состояния (проектор $P_\Phi^{R'}$ или, равносильно, циклическое подпространство $\mathcal{H}_\Phi^{R'}$) и прообраз $\mathfrak{M}_\Phi^R$; наряду с этим к характеристикам ω_Φ относятся проектор P_Φ^R на пространство $\mathcal{H}_\Phi^R$ ГНС-представления,

отвечающего ω_Φ , а также центральный носитель проекторов P_Φ^R и $P_\Phi^{R'}$ — проектор $P_\Phi^{\mathcal{L}'} \in \mathcal{L}$. (Последняя характеристика особенно существенна в квантовополевых приложениях, поскольку подпространство $\mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{L}'}$ для чистого состояния ω_Φ интерпретируется как когерентный суперотборный сектор.) Аналогичные объекты можно сопоставить и векторному состоянию $W_\Phi = (\Phi, \cdot \Phi)$, $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi)$, на Op^* -алгебре $\Pi(\mathcal{A})$ (для краткости будем обозначать $\Pi(\mathcal{A}) = \mathcal{P}$); при этом прообраз W_Φ определяется как множество

$$\mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}} = \{ \chi \in \mathcal{D}(\Pi) \mid W_\chi(A) = W_\Phi(A) \quad \forall A \in \mathcal{P} \}, \quad (7.6)$$

а аналогом $\mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{L}'} = \overline{L\{RR'\Phi\}}$ служит подпространство $\overline{L\{\mathcal{P}'_w \mathcal{P}\Phi\}}$. Однако для W_Φ возникают и другие объекты, характеризующие это состояние. Именно, если Π — произвольное эрмитово представление, то любому состоянию W_Φ естественно сопоставляются следующие линеалы в $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{D}_\Phi^{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\Phi, \quad G_\Phi^{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}\Phi}^G, \quad \mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}\Phi}, \quad \mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{P}} \cap \mathcal{D}(\Pi), \quad P_\Phi^{\mathcal{P}} \mathcal{D}(\Pi),$$

а также еще $\mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{P}} \cap \mathcal{D}(\Pi^*)$ и $P_\Phi^{\mathcal{P}} \mathcal{D}(\Pi^*)$. Все они связаны между собой очевидными вложениями:

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}_\Phi^{\mathcal{P}} \subset \mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{P}} \cap \mathcal{D}(\Pi) \subset P_\Phi^{\mathcal{P}} \mathcal{D}(\Pi) \\ \cap \qquad \qquad \qquad \cap \qquad \qquad \qquad \cap \end{array} \quad (7.7)$$

$$G_\Phi^{\mathcal{P}} \subset \mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{P}} \cap \mathcal{D}(\Pi^*) \subset P_\Phi^{\mathcal{P}} \mathcal{D}(\Pi^*) \subset \mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{P}}.$$

Проектор $P_\Phi^{\mathcal{P}}$ может лежать в сильном или слабом коммутанте $\mathcal{P}$ или, вообще говоря, ни в том, ни в другом. В последнем и наиболее общем случае для состояний W_Φ возможно установить лишь очень скудный набор свойств; как и при изучении инвариантных подпространств, мы получаем содержательное описание только при дополнительных условиях, среди которых главное место занимает связь проектора $P_\Phi^{\mathcal{P}}$ с коммутантом представления.

О п р е д е л е н и е 7.5. Для эрмитова представления Π (или, равносильно, Op^* -алгебры $\mathcal{P}$) единичный вектор $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi)$ и состояние W_Φ будем называть:

слабо регулярным, если $P_\Phi^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}'_w$;

сильно регулярным, если $P_\Phi^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}'_s$;

вполне регулярным, если Φ сильно регулярен и, кроме того, $G_\Phi^{\mathcal{P}} \supset P_\Phi^{\mathcal{P}} \mathcal{D}(\Pi)$.

Множества этих векторов будем обозначать $\mathfrak{M}_{wr}$, $\mathfrak{M}_{sr}$ и $\mathfrak{M}_{cr}$ соответственно.

Очевидно, что всякий циклический вектор представления Π сильно регулярен, а всякий сильно циклический — вполне регулярен. Кроме того, в случае замкнутого представления ($\Pi = \bar{\Pi}$, $G_\Phi^{\mathcal{P}} \subset \mathcal{D}(\Pi)$) легко увидеть, что $P_\Phi^{\mathcal{P}} \mathcal{D}(\Pi) \subset G_\Phi^{\mathcal{P}}$ влечет $P_\Phi^{\mathcal{P}} \mathcal{D}(\Pi) \subset \mathcal{D}(\Pi)$, откуда следует (см. предложение 7.5), что вектор Φ сильно регулярен. Таким образом, в данном случае в определении полной регулярности достаточно лишь второго условия.

Укажем теперь необходимые и достаточные условия, выделяющие введенные классы векторов.

Предложение 7.5. Следующие условия эквивалентны:

1) Φ слабо регулярен;

2) линеал $P_\Phi^{\mathcal{P}}\mathcal{D}(\Pi)$ "слабо приводит" Π , т.е.

$$P_\Phi^{\mathcal{P}}\mathcal{D}(\Pi) \subset \mathcal{D}(\Pi^*), \quad \mathcal{P}^*(P_\Phi^{\mathcal{P}}\mathcal{D}(\Pi)) \subset P_\Phi^{\mathcal{P}}\mathcal{D}(\Pi). \quad (7.8)$$

Кроме того, следующие условия эквивалентны:

1') Φ сильно регулярен;

2') $P_\Phi^{\mathcal{P}}\mathcal{D}(\Pi) \subset \mathcal{D}(\Pi)$;

3') сужение $\mathcal{P}_\Phi = \mathcal{P}|_{P_\Phi^{\mathcal{P}}\mathcal{D}(\Pi)}$ есть Op^* -алгебра в $\mathcal{H}_\Phi$,

а также эквивалентны условия:

1'') Φ вполне регулярен;

2'') Φ есть сильно циклический вектор Op^* -алгебры $\mathcal{P}_\Phi$ (см. п. 3');

3'') ГНС-представление алгебры $\mathcal{P}$ (или равносильно $\mathcal{A}$), отвечающее W_Φ , совпадает с представлением — сужением (редукцией) $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\Phi$ или с его замыканием, если сужение не замкнуто.

Из этих утверждений импликации $1' \rightarrow 3' \rightarrow 2'$ и $1'' \rightarrow 2'' \rightarrow 3''$ очевидны; $1 \rightarrow 2$ следует из $1' \rightarrow 3'$ в лемме 7.1. Получение же $2 \rightarrow 1$, $2' \rightarrow 1'$ и $3'' \rightarrow 1''$ не-сложно, но громоздко, и мы отсылаем за ним читателя к [BCX1]. Добавим, что условие слабой регулярности равносильно также любому из условий $1' - 3'$, а условие сильной регулярности — любому из условий $1 - 3$ леммы 7.1.

Перейдем к анализу линеалов (7.7) и прообразов $\mathfrak{M}_\Phi^{\omega}$. Как уже отмечалось, вопрос целесообразно ставить так: как связаны между собой характеристики векторных состояний W_Φ на Op^* -алгебре $\mathcal{P}$ и ω_Φ на алгебре фон Неймана $R = (\mathcal{P}'_w)'$? Для вывода таких связей приходится налагать ограничения не только на класс векторов Φ , но также и на алгебру $\mathcal{P}$. При этом естественно возникают три класса Op^* -алгебр, определяемые следующими условиями:

класс I: $\mathcal{P}'_w$ — алгебра фон Неймана;

класс II: $\mathcal{P}'_s = \mathcal{P}'_w$;

класс III: $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$;

Как очевидно, эти условия следуют в порядке усиления, так что каждый класс является подмножеством предыдущего. (Наряду с ними, типичный и важный для физики класс Op^* -алгебр составляют алгебры, порожденные системой операторов, самосопряженных в существенном. Этот класс, изученный в [Bo], промежуточен между I и II: можно просто проверить, что такие алгебры лежат в классе I [BCX2]; в классе II они могут и не лежать, но, когда алгебра R обладает чисто дискретным центральным разложением (случай "дискретного вакуумного суперотбора"; см. п. 7.2), они допускают расширение с тем же слабым коммутантом, лежащее в классе II.) Мы последовательно рассмотрим свойства состояний W_Φ сначала для алгебр класса I, затем для более узких классов II и III.

Прежде всего отметим, что для алгебры $\mathcal{P}$ класса I

$$\mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{P}} \subset \mathcal{H}_\Phi^R, \quad L\{\mathcal{P}'_w, \mathcal{P}_\Phi\} \subset \mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{L}'} \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(\Pi), \quad (7.9)$$

где $\mathcal{L} = R \cap R'$. Здесь первое соотношение вытекает из того, что $P_\Phi^R \in R' =$

$= \mathcal{P}'_{\omega}$; так как, с учетом этого,

$$P_{\Phi}^R \mathcal{D}(\Pi) \supset P_{\Phi}^R \mathcal{P} \mathcal{D}(\Pi) \supset P_{\Phi}^R \mathcal{P} \Phi = \mathcal{P}^* P_{\Phi}^R \Phi = \mathcal{P} \Phi,$$

откуда сразу $\overline{\mathcal{P} \Phi} \subset P_{\Phi}^R \mathcal{D}(\Pi) = \overline{R \Phi}$.

Второе соотношение следует из первого в силу

$$\overline{L\{\mathcal{P}'_{\omega} \mathcal{P} \Phi\}} = \overline{L\{\mathcal{P}'_{\omega} \overline{\mathcal{P} \Phi}\}} = \overline{L\{\mathcal{P}'_{\omega} \mathcal{P} \Phi\}}. \quad (7.10)$$

Уже слабо регулярные векторы (и тем более сильно и вполне регулярные) обладают тем полезным отличием, что для них включения (7.9) превращаются в равенства, причем равенство в первой из формул (7.9) — не только необходимое, но и достаточное условие слабой регулярности.

Предложение 7.6. Пусть $\mathcal{P}$ — Ор*-алгебра класса I. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\Phi \in \mathfrak{N}_{\text{wr}}$;
- 2) $\mathcal{P}'_{\omega} \Phi \cap \mathcal{D}(\Pi) \subset \mathfrak{N}_{\text{wr}}$;
- 3) $\mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{P}} = \mathcal{H}_{\Phi}^R$

и влекут за собой свойство

$$4) \overline{L\{\mathcal{P}'_{\omega} \mathcal{P} \Phi\}} = \mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{Z}'}.$$

Доказательство. Импликация $2 \rightarrow 1$ тривиальна, а $3 \rightarrow 4$ очевидна из (7.10).

$3 \rightarrow 2$. Из 3 с учетом $\overline{B \mathcal{P} \Phi} = \overline{B \mathcal{P} \Phi} = \overline{\mathcal{P} B \Phi}$ для всякого $B \in \mathcal{P}'_{\omega}$ и такого, что $B \Phi \in \mathcal{D}(\Pi)$, имеем для указанных B цепочку равенств:

$$\mathcal{H}_{B \Phi}^{\mathcal{P}} = B \mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{P}} = B \mathcal{H}_{\Phi}^R = \mathcal{H}_{B \Phi}^R,$$

т.е. $P_{B \Phi}^{\mathcal{P}} \in R' = \mathcal{P}'_{\omega}$ и $B \Phi \in \mathfrak{N}_{\text{wr}}$.

$1 \rightarrow 3$. При $P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \in R'$ имеем

$$\mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{P}} = P_{\Phi}^{\mathcal{P}} R \mathcal{H} \supset P_{\Phi}^{\mathcal{P}} R \Phi = R P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \Phi = R \Phi,$$

откуда $\mathcal{H}_{\Phi}^R \subset \mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{P}}$. $\square$

Как в теории так и в приложениях часто приходится рассматривать сужения Ор*-алгебр на их циклические подпространства — уже вводившиеся (и корректно определенные при $P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}'_s$) Ор*-алгебры $\mathcal{P}_{\Phi} = \mathcal{P}|_{P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \mathcal{D}(\Pi)}$. Для них имеет место

Предложение 7.7. Для Ор*-алгебры $\mathcal{P}$ класса I и $\Phi \in \mathfrak{N}_{s\Gamma}$ $\mathcal{P}_{\Phi}$ есть также алгебра класса I, причем

$$(\mathcal{P}_{\Phi})'_{\omega} = R'_{\Phi}, \quad R_{\Phi} \equiv R_P R_{\Phi}.$$

Доказательство. Для всякого $B \in (\mathcal{P}_{\Phi})'_{\omega}$ и $f \in \mathcal{A}$, по определению,

$$(\mu, B \Pi(f) \nu) = (\Pi(f^*) \mu, B \nu) \quad \forall \mu, \nu \in P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \mathcal{D}(\Pi). \quad (7.11)$$

С другой стороны, при $P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}'_s$

$$(P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \chi, B \Pi(f) P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \Psi) = (\chi, P_{\Phi}^{\mathcal{P}} B P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \Pi(f) \Psi) \quad \forall \chi, \Psi \in \mathcal{D}(\Pi),$$

$$(\Pi(f^*) P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \chi, B P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \Psi) = (\Pi(f^*) \chi, P_{\Phi}^{\mathcal{P}} B P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \Psi).$$

что в совокупности с (7.11) дает $P_{\Phi}^{\mathcal{P}} B P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}'_w = R'$, т.е.

$$P_{\Phi}^{\mathcal{P}} (\mathcal{P}_{\Phi})'_w P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \subset R',$$

откуда с учетом $P_{\Phi}^{\mathcal{P}} = P_{\Phi}^R$ имеем $(\mathcal{P}_{\Phi})'_w \subset R'_{\Phi}$.

Для вывода обратного включения пусть $B \in \mathcal{P}'_w$; тогда для всех $\chi, \Psi \in P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \mathcal{D}(\Pi) \subset \mathcal{D}(\Pi)$, с учетом $P_{\Phi}^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}'_s$, имеем

$$(\chi, B \Pi(f) \Psi) = (\chi, P_{\Phi}^{\mathcal{P}} B |_{\mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{P}}} \Pi(f) \Psi),$$

$$(\Pi(f^*) \chi, B \Psi) = (\Pi_{\Phi}(f^*) \chi, P_{\Phi}^{\mathcal{P}} B |_{\mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{P}}} \Psi).$$

В силу $B \in \mathcal{P}'_w$ левые части этих равенств равны друг другу; тогда равенство правых частей дает: $P_{\Phi}^{\mathcal{P}} B |_{\mathcal{H}_{\Phi}^{\mathcal{P}}} \in (\mathcal{P}_{\Phi})'_w$, и с учетом $P_{\Phi}^{\mathcal{P}} = P_{\Phi}^R$ имеем $R'_{\Phi} \subset (\mathcal{P}_{\Phi})'_w$. $\square$

Другой необходимый класс объектов составляют функционалы на $\mathcal{P}$, подчиненные заданному состоянию W_{Φ} ($W \prec W_{\Phi}$). В случае W^* -алгебры R , как мы видели в § 4, для любого $\Phi \in \mathcal{H}$

$$\omega \prec \omega_{\Phi} \iff \omega = \omega_{T\Phi}, \quad T \in R'.$$

Для Ор*-алгебры мы сможем получить такой результат уже не для любых Φ из области.

Предложение 7.8. Пусть $\Phi \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$, и алгебра $\mathcal{P}$ — класса I. Тогда

$$W \prec W_{\Phi} \iff W = W_{T\Phi}^{(\mathcal{P}^*)}, \quad T \in \mathcal{P}'_w \quad (7.12)$$

(где $W^{(\mathcal{P}^*)}$ обозначает функционал на $\mathcal{P}^*$). Если же $\mathcal{P}$ — класса II, то и

$$W \prec W_{\Phi} \iff W = W_{T\Phi}, \quad T \in \mathcal{P}'.$$

Доказательство. Допустим сначала, что $\mathcal{P}$ — произвольная Ор*-алгебра, и χ — ее сильно циклический вектор. Покажем, что в этом случае $W \prec W_{\chi}$ равносильно тому, что существует оператор $B \in \mathcal{P}'_w$, $B \geq 0$, такой, что $W(A) = (\chi, BA\chi)$ для всех $A \in \mathcal{P}$. Достаточность данного условия очевидна. Для демонстрации необходимости, следуя доказательству аналогичного факта для B^* -алгебр, [[Н, § 19.1]] определим на плотной области $\mathcal{P}\chi$ билинейную форму

$$q(\Phi, \Psi) = W(A_1^* A_2), \quad \Phi = A_1 \chi, \quad \Psi = A_2 \chi, \quad A_1, A_2 \in \mathcal{P}.$$

В силу $W \prec W_{\chi}$ форма q ограничена и по лемме Рисса $q(\Phi, \Psi) = (\Phi, B\Psi)$, где B — ограниченный оператор. Вводя вектор $\xi = A_3 \chi$, $A_3 \in \mathcal{P}$, из равенства $(A_1^* A_2)^* A_3 = A_2^* (A_1 A_3)$, справедливого на $\mathcal{D}(\Pi)$, имеем

$$(A_1^* \Psi, B\xi) = (\Psi, BA_1 \xi) \quad \forall \Psi, \xi \in \mathcal{P}\chi. \quad (7.13)$$

Это равенство можно продолжить с области $\mathcal{P}\chi$ на ее замыкание в граф-топологии, поскольку в ней операторы A_1, A_1^* непрерывны. Следовательно, с учетом сильной циклическости χ , (7.13) верно для всех $\Psi, \xi \in \mathcal{D}(\Pi)$, что означает $B \in \mathcal{P}'_w$. Положительность B вытекает из положительности и симметричности W .

Возвращаясь к утверждению (7.12), замечаем, что и в нем неочевидна только необходимость. Пусть $\Phi \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$ и $W \prec W_\Phi$; тогда Φ сильно цикличен для $\mathcal{P}_\Phi$, и по доказанному имеем

$$W(f) = (B_\Phi \Phi, \Pi_\Phi(f)\Phi), \quad B_\Phi \in (\mathcal{P}_\Phi)'_w, \quad B_\Phi \geq 0.$$

Вводя оператор $B = P_\Phi^{\mathcal{P}} B_\Phi P_\Phi^{\mathcal{P}}$, с учетом $P_\Phi^{\mathcal{P}} = P_\Phi^R$ и предложения 7.7, имеем $B \in \mathcal{P}'_w$; кроме того, как легко видеть, $W(f) = (B\Phi, \Pi(f)\Phi)$, и так как $\mathcal{P}'_w$ — алгебра фон Неймана, то $B = T^*T$, $T \in \mathcal{P}'_w$. В заключение учтем, что для алгебры класса II $\mathcal{P}'_w = \mathcal{P}'_s$ сохраняет $\mathcal{D}(\Pi)$, и предложение доказано. $\square$

Пусть, далее $PV(\mathcal{P})$ — множество всех чистых векторных состояний на $\mathcal{P}$. Имеет место

Предложение 7.9. Пусть $\mathcal{P}$ — Op^* -алгебра класса I. Тогда для всех $\Phi \in \mathfrak{N}_{\text{wг}}$

$$W_\Phi \in PV(\mathcal{P}) \Rightarrow \omega_\Phi \in PV(R),$$

а для всех $\Phi \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$ верно также обратное.

Доказательство. При $\Phi \in \mathfrak{N}_{\text{wг}}$ нам достаточно доказать, что $R'_{P_\Phi R_\Phi} = \mathcal{C}(\mathcal{H}_\Phi^R)$, если $W_\Phi \in PV(\mathcal{P})$, т.е. неприводимо ГНС-представление

Π_Φ^{GNS} функционала W_Φ :

$$(\Pi_\Phi^{\text{GNS}})'_w = \mathcal{C}(\mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{P}}), \quad (7.14)$$

причем Π_Φ^{GNS} есть $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} |_{G_\Phi^{\mathcal{P}}}$. Вводя еще представление $\hat{\Pi}_\Phi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} |_{(G_\Phi^{\mathcal{P}})}$, имеем

$$\hat{\Pi}_\Phi = \Pi_\Phi^{\text{GNS}}, \quad (\hat{\Pi}_\Phi)'_w = (\Pi_\Phi^{\text{GNS}})'_w. \quad (7.15)$$

Далее, выбирая любой $B \in \mathcal{P}'_w$, проводим рассуждение, аналогичное доказательству второго включения в предложении 7.7 (но используя лишь $\Phi \in \mathfrak{N}_{\text{wг}}$, а не $\Phi \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$), и получаем

$$R'_{P_\Phi R_\Phi} \subset (\hat{\Pi}_\Phi)'_w,$$

что в совокупности с (7.14) и (7.15) дает искомое.

Взяв теперь $\Phi \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$, докажем обратное: чистота ω_Φ влечет и чистоту W_Φ . Имеем $R'_{P_\Phi R_\Phi} = \mathcal{C}(\mathcal{H}_\Phi^R)$; кроме того, по предложению 7.7

$$(\mathcal{P}_\Phi)'_w = R'_{P_\Phi R_\Phi}.$$

Но при $\Phi \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$ представление $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\Phi$ (или его замыкание, имеющее тот же слабый коммутант) совпадает с Π_Φ^{GNS} , так что ввиду $\mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{P}} = \mathcal{H}_\Phi^R$ выполнено (7.14), т.е. $W_\Phi \in PV(\mathcal{P})$. $\square$

Установим теперь связь между унитарной эквивалентностью состояний W_Φ и ω_Φ . При этом нужно учитывать, что в случае ненормированной $*$ -алгебры $\mathcal{A}$ операторы переплетения T представлений Π_1 и Π_2 должны удовлетворять дополнительному условию: $T\mathcal{D}(\Pi_1) \subset \mathcal{D}(\Pi_2)$.

Предложение 7.10. Пусть $\mathcal{P}$ — Op^* -алгебра класса II. Тогда для всех $\Phi, \Psi \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$

$$\omega_\Phi \simeq \omega_\Psi \iff W_\Phi \simeq W_\Psi.$$

Доказательство. При $\omega_\Phi \simeq \omega_\Psi$ выберем изометрический оператор переплетения

$$U: \mathcal{H}_\Phi^R \rightarrow \mathcal{H}_\Psi^R, \quad UP_\Phi^R \in R'.$$

С учетом $G_\Phi^{\mathcal{P}} = P_\Phi^R \mathcal{D}(\bar{\Pi})$, $G_\Psi^{\mathcal{P}} = P_\Psi^R \mathcal{D}(\bar{\Pi})$, для всех $\chi \in \mathcal{D}(\bar{\Pi})$, $f \in \mathcal{A}$ имеем

$$\begin{aligned} U\Pi_\Phi^{\text{GNS}}(f)P_\Phi^R\chi &= U\bar{\Pi}(f)P_\Phi^R\chi = \\ &= UP_\Phi^R\bar{\Pi}(f)\chi = \bar{\Pi}(f)UP_\Phi^R\chi = \Pi_\Psi^{\text{GNS}}(f)UP_\Phi^R\chi, \end{aligned}$$

т.е. U переплетает Π_Φ^{GNS} и Π_Ψ^{GNS} . Аналогично проверив, что U^* переплетает Π_Ψ^{GNS} и Π_Φ^{GNS} , имеем $W_\Phi \simeq W_\Psi$.

Обратно, пусть $W_\Phi \simeq W_\Psi$, т.е. имеется изометрический оператор переплетения U ; достаточно проверить, что $UP_\Phi^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}'$. Это вытекает из следующей цепочки равенств (для всех $\chi \in \mathcal{D}(\Pi)$ и $f \in \mathcal{A}$):

$$\begin{aligned} UP_\Phi^{\mathcal{P}}\bar{\Pi}(f)\chi &= UP_\Phi^{\mathcal{P}}\bar{\Pi}(f)(P_\Phi^{\mathcal{P}}\chi + (P_\Phi^{\mathcal{P}})^\perp\chi) = \\ &= U\bar{\Pi}_\Phi(f)P_\Phi^{\mathcal{P}}\chi = \bar{\Pi}_\Psi(f)UP_\Phi^{\mathcal{P}}\chi = \bar{\Pi}(f)UP_\Phi^{\mathcal{P}}\chi. \end{aligned}$$

Таким образом, U есть оператор переплетения для ω_Φ и ω_Ψ и $\omega_\Phi \simeq \omega_\Psi$. $\square$

Следствие. Пусть $\mathcal{P}$ — Ор*-алгебра класса Π и $\Phi, \Psi \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$. Тогда $W_\Phi \simeq W_\Psi$ в том и только в том случае, если проекторы $P_\Phi^{\mathcal{P}}$ и $P_\Psi^{\mathcal{P}}$ эквивалентны относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{P}'$.

В заключение рассмотрим прообразы состояний W_Φ .

Предложение 7.11. А. Пусть $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi) \cap S_1$. Тогда, если алгебра $\mathcal{P}$ — класса I, то

$$\mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}} \supset \mathfrak{M}_\Phi^R \cap \mathcal{D}(\Pi), \quad (7.16)$$

а если $\mathcal{P}$ — класса II, то и

$$\mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}} \supset \mathfrak{M}_\Phi^R. \quad (7.17)$$

Б. Пусть $\Phi \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$. Тогда, если алгебра $\mathcal{P}$ — класса I, то

$$\mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}'_w \cap \mathcal{D}(\Pi) \cap S_1, \quad (7.18)$$

а если $\mathcal{P}$ — класса II, то и

$$\mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}'_\Phi \cap S_1. \quad (7.19)$$

Если же $\mathcal{P}$ — класса III, то

$$\mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}} = \{\Psi = T\Phi \mid T \in \mathcal{P}', \quad T^*T = P_\Phi^{\mathcal{P}}, \quad TT^* = P_\Psi^{\mathcal{P}}\}, \quad (7.20)$$

причем

$$\mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}} \subset \mathfrak{N}_{\text{сг}}, \quad \mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}} = \mathfrak{M}_\Phi^R. \quad (7.21a, б)$$

Доказательство. Из общей формулы (3.43) для прообраза $\mathfrak{M}_\Phi^R$ следует сразу, что для $\Psi \in \mathfrak{M}_\Phi^R \cap \mathcal{D}(\Pi)$ имеем $\Psi = T\Phi$, $T \in \mathcal{P}'_\omega$. Отсюда для всех $f \in \mathcal{A}$

$$T\Pi(f)\Phi = \Pi^*(f)T\Phi = \Pi(f)T\Phi,$$

и мы получаем (7.16):

$$W_\Psi(f) = (T\Phi, \Pi(f)T\Phi) = (T^*T\Phi, \Pi(f)\Phi) = W_\Phi(f).$$

Формула (7.17) следует из (7.16) очевидным образом. Для вывода (7.18) удобно ввести прообразы $\mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}^*}$ векторных состояний на $\mathcal{P}^*$: для всех $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi^*)$

$$\mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}^*} = \{ \Psi \in \mathcal{D}(\Pi^*) \mid W_\Phi^{(\mathcal{P}^*)} = W_\Psi^{(\mathcal{P}^*)} \}.$$

Легко проверить, что для всех $\Phi \in \mathcal{D}(\Pi)$

$$\mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}} = \mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}^*} \cap \mathcal{D}(\Pi). \quad (7.22)$$

При $\Phi \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$ (7.12) сразу дает

$$\mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}^*} \subset \mathcal{P}'_\omega \cap S_1,$$

откуда с учетом (7.22) имеем (7.18), влекущее также и (7.19).

Наконец, для алгебры класса III удобно сначала получить (7.21a). Пусть $\Psi \in \mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}}$, т.е. $W_\Phi = W_\Psi$. ГНС-представления, отвечающие этим функционалам, унитарно эквивалентны, и, благодаря полной регулярности Φ $P_\Phi^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}'$, что в силу предложения 7.2 влечет самосопряженность Π_Φ^{GNS} . Тем самым, в силу $\Pi_\Phi^{\text{GNS}} \simeq \Pi_\Psi^{\text{GNS}}$, Π_Ψ^{GNS} также самосопряжено. Поскольку же $\mathcal{P}$ замкнута, то $G_\Phi^{\mathcal{P}} \subset \mathcal{D}(\Pi)$, т.е. Π_Ψ^{GNS} — субпредставление $\mathcal{P}$ и, согласно опять предложению 7.2, самосопряженность Π_Ψ^{GNS} влечет $P_\Psi^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}'$, что по тому же предложению влечет самосопряженность представления-сужения $\pi_\Psi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\Psi$. Но, снова с учетом замкнутости $\mathcal{P}$, $\Pi_\Psi^{\text{GNS}} \subset \pi_\Psi$, откуда $\Pi_\Psi^{\text{GNS}} = \pi_\Psi$, т.е. $\mathcal{D}(\Pi_\Psi^{\text{GNS}}) = G_\Psi^{\mathcal{P}} = \mathcal{D}(\pi_\Psi) = P_\Psi^{\mathcal{P}}\mathcal{D}(\Pi)$, и $\Psi \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$. Докажем (7.20). Пусть $\Psi \in \mathfrak{M}_\Phi^{\mathcal{P}}$. В силу только что доказанного $\pi_\Phi \simeq \pi_\Psi$, существует изометрический оператор $U: \mathcal{H}_\Phi^{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{H}_\Psi^{\mathcal{P}}$ такой, что для всех $A \in \mathcal{P}$ и $\chi \in \mathcal{D}(\pi_\Phi)$

$$U\Phi = \Psi, \quad UD(\pi_\Phi) = D(\pi_\Psi), \quad U\pi_\Phi(A)\chi = \pi_\Psi(A)U\chi. \quad (7.23)$$

Как легко проверить, оператор $T = P_\Psi^{\mathcal{P}} U P_\Phi^{\mathcal{P}}$ обладает всеми требуемыми свойствами: из $P_\Psi^{\mathcal{P}}, P_\Phi^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}'$ (что доказано выше) и (7.23) сразу имеем $T \in \mathcal{P}'$, $TT^* = P_\Psi^{\mathcal{P}} U P_\Phi^{\mathcal{P}} U^* P_\Psi^{\mathcal{P}} = P_\Psi^{\mathcal{P}}$, и, аналогично, $T^*T = P_\Phi^{\mathcal{P}}$. Обратно, если $\Psi = T\Phi$, где T — оператор с вышеуказанными свойствами, то, снова с учетом $P_\Psi^{\mathcal{P}}, P_\Phi^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}'$, для всех $A \in \mathcal{P}$ имеем

$$W_\Psi(A) = (T\Phi, A T\Phi) = (T\Phi, T A \Phi) = (T^* T \Phi, A \Phi) = W_\Phi(A).$$

Наконец, (7.21б) получается из (7.20) с учетом формулы (3.43), а также (7.17) и равенства $P_{\Phi}^{\mathcal{P}} = P_{\Phi}^R$, имеющего место для всех $\Psi \in \mathfrak{M}_{\Phi}^{\mathcal{P}} \subset \mathfrak{N}_{\text{ст}}$. $\square$

С л е д с т в и е. Пусть Φ — вполне регулярный чистый вектор $\mathcal{P}$. Тогда, если $\mathcal{P}$ — класса I, то

$$\mathfrak{M}_{\Phi}^{\mathcal{P}} = \mathcal{P}'_w \Phi \cap D(\Pi) \cap S_1, \quad (7.24)$$

а если $\mathcal{P}$ — класса II, то

$$\mathfrak{M}_{\Phi}^{\mathcal{P}} = \mathcal{P}'_w \Phi \cap S_1 = \mathfrak{M}_{\Phi}^R. \quad (7.25)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (7.24) вытекает из (7.16) и (7.18) с учетом предложения 7.9 и леммы 4.7. (7.25) следует из (7.24). $\square$

7.2. Вакуумная структура квантовой теории поля. Вернемся к нашей физической задаче. В известной мере она параллельна задаче, рассмотренной в п. 3.5: если там мы изучали вакуумную структуру для системы локальных наблюдаемых, то здесь предстоит сделать то же для системы квантованных полей. С математической же точки зрения в п. 3.5 вакуумная структура была описана для случая C^* -динамической системы, тогда как теперь мы должны описать ее для случая Op^* -динамики. Эта задача сложнее, и результаты пока не носят законченного характера. Однако уже возможно описать как общую картину (согласно которой все вакуумные состояния группируются в секторы, разделенные правилом суперотбора, и разложение теории на такие секторы прямо связано с разложением квантовополевой системы на чистые фазы), так и главный эффект, отличающий Op^* -динамику от C^* -динамики (это так называемая "аномалия Борхерса" — возможность вырождения вакуума в неприводимой полевой теории).

Рассмотрим вайтмановскую теорию общего вида, которая задана как пуанкаре-ковариантное представление алгебры Борхерса, характеризуемое гильбертовым пространством $\mathcal{H}$, полевой Op^* -алгеброй $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ и унитарным представлением $U(a, \Lambda)$ группы Пуанкаре. Вакуумная структура такой теории определяется в первую очередь "вакуумным подпространством" $\mathcal{H}_0$, которое состоит из всех трансляционно инвариантных векторов в $\mathcal{H}$ и может иметь, вообще говоря, произвольную размерность $d_0 = \dim \mathcal{H}_0$. Всякую вайтмановскую теорию можно полагать канонически порождаемой по функционалу Вайтмана, который, согласно теореме реконструкции (предложение 7.4), является векторным функционалом W_{Ω} на алгебре $\mathcal{P}$, отвечающим сильно циклическому трансляционно инвариантному вектору $\Omega \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{D}$. Поэтому можно считать, без ограничения общности, что $\mathcal{H}_0$ всегда содержит хотя бы один сильно циклический вектор. Далее, к характеристикам вакуумной структуры принадлежат и физические вакуумные состояния. По определению любое физическое состояние — функционал на алгебре наблюдаемых системы — квазилокальной алгебре $\mathfrak{A}$ или же глобальной алгебре $\pi(\mathfrak{A})$ некоторого избранного представления π , так что наша задача требует введения и этих объектов. В вайтмановской теории они, наряду со всеми физическими величинами, должны выражаться через поля и функции Вайтмана, а в алгебраической формулировке — через алгебру $\mathcal{P}$ и функционал Вайтмана W_{Ω} . В рассматриваемых нами нейтральных скалярных теориях C^* - и W^* -алгебры наблюдаемых совпадают с C^* - и W^* -полевыми алгебрами (в случае же полей с нетривиальными квантовыми числами, как мы видели в гл. 2, алгебры наблюдаемых типичным обра-

зом определяются как калибровочно инвариантные подалгебры полевых алгебр; скажем, глобальная алгебра R представляется в виде $R = F \cap U(G)'$, где F — полевая алгебра фон Неймана, U — унитарное представление полной группы G внутренних симметрий системы). Ввести такие алгебры по заданной полевой Op^* -алгебре не вызывает затруднений: мы уже видели выше, что с каждой Op^* -алгеброй $\mathcal{P}$ естественно ассоциируется алгебра фон Неймана $R = (\mathcal{P}'_\omega)'$. Это соотношение мы и примем в качестве определения глобальной алгебры наблюдаемых в нейтральной скалярной вайтмановской теории. В физике, как известно, стандартно употребляется иное определение: когда полевые операторы $A(f), f \in S(\mathbb{R}^4), \text{Im } f = 0$, в существенном самосопряжены, то определены ограниченные функции от них; и полевая W^* -алгебра вводится как алгебра фон Неймана, порождаемая всеми такими функциями, или, что равносильно, экспонентами $\exp[i\overline{A(f)}]$. Это определение, в отличие от предыдущего, требует ограничений на полевые операторы. Нетрудно показать (см. § 8), что, когда данные ограничения выполнены и для вайтмановской теории возможны оба способа определения W^* -алгебры полей, эти способы совпадают между собой. Вакуумные же состояния мы определяем как векторные и нормальные трансляционно инвариантные состояния ω на R .

Как и в C^* -теории (п. 3.5), задача о вакуумной структуре связана теснее всего с глобальными свойствами системы, в ряде пунктов требует привлечения асимптотических свойств и практически вовсе не зависит от локального поведения. Эксплуатация асимптотических свойств, однако, требует введения локальных алгебр; в частности, лишь при наличии локальной сети было установлено важное свойство единственности и чистоты вакуумного состояния в когерентном суперотборном секторе (предложение 3.47). Это свойство мы иногда будем применять ниже, и, стало быть, в этих случаях нам придется предполагать, что для вайтмановской теории существует не только глобальная алгебра наблюдаемых R , но и сеть $\{R(O)\}$ ее локальных подалгебр. Такую ситуацию характеризует

О п р е д е л е н и е 7.6. Будем говорить, что для вайтмановской теории, которая задана полевой Op^* -алгеброй $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ и унитарным представлением $U(a, \Lambda)$ группы Пуанкаре, существует *ассоциированная теория Хаага—Араки*, если алгебра $R = (\mathcal{P}'_\omega)'$ является глобальной алгеброй наблюдаемых для теории Хаага—Араки с тем же представлением $U(a, \Lambda)$ группы Пуанкаре.

В отличие от существования глобальной алгебры R , условие существования локальной сети $\{R(O)\}$ уже налагает на вайтмановскую теорию определенные ограничения, которые мы будем анализировать в § 8.

Перейдем к изучению различных видов вакуумной структуры, рассматривая их в порядке постепенного усложнения. Будем всегда предполагать выполненными аксиомы трансляционной ковариантности и спектральности; привлечение других аксиом будет указываться специально.

Н е п р и в о д и м ы е п о л е в ы е с и с т е м ы . **А н о м а л и я Б о р х е р с а .** Возьмем сначала наипростейший случай, отвечающий стандартной вайтмановской теории с неприводимой системой полей, единственным и сильно циклическим вакуумом:

$$d_0 = 1, \quad \mathcal{H}_0 = \{c\Omega\}_{c \in \mathbb{C}}, \quad \overline{\mathcal{P}\Omega}^G = \mathcal{D}.$$

Этот случай полностью описывает элементарное

Предложение 7.12. Пусть задана вайтмановская теория с полевой Ор*-алгеброй $\mathcal{P}$ класса II и сильно циклическим вакуумом Ω . Тогда свойство

$$1) d_0 = 1$$

влечет за собой свойства

2) состояние W_Ω чисто;

3) состояние ω_Ω чисто;

4) $\mathcal{P}'_w = \mathcal{E}(\mathcal{H})$,

которые все являются эквивалентными между собой и в свою очередь влекут свойство

$$1') d_0 = 1 \text{ или } \infty.$$

Если же существует ассоциированная теория Хаага–Араки, то свойства 2–4 влекут не только $1'$, но и 1 .

Доказательство тривиально, если заметить простой факт: в вайтмановской теории с произвольной полевой Ор*-алгеброй $\mathcal{P}$ операторы трансляций $T(a)$ реализуют группу унитарных автоморфизмов алгебры фон Неймана R , причем без ограничения общности эти автоморфизмы можно полагать внутренними, $T(a) \in R$ (откуда и $P_0 \in R$). Действительно, для любой Ор*-алгебры $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ и любого унитарного оператора $\mathcal{U}$ такого, что $\mathcal{U}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{U}^*\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ имеет место

$$(\mathcal{U}\mathcal{P}\mathcal{U}^*)'_w = \mathcal{U}\mathcal{P}'_w\mathcal{U}^*.$$

Это соотношение проверяется непосредственно. Из него в нашем случае алгебры $\mathcal{P}$ с группой автоморфизмов $T(a) \cdot T(-a)$ сразу вытекает первое утверждение: $T(a) \cdot T(-a)$ суть автоморфизмы R . Второе утверждение, с учетом аксиомы спектральности, следует из теоремы Борхерса (теорема 3.43).

В силу указанного факта прообраз $\mathfrak{M}_\Omega^R$ состояния ω_Ω лежит в $\mathcal{H}_0$. Тем самым при $d_0 = 1$ этот прообраз одномерен и ω_Ω чисто; при этом так как Ω циклический для R (ибо для алгебры $\mathcal{P}$ класса I $\mathcal{H}_\Omega^\mathcal{P} \subset \mathcal{H}_\Omega^R$), то $R = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, т.е. мы получили импликации $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$. Эквиваленция $4 \leftrightarrow 2$ хорошо известна, а $4 \rightarrow 3$ очевидно, поскольку $R' = \mathcal{P}'_w$. Импликация $2 \rightarrow 1'$ есть следствие теоремы 7.19, доказываемой ниже. Для доказательства последнего утверждения достаточно напомнить, что в теории Хаага–Араки (с учетом аксиомы локальности) цикличность и чистота вакуумного вектора влекут и его единственность (предложение 3.46). $\square$

Мы видим, что уже в этой простейшей ситуации вакуумная структура полевой теории обнаруживает важное отличие от вакуумной структуры локальной квантовой теории: теория с неприводимой системой полей (а также и наблюдаемых) допускает, вообще говоря, не только одномерное, но и бесконечномерное вакуумное подпространство. Этот специфический феномен был впервые отмечен Борхерсом в 1965 г. [B4] и иногда именуется аномалией Борхерса.

Остановимся подробнее на этом явлении. Предложение 7.12 еще не дает почти никакой информации о нем: аномалия Борхерса фигурирует здесь лишь как формальная возможность, которую нельзя исключать, коль скоро мы не сумели установить импликацию $(2 - 4) \rightarrow 1$. Между тем механизм возникновения аномалии Борхерса очень прозрачен (по крайней мере на уровне нестрогих соображений). При изучении вакуумной структу-

ры теории Хаага—Араки мы видели (предложение 3.46, 'использующее аксиому локальности), что алгебра R_{P_0} есть абелева алгебра фон Неймана, и к тому же если $\mathcal{H}_0$ циклично для $\mathcal{L}'$, то алгебра R' изоморфна R'_{P_0} , так что неприводимость R эквивалентна неприводимости R_{P_0} . Но единственная неприводимая абелева алгебра фон Неймана есть $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}(\mathcal{H})$ в одномерном пространстве $\mathcal{H}$ — и мы получаем классический результат о том, что в теории локальных наблюдаемых единственность и цикличность вакуума эквивалентна неприводимости глобальной алгебры. В вайтмановской же теории, как мы видели, $P_0 \in R = (\mathcal{P}'_w)'$ и при цикличности $\mathcal{H}_0$ для $\mathcal{L}'$ мы также имеем, что R' изоморфна R'_{P_0} , неприводимость R равносильна неприводимости R_{P_0} , и если существует ассоциированная теория Хаага—Араки, то получаем прежний вывод о единственности вакуума в неприводимой теории: $R = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \iff d_0 = 1$. Предположим, однако, что для рассматриваемой теории не установлено существования ассоциированной теории Хаага—Араки. Тогда у нас нет локальных W^* -алгебр $R(O)$, и мы не можем доказать, что алгебра R_{P_0} абелева, но зато имеются локальные Op^* -алгебры $\mathcal{P}(O)$, и в силу тех же рассуждений, что и в теории Хаага—Араки, можно ожидать, что абелевой будет редукция Op^* -алгебры $\mathcal{P}$ — Op^* -алгебра $\mathcal{P}_{P_0} = P_0 \mathcal{P} P_0|_{\mathcal{H}_0}$ (конечно, если удастся показать, что она корректно определена). Если же еще, кроме того, неприводимость R_{P_0} равносильна неприводимости $\mathcal{P}_{P_0}$ (подобно тому как неприводимость R равносильна неприводимости $\mathcal{P}$), для чего достаточно

$$(\mathcal{P}_{P_0})'_w = R'_{P_0}, \quad (7.26)$$

то мы получим следующий "вайтмановский аналог" соотношения между неприводимостью теории и вакуумной структурой: неприводимость $\mathcal{P}$ равносильна неприводимости абелевой Op^* -алгебры $\mathcal{P}_{P_0}$. Но, как хорошо известно (см., например, [P1]), абелева Op^* -алгебра может быть неприводимой не только в одномерном, но и в бесконечномерном пространстве! Окончательный же вывод будет таков: аномалия Борхерса имеет место тогда и только тогда, когда представление-сужение абелевой Op^* -алгебры $P_0 \mathcal{P} P_0 \rightarrow \mathcal{P}_{P_0}$ является неприводимым и бесконечномерным.

При строгом проведении этой схемы в ней возникает ряд уточнений и допущений, за счет которых наши выводы окажутся в действительности более слабыми. Исходной задачей является, как мы видели, определение некоторой "вакуумной Op^* -алгебры", действующей в $\mathcal{H}_0$. Как выясняется, это — и самая сложная часть программы. Мы не сумеем дать корректное определение "редукции" $\mathcal{P}_{P_0}$ и вместо этого построим в $\mathcal{H}_0$ несколько иную Op^* -алгебру. Пусть $(\mathcal{P}_{\text{loc}}, \mathcal{D})$ — Op^* -подалгебра $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$, образуемая всеми операторами $\Pi(f)$ с $f \in \mathcal{A}_{\text{loc}} \equiv \bigcup_{O \in B(M)} \mathcal{A}(O) = \mathbb{C} \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(\mathbb{R}^{4n})$.

При замкнутой Op^* -алгебре $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}_{\text{loc}}$ может быть и не замкнута, т.е. вообще говоря,

$$\mathcal{D}_{\text{loc}} \equiv \mathcal{D}(\overline{\mathcal{P}_{\text{loc}}}) = \bigcap_{f \in \mathcal{A}_{\text{loc}}} \overline{\Pi(f)} \supset \mathcal{D}.$$

Докажем сначала

Предложение 7.13 [B4]. Пусть задана вайтмановская теория с полевой Op^* -алгеброй $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ и вакуумным подпространством $\mathcal{H}_0$, вклю-

чающим сильно циклический вектор Ω . Пусть также выполнены аксиомы трансляционной ковариантности, локальности и спектральности. Тогда область $\mathcal{D}_{0,loc} \equiv \mathcal{D}_{loc} \cap \mathcal{H}_0$ плотна в $\mathcal{H}_0$.

Доказательство базируется на результатах работы Борхерса [В3] об аналитических свойствах функций Вайтмана. Согласно теореме 2 из [В3] при произвольных $\Psi \in \mathcal{D}_0 \equiv \mathcal{D} \cap \mathcal{H}_0$ и f, g из алгебры Борхерса $\mathcal{A}$ ожидания

$$F(x, y) = (\Psi, \Pi(f^*) T(x) \Pi(g^* g) T(y) \Pi(f) \Psi)$$

допускают аналитическое продолжение в трубу будущего, $\text{Im } x \in V^+$, $\text{Im } y \in V^+$. Пусть $\Pi(f) \in \mathcal{P}(O_1)$, $\Pi(g) \in \mathcal{P}(O_2)$, где $O_{1,2} \in B(M)$. Заметим, что благодаря аксиоме спектральности в случае комплексных трансляций y с мнимой частью в световом конусе в известной асимптотической формуле для операторов трансляций (предложение 3.36) имеет место не только слабый, но и сильный предел:

$$s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T(\pm \lambda y) = P_0, \text{Im } y \in V_{\pm}; \quad (7.27)$$

и при $x \in (O_1 \cup O_2)'$ и $\text{Im } y \in V^+$ или $\text{Im } y = 0$, имеем

$$|F(x, y)| \leq \|\Pi(f) T(-x) \Pi(g) \Psi\| \cdot \|\Pi(f) \Psi\|.$$

Отсюда, с учетом трансляционной инвариантности Ψ и локальности,

$$|F(x, y)| \leq \|\Pi(f) \Psi\| \cdot \|\Pi(f^* f) \Psi\|^{1/2} \cdot \|\Pi(g^* g) \Psi\|^{1/2}.$$

Таким образом, функция $F(x, y)$ равномерно ограничена по модулю в следующей области из $M + iM$:

$$\{x \in (O_1 \cup O_2)', \text{Im } y \in V^+ \text{ или } \text{Im } y = 0\} \cup \{y \in (O_1 \cup O_2)', \text{Im } x \in V^+ \text{ или } \text{Im } x = 0\}.$$

Зафиксируем теперь произвольный вектор $\tilde{x} \in (O_1 \cup O_2)'$ и рассмотрим $F(x, y)$ для аргументов $x = (\lambda_1 u_1 \tilde{x}^0, \lambda_1 \tilde{x})$, $y = (\lambda_2 u_2 \tilde{x}^0, \lambda_2 \tilde{x})$, где λ_1, λ_2 — вещественные параметры, u_1, u_2 — комплексные параметры. Тогда возникающая функция $f_{\lambda_1, \lambda_2}(u_1, u_2)$ при $|\lambda_1|, |\lambda_2| \geq 1$ равномерно ограничена по модулю в области

$$\{\text{Im } \lambda_1 u_1 > 0, |u_2| \leq 1, \text{Im } u_2 = 0\} \cup \{\text{Im } \lambda_2 u_2 > 0, |u_1| \leq 1, \text{Im } u_1 = 0\}.$$

Согласно лемме 8 из [В3] $f_{\lambda_1, \lambda_2}(u_1, u_2)$ тогда будет равномерно ограничена по модулю в области

$$\{\text{Im } \lambda_1 u_1 > 0, \text{Im } \lambda_2 u_2 > 0, |u_1| < 1, |u_2| < 1\}.$$

Отсюда следует, что при фиксированных $\text{Im } u > 0, |u| < 1$ множество норм

$$n_\lambda = \|\Pi(g) T(\lambda u \tilde{x}^0, \lambda \tilde{x}) \Pi(f) \Psi\|$$

ограничено в области $\lambda > 1$. Поскольку еще при всех Φ из плотного множества $\text{dom } \Pi(g)^*$ последовательность скалярных произведений $(\Phi, \Pi(g) T(\lambda u \tilde{x}^0, \lambda \tilde{x}) \Pi(f) \Psi)$ благодаря (7.27) сходится при $\lambda \rightarrow \infty$, то в совокупности с ограниченностью норм n_λ это дает нам слабую сходимость при $\lambda \rightarrow \infty$ последовательности векторов $\Pi(g) T(\lambda u \tilde{x}^0, \lambda \tilde{x}) \Pi(f) \Psi$. Кроме

того, в силу (7.27)

$$T(\lambda u \tilde{x}^0, \lambda \tilde{x}) \Pi(f) \Psi \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} P_0 \Pi(f) \Psi.$$

В итоге, с учетом замкнутости оператора $\overline{\Pi(g)}$, мы получили, что $P_0 \Pi(f) \Psi \in \text{dom } \overline{\Pi(g)}$ для всех $\Pi(f) \in \mathcal{P}(O_1)$, $\Pi(g) \in \mathcal{P}(O_2)$, где O_1, O_2 — произвольные компактные области в M . Отсюда сразу имеем

$$P_0 \mathcal{P}_{\text{loc}} \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_{0, \text{loc}}. \quad (7.28)$$

Но в силу теоремы Рее—Шлидера для сети $\{\mathcal{P}(O)\}$, $\mathcal{D}_0$ содержит вектор, циклический для $\mathcal{P}_{\text{loc}}$, т.е. область $\mathcal{P}_{\text{loc}} \mathcal{D}_0$ плотна в $\mathcal{H}$, и, следовательно, левая часть (7.28) плотна в $\mathcal{H}_0$. $\square$

Теперь мы можем определить абелеву Ор*-алгебру в $\mathcal{H}_0$.

Предложение 7.14 [В4]. При допущениях предложения 7.13 множество операторов

$$\mathcal{P}_{0, \text{loc}} \doteq \bigvee \{ P_0 \bar{\Pi} P_0 |_{\mathcal{D}_{0, \text{loc}}}, \Pi \in \mathcal{P}_{\text{loc}} \}$$

есть абелева Ор*-алгебра в $\mathcal{H}_0$ с областью $\mathcal{D}_{0, \text{loc}}$.

Доказательство. Очевидно, что операторы $P_0 \bar{\Pi} P_0 |_{\mathcal{D}_{0, \text{loc}}}$, а также их произведения корректно определены на $\mathcal{D}_{0, \text{loc}}$, и $\mathcal{P}_{0, \text{loc}}$ есть Ор-алгебра. Далее, это есть и Ор*-алгебра, поскольку сначала для образующих $P_0 \bar{\Pi} P_0 |_{\mathcal{D}_{0, \text{loc}}}$, а затем и для произвольного элемента $\Pi_0 \in \mathcal{P}_{0, \text{loc}}$ непосредственно проверяется, что

$$\text{dom } \Pi_0^* \supset \mathcal{D}_{0, \text{loc}}, \quad \Pi_0^* |_{\mathcal{D}_{0, \text{loc}}} \in \mathcal{P}_{0, \text{loc}}.$$

Наконец, абелевость $\mathcal{P}_{0, \text{loc}}$ устанавливается подобно абелевости аналогичной вакуумной алгебры R_{P_0} в теории Хаага—Араки (предложение 3.46). Нужно показать, что для всех $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}_{0, \text{loc}}$ и всех $\Pi(f) \in \mathcal{P}(O_1)$, $\Pi(g) \in \mathcal{P}(O_2)$ с произвольными $O_1, O_2 \in B(M)$

$$(\Phi, \overline{\Pi(f)} P_0 \overline{\Pi(g)} \Psi) = (\Phi, \overline{\Pi(g)} P_0 \overline{\Pi(f)} \Psi). \quad (7.29)$$

Пусть снова $\tilde{x} \in (O_1 \cup O_2)'$; рассмотрим векторы вида $x_{\lambda, u} = (\lambda u \tilde{x}^0, \lambda \tilde{x})$, где λ — вещественный, u — комплексный параметр, и введем функцию

$$f_{\lambda}(u) = (\Phi, \overline{\Pi(f)} T(x_{\lambda, u}) \overline{\Pi(g)} \Psi), \quad |u| < 1, \lambda > 1.$$

Асимптотические формулы (7.27) дают: при $\text{Im } u > 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_{\lambda}(u) = (\Phi, \overline{\Pi(f)} P_0 \overline{\Pi(g)} \Psi), \quad (7.30)$$

а при $\text{Im } u < 0$, замечая, что, как легко проверить с помощью граф-топологии, коммутативность двух элементов Ор*-алгебры влечет и коммутативность их расширений на область замыкания этой алгебры, с учетом аксиомы локальности, имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_{\lambda}(u) = (\Phi, \overline{\Pi(g)} P_0 \overline{\Pi(f)} \Psi). \quad (7.31)$$

Поскольку

$$f_{\lambda}(u) = \int e^{-\lambda \text{Im } u \tilde{x}^0 p_0} e^{i\lambda(\text{Re } u \tilde{x}^0 p_0 - xp)} \times \\ \times (\Phi, \overline{\Pi(f)} dE(p) \overline{\Pi(g)} \Psi),$$

то $f_\lambda(u)$ равномерно ограничена при $\lambda > 0$ и $|u| < 1$. Поэтому в силу теоремы Витали [[ДШ, с. 353]] формулы (7.30), (7.31) влекут (7.29). $\square$

Наконец, искомую связь между свойствами неприводимости алгебр $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_{0,loc}$ устанавливает элементарное

Предложение 7.15. *При допущениях предложения 7.13*

$$R'_{P_0} \subset [(\mathcal{P}_{0,loc})'_w]'' . \quad (7.32)$$

Если же, кроме того, $\mathcal{P}$ — алгебра класса I, то

$$R'_{P_0} \subset (\mathcal{P}_{0,loc})'_w . \quad (7.33)$$

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{P}'_w$; тогда для любых $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}_{0,loc}$ и $\Pi \in \mathcal{P}_{loc}$, ввиду $P_0 \in R$

$$(\Phi, T\bar{\Pi}\Psi) = (\Phi, T|_{\mathcal{H}_0} P_0 \bar{\Pi} P_0 \Psi) .$$

С другой стороны, поскольку T слабо коммутирует с $\bar{\Pi}$,

$$(\Phi, T\bar{\Pi}\Psi) = (\Pi^+ \Phi, T\Psi) = (P_0 \Pi^+ P_0 \Phi, T|_{\mathcal{H}_0} \Psi) ,$$

т.е. $T|_{\mathcal{H}_0}$ слабо коммутирует с образующими $\mathcal{P}_{0,loc}$, а отсюда и со всеми элементами этой алгебры. Получаем

$$\mathcal{P}'_w|_{\mathcal{H}_0} \subset (\mathcal{P}_{0,loc})'_w . \quad (7.34)$$

Если $\mathcal{P}$ — алгебра класса I, то слева здесь стоит R'_{P_0} , и мы имеем (7.33). В общем случае, с учетом $P_0 \in R$,

$$R' = (\mathcal{P}'_w)'', \quad R'_{P_0} = (\mathcal{P}'_w|_{\mathcal{H}_0})'',$$

что дает (7.32). $\square$

С полученными результатами мы достигаем нашей основной цели — продемонстрировать возможность аномалии Борхерса, указав для нее какое-либо достаточное условие. В самом деле, согласно (7.32), неприводимость $\mathcal{P}_{0,loc}$ влечет неприводимость $\mathcal{P}$, и мы заключаем: в вайтмановской теории с произвольной алгеброй $\mathcal{P}$ и вакуумным подпространством, циклическим для $\mathcal{Z}'$, аномалия Борхерса имеет место всегда, когда $\mathcal{P}_{0,loc}$ есть неприводимая абелева Op^* -алгебра в бесконечномерном подпространстве $\mathcal{H}_0$. Ясно в то же время, что этот вывод слабее наших предварительных утверждений, в частности свойство (7.32) слабее ожидавшегося (7.26). Однако окончательный анализ аномалии Борхерса пока отсутствует, и мы не можем сказать, найдется ли какая-либо абелева Op^* -алгебра в $\mathcal{H}_0$, слабый коммутант которой точно совпадает с R'_{P_0} . Укажем лишь, что, кроме (неполных пока) общих результатов, имеется и явный модельный пример вайтмановской теории с аномалией Борхерса, построенный Борхерсом и Ингвасоном [BY1]. Пространство состояний этой теории берется в виде $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_0$, где $\mathcal{H}_1$ — тензорное произведение $2n$ фоковских пространств свободных полей различных ненулевых масс, а в $\mathcal{H}_0$ действует бесконечномерное неприводимое представление свободной абелевой алгебры, порождаемое n генераторами, $n > 2$. Известно, что такие представления существуют, и их конструкция восходит к данному Гильбертом примеру положительного полинома, который не есть сумма квадратов полиномов (см., например, [[ГВ]], [P 1]).

Подчеркнем также, что аномалия Борхерса "аномальна" не только в математическом смысле (как особенность Op^* -динамики, не имеющая аналога в поведении C^* -динамической системы), но и в физическом смысле: при ее наличии в полевой теории появляются чистые функционалы Вайтмана (эргодические состояния на $\mathcal{P}$), которые не обладают кластерным свойством и не задают чистой фазы. Желательно поэтому иметь и условия ее отсутствия, и притом, по возможности, удобные и простые, допускающие проверку в конкретных квантовополевых моделях. По этой причине к задаче получения таких условий обращались не раз, и найден уже целый ряд их вариантов. Самое очевидное (однако не всегда легко проверяемое и, возможно, слишком ограничительное) условие уже было указано: это — существование ассоциированной теории Хаага—Араки. Далее, как хорошо известно, необходимым и достаточным условием единственности вакуумного вектора — а, стало быть, и отсутствия аномалии Борхерса — является кластерное свойство, т.е. асимптотическая (для пространственноподобных направлений) факторизуемость порождающего функционала Вайтмана W_Ω . Исходя из этого, можно показать [BY2, § 6], что необходимым и достаточным условием отсутствия аномалии Борхерса служит также факторизуемость — уже точная, а не асимптотическая — функционала $W_\Omega^{(0)}$ на абелевой Op^* -алгебре в $\mathcal{H}_0$, отвечающего тому же вектору Ω (иначе говоря, $W_\Omega^{(0)}$ должен быть эрмитовым характером на этой алгебре); согласно [Y2, теорема 4.3], этому равносильно требование существования самосопряженных расширений симметрических образующих данной алгебры, действующих, вообще говоря, в расширенном гильбертовом пространстве $\hat{\mathcal{H}}_0 \supset \mathcal{H}_0$ и сохраняющих взаимную коммутативность и положительность на элементах алгебры Борхерса вида $f^* \times f$. Другой критерий, уже не требующий рассмотрения операторов в $\mathcal{H}_0$, может быть сформулирован в терминах неограниченного коммутанта $\mathcal{P}'_{\text{loc}, \sigma}$ Op^* -алгебры $\mathcal{P}_{\text{loc}}$: как было недавно показано [HV2], имеет место формула

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\mathcal{P}'_{\text{loc}, \sigma} \Omega}$$

(где $\mathcal{P}_{\text{loc}}$ рассматривается с областью $\mathcal{P}_{\text{loc}} \Omega$); отсюда нетрудно вывести, что в произвольной неприводимой вайтмановской теории аномалия Борхерса отсутствует тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}'_{\text{loc}, \sigma} = \mathcal{P}'_w$. Известен и некий набор только достаточных условий. Согласно первому из них [F4; Y2], функции Швингера (аналитические продолжения функций Вайтмана на мнимые значения времени) должны быть моментами евклидово-инвариантной вероятностной меры, удовлетворяющей некоторому условию положительности. Два других условия найдены Дрисслером и Саммерсом [DrS3]. Одно из них — ослабление условия существования ассоциированной теории Хаага—Араки: требуется наличие хотя бы одного полевого оператора $A(f)$, $f \in S(\mathbb{R})^4$, такого, что для некоторой области $O \in B(M)$ преобразования Пуанкаре алгебры фон Неймана, порождаемой полярным разложением $A(f)$, коммутируют с этой алгеброй, если они переводят O в область, пространственноподобную к O (такие операторы называются *внутренне локальными*; ср. [Wi]). Другое условие требует, чтобы поле $A(f)$ удовлет-

воряло "обобщенной H -оценке": для каждой основной функции $f \in Z(\mathbb{R}^4)$ (пространство преобразований Фурье функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$) существует монотонно убывающая и строго положительная функция F_f на $[0, \infty)$ такая, что $F_f(H) \mathcal{H} \subset \text{dom } A(f)$ и $\|A(f) F_f(H)\| < \infty$, где $H = \hat{p}_0$. Оценки такого рода изучались в вайтмановской теории [FH] и выводились для моделей конструктивной теории поля; согласно аргументации [DrS 3], их выполнения можно ожидать даже и в общей полевой теории с сильным условием спектральности; во всяком случае, обобщенная H -оценка вытекает из оценки Дрисслера—Фрелиха (п. 8.1).

Системы с единственным вакуумным сектором. Проанализировав простейший из видов вакуумной структуры, зададимся вопросом: к каким дальнейшим видам переходить теперь? Описать вакуумную структуру вайтмановской теории означает, прежде всего, получить разложение ее порождающего функционала Вайтмана W_Ω по экстремальным вакуумным состояниям на алгебре Борхерса (для краткости Op^* -состояниям); для полноты описания следует также получить разложение соответствующего физического вакуумного состояния ω_Ω по экстремальным вакуумным состояниям на R , а кроме того, найти, какие условия на алгебру R налагаются этими разложениями. Отсюда ясно, что классифицировать вакуумные структуры следует по виду указанных разложений. Поэтому очередным пунктом мы рассмотрим вакуумную структуру, в которой имеется всего одно (с точностью до эквивалентности) экстремальное вакуумное Op^* -состояние. Такую структуру достаточно полно описывает

Предложение 7.16 [BCX 2]. В вайтмановской теории с полевой Op^* -алгеброй $\mathcal{P}$ класса II и сильно циклическим вакуумом Ω следующие условия эквивалентны:

$$1) W_\Omega = \sum_{i=1}^{k'} c_i W_{\Omega_i}, \text{ где } W_{\Omega_i} \text{ — чистые функционалы Вайтмана, унитарно эквивалентные между собой;}$$

$$2) \omega_\Omega = \sum_{i=1}^{k'} c_i \omega_{\Omega_i}, \text{ где } \omega_{\Omega_i} \text{ — чистые вакуумные состояния, унитарно эквивалентные между собой;}$$

$$3) R \text{ есть фактор типа I и кратности } k';$$

$$4) \mathcal{H} = \overline{L\{\mathcal{P}\mathcal{P}'\Omega_0\}}, \quad \omega_{\Omega_0} \in PV(R).$$

Доказательство. Проще всего установить эквивалентность условия 3 каждому из условий 1, 2, 4. Если R — фактор типа I и кратности k' , то в любом его неприводимом подпространстве $\mathcal{H}_i$ имеется чистый вакуумный вектор $\Omega_{\Omega_i} = P_i \Omega$. Выбирая в k' -мерном подпространстве $\mathcal{H}_{\Omega_0}^{R'}$ ортонормированный базис $\{\Omega_i\}_{i=1}^{k'} \subset \mathcal{M}_{\Omega_0}^R$, имеем

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{k'} \mathcal{H}_{\Omega_i}^R. \quad (7.35)$$

В каждом из $\mathcal{H}_{\Omega_i}^R$ зафиксируем по вакуумному вектору $\Omega_i = P_{\Omega_i}^R \Omega / \|P_{\Omega_i}^R \Omega\|$, так

что $\Omega = \sum_{i=1}^{k'} a_i \Omega_i$, $a_i \equiv \|P_{\Omega_i}^R \Omega\|$. Поскольку $P_{\Omega_i}^R \equiv \hat{P} \in \mathcal{P}'$, то $G_{\hat{P}\Omega}^{\mathcal{P}} = \hat{P} G_\Omega^{\mathcal{P}}$, и в силу

циклическости Ω

$$\mathcal{H}_{\hat{P}\Omega}^{\mathcal{P}} = \hat{P} \mathcal{H}_\Omega^{\mathcal{P}} = \hat{P} \mathcal{H},$$

т.е. $\hat{P} = P_{\hat{P}\Omega}^{\mathcal{P}}$, и с учетом $G_{\Omega}^{\mathcal{P}} \supset \mathcal{D}(\Pi)$ получаем

$$G_{\hat{P}\Omega}^{\mathcal{P}} = \hat{P} G_{\Omega}^{\mathcal{P}} \supset \hat{P} \mathcal{D}(\Pi) = P_{\hat{P}\Omega}^{\mathcal{P}} \mathcal{D}(\Pi),$$

т.е. векторы $\Omega_i = \hat{P} \Omega / \|\hat{P} \Omega\|$ вполне регулярны. Отсюда, с учетом $\mathfrak{N}_{\text{cr}} \subset \mathfrak{N}_r$ и предложения 7.6,

$$\mathcal{H}_{\Omega_i}^R = \mathcal{H}_{\Omega_i}^{\mathcal{P}}, \quad \mathcal{H}_{\Omega_i}^{\mathcal{Z}'} = \overline{L\{\mathcal{P}\mathcal{P}'\Omega_i\}} = \mathcal{H}, \quad i = 1, \dots, \kappa'. \quad (7.36)$$

Далее, состояния ω_{Ω_i} чисты и унитарно эквивалентны; W_{Ω_i} также чисты и унитарно эквивалентны (в силу предложений 7.9 и 7.10). В итоге из (7.36) мы имеем $3 \rightarrow 4$, а из (7.36) и (7.35) — $3 \rightarrow 1$ и $3 \rightarrow 2$ (причем $c_i = |a_i|^2$).

$4 \rightarrow 3$. Из 4 в совокупности с $\mathcal{P}\Omega_0 \subset \overline{R\Omega_0}$ имеем

$$\mathcal{H} = \overline{L\{\mathcal{P}\mathcal{P}'\Omega_0\}} = \mathcal{H}_{\Omega_0}^{\mathcal{Z}'}.$$

Но при $\omega_{\Omega_0} \in PV(R)$, $R_{P_{\Omega_0}^{\mathcal{Z}'}} = \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\Omega_0}^R) \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H}_{\Omega_0}^{R'})$ и, в силу $P_{\Omega_0}^{\mathcal{Z}'} = I$, R есть фактор типа I.

$1 \rightarrow 3$. Для векторов Ω_i в 1 докажем, что

$$\omega_{\Omega_i} \in PV(R), \quad \omega_{\Omega_i} \approx \omega_{\Omega_j}, \quad i, j = 1, \dots, \kappa'. \quad (7.37)$$

Ввиду $W_{\Omega_i} < W_{\Omega}$, $\Omega \in \mathfrak{N}_{\text{cr}}$, можно взять $\Omega_i = T_i \Omega$, $T_i \in R'$, так что $\Omega_i \in \mathfrak{N}_r$ и $\omega_{\Omega_i} \in PV(R)$ (предложения 7.8, 7.6, 7.9). Для чистых состояний ω_{Ω_i} и ω_{Ω_j} достаточно показать наличие ненулевого оператора переплетения [[Д, 5.3.3, 5.3.6]]. Если U_{ij} — изометрический оператор переплетения для $\Pi_{\Omega_i}^{\text{GNS}}$ и $\Pi_{\Omega_j}^{\text{GNS}}$, то для всех $f, g \in \mathcal{A}$ имеем

$$\begin{aligned} U_{ij} T_i \Pi(f) \Pi(g) \Omega &= U_{ij} \Pi_{\Omega_i}^{\text{GNS}}(f) \Pi(g) \Omega_i = \\ &= \Pi_{\Omega_j}^{\text{GNS}}(f) U_{ij} \Pi(f) \Omega_i = \bar{\Pi}(f) U_{ij} T_i \Pi(g) \Omega, \end{aligned}$$

т.е. ввиду $\mathcal{P}$ -цикличности Ω , $U_{ij} T_i \in R'$ и $T_{ij} \equiv U_{ij} T_i P_{\Omega_i}^R \in R'$. Отсюда $\tilde{T}_{ij} \equiv T_{ij}|_{\mathcal{H}_{\Omega_i}^R}$ есть оператор переплетения для ω_{Ω_i} и ω_{Ω_j} , и $\tilde{T}_{ij} \neq 0$, ибо $\tilde{T}_{ij} \Omega_i = U_{ij} T_i^* \Omega \neq 0$ ($\Omega - \Omega_i R'$ -сепаратор). Далее, из (7.37) имеем ввиду $\Omega_i, \Omega_j \in \mathfrak{N}_r$:

$$\mathcal{H}_{\Omega_i}^{\mathcal{Z}'} = \mathcal{H}_{\Omega_j}^{\mathcal{Z}'} = \overline{L\{\mathcal{P}\mathcal{P}'\Omega_i\}} = \overline{L\{\mathcal{P}\mathcal{P}'\Omega_j\}}, \quad i, j = 1, \dots, \kappa'.$$

Отсюда легко вывести от противного, что для любого $i = 1, \dots, \kappa'$ $\mathcal{H}_{\Omega_i}^{\mathcal{Z}'} = \mathcal{H}$. В самом деле, если $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\Omega_i}^{\mathcal{Z}'} \oplus \mathcal{H}^{\perp}$, имеем $\Omega = P_{\Omega_i}^{\mathcal{Z}'} \Omega + \Omega_{\perp}$ (где, очевидно, оба слагаемых лежат в $\mathcal{D}$) и, обозначая $P_{\Omega_i}^{\mathcal{Z}'} \Omega = \Omega_{\mathcal{Z}'}$, согласно 1

$$W_{\Omega} = W_{\Omega_{\mathcal{Z}'}} + W_{\Omega_{\perp}} = \sum_{i=1}^{\kappa'} c_i W_{\Omega_i}. \quad (7.38)$$

Из $W_{\Omega_i} < W_{\Omega}$ имеем $W_{\Omega_i} = W_{T_i \Omega}$, $T_i \in \mathcal{P}'$; а с учетом $P_{\Omega_i}^{\mathcal{Z}'} \in \mathcal{Z}'$ и $T_i \Omega = \Omega_i \in \mathcal{H}_{\Omega_i}^{\mathcal{Z}'}$, получаем $T_i \Omega = T_i \Omega_{\mathcal{Z}'}$. В силу $\Omega_{\mathcal{Z}'} \in \mathfrak{N}_{\text{cr}}$ это означает, что $W_{\Omega_i} < W_{\Omega_{\mathcal{Z}'}}$, откуда и $\sum_{i=1}^{\kappa'} c_i W_{\Omega_i} < W_{\Omega_{\mathcal{Z}'}}$, тогда как (7.38) дает $W_{\Omega_{\mathcal{Z}'}} < \sum_{i=1}^{\kappa'} c_i W_{\Omega_i}$. Отсюда следует, что $W_{\Omega_{\perp}} = 0$, а также $\Omega_{\perp} = 0$, ибо $\mathcal{P}$ — алгебра с единицей. Таким образом, $\mathcal{H}_{\Omega_i}^{\mathcal{Z}'} = \mathcal{H}$, т.е. R — фактор типа I; совпадение его кратности с κ' проверяется просто.

$2 \rightarrow 3$ элементарно, и эквивалентность условий 1–4 доказана.

Наконец, тот факт, что экстремальные Op^* -состояния W_{Ω_i} в условии 1 являются функционалами Вайтмана, получаем, заметив, что их релятивистская ковариантность очевидна, а локальность и спектральность следуют из того, что в силу их подчиненности функционалу Вайтмана W_{Ω} их левые ядра включают левое ядро последнего. $\square$

Обсудим физическую интерпретацию данной вакуумной структуры. Прежде всего, очевидна ее связь с суперотборной структурой: вайтмановская теория в данном случае представляет собой в точности когерентный суперотборный сектор, т.е. релятивистскую квантовую систему, глобальная алгебра наблюдаемых которой — фактор типа I (хотя, конечно, при единственном секторе еще нельзя говорить о наличии в теории правила суперотбора). В то же время эта структура обладает существенными отличиями от вакуумного когерентного сектора в теории Хаага—Араки: в каждом таком секторе вакуумное состояние было единственным и чистым, а любой сектор с циклическим вакуумным вектором был автоматически абелев (предложение 3.47). От этой картины в нашем случае имеются следующие два отклонения: 1) в неприводимых подпространствах $\mathcal{H}_{\Omega_i}^R$ алгебры R возможна аномалия Борхерса, $\dim(\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_{\Omega_i}^R) = \infty$; 2) даже и при отсутствии этой аномалии возможно, вообще говоря, что $R \neq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $d_0 = \kappa' > 1$, и множество вакуумных состояний включает как чистые, так и смешанные, несмотря на наличие циклического вакуумного вектора. Оба эти отличия отражают общий факт далеко не полной (как математически, так и физически) эквивалентности между полевой Op^* -динамикой и C^* -динамикой наблюдаемых; однако лишь первое из них имеет принципиальный характер. О втором сказать этого нельзя: оно возникло лишь потому, что для вайтмановской теории мы еще не доказали классический результат Араки [A5], согласно которому наличие циклического вакуумного вектора влечет абелевость R' . Но, в действительности, вайтмановский аналог этого результата имеет место: совсем недавно он был получен сначала при определенных ограничениях на теорию [DrS3], а затем и в достаточно общем виде [HV2], и его доказательство мы приведем вскоре. В итоге, второе из вышеуказанных отличий Op^* -динамики полностью исчезает.

Наконец, важным аспектом физической интерпретации вайтмановской теории является ее рассмотрение в терминах чистых фаз. В § 4 мы видели, что существует аналогия между когерентным сектором в локальной квантовой теории и чистой фазой в статистической механике. Однако сама по себе эта аналогия могла там расцениваться как простая параллель и не давала еще оснований переносить понятия фазы и чистой фазы в локальную квантовую теорию. Иная ситуация в полевой теории. Функции Вайтмана суть аналитические продолжения корреляционных функций статистической механики, и за счет этого система вайтмановских полей прямо связана с определенной статистической системой. Поэтому фаза и чистая фаза должны включаться в число характеризующих ее понятий, а задача описания структуры вайтмановской теории должна включать в себя получение ее разложения на чистые фазы. Физические состояния, представляющие чистую фазу, — экстремальные равновесные состояния, обладающие фиксированными значениями макроскопических наблюдаемых (что влечет факторность таких состояний, как отмечалось в § 4); но, кроме того, эти состояния должны обладать и (слабым) кластерным свойством (см., например, [[P]], [F2]). В рамках C^* -динамики в п. 3.5 мы видели, что экстремальные инвариантные состояния асимптотически абелевых систем всегда обладают слабой кластерностью, а при наличии спектральности также и факторностью, и потому являются чистыми фазами. Однако для Op^* -динамики

это может нарушаться. Как для физического вакуумного состояния ω_Ω , так и для Op^* -состояния W_Ω , слабое кластерное свойство равносильно единственности вакуумного луча в пространстве соответствующего представления и, значит, не может выполняться для чистых функционалов Вайтмана, в пространстве представления которых имеет место аномалия Борхерса. Отсюда следует вывод: вайтмановская теория, описанная в предложении 7.16, имеет единственный вакуумный когерентный сектор, но, вообще говоря, не единственную чистую фазу. Чистая фаза в такой теории единственна тогда и только тогда, когда в ней отсутствует аномалия Борхерса (для чего достаточно существования ассоциированной теории Хаага—Араки или любого из условий на с. 203–204).

Приведем теперь вышеупомянутый результат об абелевости алгебры R' , обобщающий для полевых Op^* -систем теорему Араки.

Т е о р е м а 7.17. Пусть задана произвольная вайтмановская теория с полевой Op^* -алгеброй $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ и циклическим вакуумом $\Omega \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H}_0$. Тогда любая алгебра фон Неймана, лежащая в $\mathcal{P}'_w$, абелева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим снова абелеву "вакуумную Op^* -алгебру" $(\mathcal{P}_{0,\text{loc}}, \mathcal{D}_{0,\text{loc}})$ и на плотном в $\mathcal{H}_0$ линейале $\mathcal{P}_{0,\text{loc}} \Omega$ (с учетом (7.28) $\mathcal{P}_{0,\text{loc}} \Omega \subset \mathcal{D}_{0,\text{loc}}$) определим в $\mathcal{H}_0$ оператор

$$j: \Pi \Omega \rightarrow \Pi^* \Omega, \quad \Pi \in \mathcal{P}_{0,\text{loc}}.$$

Пользуясь абелевостью $\mathcal{P}_{0,\text{loc}}$, тривиально проверяем, что на своей исходной области j антиизометричен:

$$(j\Phi, j\chi) = (\chi, \Phi) \quad \forall \chi, \Phi \in \mathcal{P}_{0,\text{loc}} \Omega$$

и потому продолжается до антиунитарного оператора в $\mathcal{H}_0$, для которого сохраним то же обозначение. Аналогично проверяем свойства:

$$j = j^*, \quad jTj = T^* \quad \forall T \in (\mathcal{P}_{0,\text{loc}})'_w.$$

(Очевидно, что j — аналог оператора модулярной инволюции $J = S = F$ в тривиальной модулярной теории для абелевой алгебры фон Неймана с циклическим вектором; эта аналогия подтверждается и другими его свойствами [HV2]). Вообще говоря, $*$ -инвариантный линейал $(\mathcal{P}_{0,\text{loc}})'_w$ может не быть алгеброй; однако, если N_0 — произвольная $*$ -алгебра из $(\mathcal{P}_{0,\text{loc}})'_w$, то эта алгебра абелева. Действительно, для любых операторов $T_1, T_2 \in N_0$ с учетом $j^2 = I$ имеем

$$T_1 T_2 = j T_1^* j j T_2^* j = j T_1^* T_2^* j = T_2 T_1.$$

Пусть теперь M — произвольная алгебра фон Неймана из $\mathcal{P}'_w$. В силу цикличности Ω для $\mathcal{P}$, Ω — сепаратор для $\mathcal{P}'_w$ и, следовательно, для M , и тотализатор для M' . Поскольку еще $P_0 \in R \subset M'$, то отображение $M \rightarrow M_{P_0}$ есть индукция и изоморфизм; а так как, с учетом (7.34),

$$M_{P_0} \subset \mathcal{P}'_w|_{\mathcal{H}_0} \subset (\mathcal{P}_{0,\text{loc}})'_w,$$

то M_{P_0} , а, следовательно, и M — абелевы алгебры фон Неймана. $\square$

С л е д с т в и е. В произвольной вайтмановской теории с полевой Op^* -алгеброй $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ и циклическим вакуумом, если $\mathcal{P}'_w$ — алгебра фон Неймана, то $\mathcal{P}'_w$ — абелева алгебра.

Этим следствием охватываются, в частности, все модели с циклическим вакуумом и полевыми операторами, самосопряженными в существенном.

Возвращаясь же к обсуждению вакуумной структуры, мы видим, что из структур, описываемых предложением 7.16, с аксиомами Вайтмана совместимы лишь те, для которых $\kappa' = 1$ или, что то же, $R = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Иными словами, все вайтмановские теории с циклическим вакуумом и единственным классом эквивалентности вакуумных состояний принадлежат, в действительности, к рассмотренному ранее классу неприводимых полевых систем.

Дискретный вакуумный суперотбор. Общий случай вакуумной структуры — система с произвольным множеством (классов эквивалентности) экстремальных вакуумных Op^* -состояний. На основании предложения 7.16 следует ожидать, что структура такой системы должна представлять собой разложение на "секторы", каждый из которых объединяет состояния из одного класса эквивалентности и обладает глобальной алгеброй, являющейся дискретным фактором. При этом, согласно теореме 7.17, при учете аксиомы локальности указанные секторы должны быть абелевы; разложение же по ним, вообще говоря, может быть как дискретным (в прямую сумму алгебр и их гильбертовых пространств), так и непрерывным (в прямой интеграл). Рассмотрим сначала дискретный случай.

Теорема 7.18 [BCX2]. Для произвольной Op^* -алгебры $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ класса II с сильно циклическим вектором Ω , следующие условия эквивалентны:

$$1) W_\Omega = \sum_{i \in I} c_i W_i, \text{ где } W_i \text{ — чистые } \text{Op}^*\text{-состояния на } \mathcal{P}, c_i > 0, \sum_{i \in I} c_i = 1;$$

$$2) \omega_\Omega = \sum_{i \in I} c_i \omega_i, \text{ где } \omega_i \text{ — чистые состояния на } R;$$

3) R есть алгебра P -класса:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j, R = \bigoplus_{j \in J} R_j, R_j \text{ — факторы типа } I_\infty;$$

$$4) \mathcal{H} = \bigoplus_{j \in J} \overline{L\{\mathcal{P}\mathcal{P}'\Omega_j\}}, \omega_{\Omega_j} \in PV(R).$$

Если же $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ — полевая Op^* -алгебра вайтмановской теории, и Ω — вакуумный вектор, то в условиях 1–4, кроме того, W_i — функционалы Вайтмана, ω_i — вакуумные состояния, $I = J$, $R_j = \mathfrak{B}(\mathcal{H}_j)$ и

$$\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{j \in J} (\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_j), \dim(\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_j) = 1 \text{ или } \infty. \quad (7.39)$$

Доказательство является несложным обобщением доказательства предложения 7.16 и следует той же схеме. При выполнении условия 3, имеет место очевидный аналог (7.35):

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j \in J} \bigoplus_{i=1}^{\kappa'_j} \mathcal{H}_{\Omega_{ij}}^R, \quad (7.40)$$

где κ'_j — кратность дискретного фактора R_j , $\mathcal{H}_{\Omega_{ij}}^R$ — неприводимые подпространства R и Ω_{ij} — нормированные проекции сильно циклического вакуума Ω , являющиеся, как мы видели, вполне регулярными вакуумными векторами за счет $P_{\Omega_{ij}}^R \in \mathcal{P}'$. Отсюда

$$\mathcal{H}_{\Omega_{ij}}^R = \mathcal{H}_{\Omega_{ij}}^{\mathcal{P}}, \mathcal{H}_{\Omega_{ij}}^{\mathcal{Z}'} = \overline{L\{\mathcal{P}\mathcal{P}'\Omega_{ij}\}} = \mathcal{H}_j, \quad i = 1, \dots, \kappa'_j, \quad (7.41)$$

т.е. имеем $3 \rightarrow 4$. Состояния $\omega_{\Omega_{ij}}$ чисты и при одном и том же j унитарно эквивалентны между собой; то же верно и для $W_{\Omega_{ij}}$. Отсюда, с учетом (7.40) и первой из формул (7.41), имеем $3 \rightarrow 1$ и $3 \rightarrow 2$.

4 → 3. Из $\overline{\mathcal{P}\Omega_j} \subset \overline{R\Omega_j}$ имеем $\overline{L\{\mathcal{P}\mathcal{P}'\Omega_j\}} \subset \mathcal{H}_{\Omega_j}^{\mathcal{Z}'}$ для всех $j \in J$. Отсюда, с учетом взаимной ортогональности всех $\mathcal{H}_{\Omega_j}^{\mathcal{Z}'}$, имеем

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j \in J} \overline{L\{\mathcal{P}\mathcal{P}'\Omega_j\}} = \bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_{\Omega_j}^{\mathcal{Z}'}$$

В силу $\omega_{\Omega_j} \in PV(R)$ это означает, что R есть алгебра Р-класса, $R = \bigoplus_{j \in J} R_j$, где R_j — дискретные факторы в пространствах $\mathcal{H}_{\Omega_j}^{\mathcal{Z}'}$. (Очевидно, что мы получили также $\overline{L\{\mathcal{P}\mathcal{P}'\Omega_j\}} = \mathcal{H}_{\Omega_j}^{\mathcal{Z}'}$ для всех j ; а любой вектор Ω_j без ограничения общности можно считать вполне регулярным, так как в противном случае вместо Ω_j можно взять вполне регулярный вектор $\Omega'_j = P_{\Omega_j}^R \Omega_j$.)

1 → 3. Из $W_i < W_\Omega$ имеем $W_i = W_{\Omega_i}$, где Ω_i — регулярный вакуумный вектор. Преобразуем сумму в 1, собрав вместе классы унитарной эквивалентности $W_{\Omega_{ij}}$:

$$W_\Omega = \sum_{j \in J} \sum_{i=1}^{\kappa'_j} c_{ij} W_{\Omega_{ij}}$$

Как и при выводе 1 → 3 в предложении 7.16 получим, что состояния $\omega_{\Omega_{ij}}$ также чисты и унитарно эквивалентны, и $\overline{L\{\mathcal{P}\mathcal{P}'\Omega_{ij}\}} = \mathcal{H}_{\Omega_{ij}}^{\mathcal{Z}'}$. Снова от противного легко убедиться, что если

$$\bigoplus_{j \in J} \bigoplus_{i=1}^{\kappa'_j} \mathcal{H}_{\Omega_{ij}}^{\mathcal{Z}'} \subsetneq \mathcal{H},$$

то разложение W_Ω по чистым включает дополнительные слагаемые, помимо W_i .

2 → 3 получаем точно таким же рассуждением. Заключительные утверждения следуют из предложения 7.16 и теоремы 7.17, а формулы (7.39) — из предложения 7.12 и $P_0 \in R$. □

Теорема 7.18 устанавливает тесную связь между задачей о вакуумной структуре системы полей и теорией правил суперотбора. Она показывает, что эта структура определяется (с точностью до аномалий Борхерса) центральным разложением глобальной алгебры R : порождающий функционал W_Ω имеет дискретное разложение по чистым в том и только в том случае, когда R есть прямая сумма дискретных факторов R_j . В свете § 4 мы заключаем, что в этом случае в системе имеется дискретное правило суперотбора с суперотборными секторами $\langle R_j, \mathcal{H}_j \rangle$. Назовем это правило *вакуумным суперотбором*, а компоненты $\langle R_j, \mathcal{H}_j \rangle$ центрального разложения R — *вакуумными суперотборными секторами*; согласно п. 4 теоремы, им отвечают инвариантные подпространства полевой алгебры $\mathcal{P}$. Если каждый сектор включает всего одну чистую фазу (т.е. при отсутствии аномалии Борхерса), вакуумный суперотбор разделяет любые две чистые фазы и разложение на вакуумные суперотборные секторы одновременно является разложением по чистым фазам.

Полезным дополнением к теореме 7.18 является следующий результат, показывающий, что дискретный вакуумный суперотбор заведомо присутствует в широком классе вайтмановских теорий и, в частности, во всех теориях с конечномерным вакуумным подпространством ($1 < d_0 < \infty$).

Теорема 7.19 [BCX2]. Пусть задана Op^* -алгебра $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ класса II с сильно циклическим вектором Ω и такая, что представление (индукция) $\pi'_0: R' \rightarrow R'_{P_0}$, где P_0 — проектор из R со свойством $P_0 \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0 \ni \Omega$ обладает дискретным разложением на неприводимые, $\pi'_0 = \bigoplus_{j \in J} \kappa'_j \pi'_j$ (κ'_j — кратность неприводимой компоненты π'_j). Тогда для $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ выполнены условия 1–4 теоремы 7.18. Если же $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ — полевая Op^* -алгебра вайтмановской теории, Ω — вакуумный вектор и $\mathcal{H}_0$ — вакуумное подпространство, то выполнены все условия теоремы 7.18 и в теории имеет место дискретный вакуумный суперотбор с множеством J абелевых суперотборных секторов. При $d_0 < \infty$ каждый сектор имеет единственный вакуумный луч.

Доказательство. Мы покажем, что множеству неприводимых представлений π'_j алгебры R' однозначно соответствует множество неприводимых представлений π_j алгебры R , причем это соответствие сохраняет отношения дизъюнктивности и унитарной эквивалентности, так что в итоге разложение представления π'_0 порождает дискретное разложение на неприводимые для представления $\pi_0: R \rightarrow R_{P_{\mathcal{H}_0}}^R$ алгебры R , т.е. ввиду $P_{\mathcal{H}_0}^R = P_{\Omega}^R = I$, самой этой алгебры. Отсюда будет уже легко проверить выполнение любого из эквивалентных условий 1–4; мы получим свойство 4. Итак, в разложении

$$\pi'_0 = \bigoplus_{j \in J} \kappa'_j \pi'_j,$$

которому отвечает разложение пространства представления

$$\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{j \in J} \bigoplus_{i=1}^{\kappa'_j} \mathcal{H}_{0i}, \quad (7.42)$$

выберем произвольное неприводимое представление $\pi'_i: R' \rightarrow R'_{P_{\Omega'_i}}^{R'}$ (Ω'_i — произвольный единичный вектор из $\mathcal{H}_{0i} = P_{\Omega'_i}^{R'} \mathcal{H}_0$). В силу неприводимости π'_i проектор $P_{\Omega'_i}^{R'}$ минимален в R , откуда следует, что $P_{\Omega'_i}^R$ минимален в R' и соответственно представление $\pi_i: R \rightarrow R_{P_{\Omega'_i}^R}^R$ неприводимо, $\mathcal{H}_{\Omega'_i}^R$ есть неприводимое подпространство R , а состояние $\omega_{\Omega'_i}$ чисто. Далее, поскольку центральные носители $P_{\Omega'_i}^{R'}$ и $P_{\Omega'_i}^R$ совпадают, то мы имеем

$$\pi'_i \simeq \pi'_j \iff \pi_i \simeq \pi_j,$$

$$\pi'_i \circ \pi'_j \iff \pi_i \circ \pi_j$$

(где $\circ$ — символ дизъюнктивности представлений). Таким образом, мы получаем набор чистых состояний $\omega_{\Omega'_i}$, от которого можно перейти к набору чистых вполне регулярных состояний, причем соответствующее представление π_i не изменится. Объединяя эти состояния в классы унитарной эквивалентности, находим, что множеству всех таких классов соответствует множество взаимно ортогональных "секторов" $\mathcal{H}_{\Omega_j}^{\mathcal{Z}'} = L\{\mathcal{P}\mathcal{P}'\Omega_j\}$. Поскольку же каждое подпространство $\mathcal{H}_{0i}$ из (7.42) лежит в некотором таком секторе, то мы получаем

$$\mathcal{H}_0 \subset \bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_{\Omega_j}^{\mathcal{Z}'}, \quad \mathcal{H}_{\mathcal{H}_0}^R = \mathcal{H} \subset \bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_{\Omega_j}^{\mathcal{Z}'},$$

и свойство 4 доказано. Остальные утверждения теоремы очевидны. $\square$

Важно отметить, что теоремы 7.18 и 7.19 полностью справедливы и для типичной физической ситуации, когда вайтмановские поля самосопряжены в существенном на области Гординга [Bo].

Непрерывный вакуумный суперотбор. Описываясь той же алгебраической структурой, что и обычные правила суперотбора, вакуумный суперотбор, конечно, имеет с ними целый ряд общих физических свойств; так, в частности, он также представляет собой преимущественно глобальное явление: из всех его главных особенностей лишь свойство абелевости суперотборных секторов опирается на аксиому локальности. В то же время и по своему происхождению и по физической интерпретации он глубоко отличен от них; по терминологии § 4 его нельзя отнести ни к кинематическим, ни к динамическим правилам суперотбора. Это отражается на проблеме непрерывного суперотбора. В § 4 мы убедились, что как для кинематических, так и для динамических правил суперотбора их основные физические свойства исключают их принадлежность к непрерывному типу, характеризуемому разложением $\mathcal{H}$ в прямой интеграл суперотборных секторов. Однако значительная часть этих свойств не сохраняется в случае вакуумного суперотбора (в частности, важно, что с последним не связано никаких суперотборных операторов) — и вместе с ними утрачивает силу и вывод о недопустимости непрерывного разложения. Разложение $\mathcal{H}$ на вакуумные суперотборные секторы соответствует разложению порождающего функционала W_Ω на чистые; а это последнее разложение определяется свойствами так называемой "квантовой меры", получаемой в рамках евклидовой формулировки теории, и, вообще говоря, вполне может быть непрерывным. Равным образом без обращения к евклидовой формулировке тоже нетрудно указать ситуации, когда вакуумный суперотбор непрерывен. Рассмотрим простой пример такой ситуации.

Пусть в вайтмановской теории с алгеброй $\mathcal{P}$ класса I, вакуумный луч не единствен, но еще единственно физическое вакуумное состояние:

$$d_0 > 1, \quad \mathcal{V}_1 = \mathcal{H}_0 \cap S_1 = \mathfrak{M}_\Omega^R. \quad (7.43)$$

Как мы увидим сейчас, соединение условий (7.43) с сильной цикличностью Ω приводит к ряду специфических особенностей данной вакуумной структуры: в частности, эта структура оказывается возможной лишь при $d_0 = \infty$; вакуумные векторы не могут отвечать чистым состояниям ни на R , ни на $\mathcal{P}$; разложения теории по чистым фазам и чистым вайтмановским состояниям имеют вид прямых интегралов без дискретной части; и, следовательно, если в такой теории присутствует вакуумное правило суперотбора, то это — правило суперотбора непрерывного типа.

Перейдем к получению этих свойств. Согласно предложению 7.11, поскольку $\Omega \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$, то $\mathfrak{M}_\Omega^{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}'_\omega \cap S_1 \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{D}$, где второе включение следует из $T(a) \in R$. Учитывая, что $\mathfrak{M}_\Omega^{\mathcal{P}} \supset \mathfrak{M}_\Omega^R \cap \mathcal{D}$, получаем

$$\mathfrak{M}_\Omega^{\mathcal{P}} = \mathfrak{M}_\Omega^R \cap \mathcal{D} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{D},$$

т.е. вакуумное Op^* -состояние также единственно. Далее, оба состояния ω_Ω и W_Ω не могут быть чистыми: действительно, для ω_Ω цикличность Ω и его чистота, с учетом предполагаемой в данном пункте единственности ω_Ω , влекут $d_0 = 1$, а ввиду $\Omega \in \mathfrak{N}_{\text{сг}}$ чистота ω_Ω равносильна чистоте W_Ω . В силу (7.43) это означает, что в $\mathcal{H}$ не имеется ни R -чистых, ни $\mathcal{P}$ -чистых вакуумных векторов.

Отсюда разложение ω_Ω по чистым не может содержать дискретной части: если $\omega_\Omega = \omega_1 + \omega_2$, где $\omega_1 \in PV(R)$, то здесь $\omega_1 \prec \omega_\Omega$ и $\omega_1 = \omega_{T\Omega}$, $T\Omega \in R'\Omega \subset \mathcal{H}_0$, т.е. $T\Omega$ — чистый вакуумный вектор. Но, согласно теореме 7.19, при $1 < d_0 < \infty$ для ω_Ω всегда существует дискретное разложение по чистым, и мы получаем, что структура (7.43) влечет $d_0 = \infty$.

Что касается разложения W_Ω по чистым, то в случае алгебры $\mathcal{P}$ класса I оно может, вообще говоря, включать дискретную часть, но эта дискретная часть заведомо не содержит векторных функционалов. В самом деле, если

$$W_\Omega = W_1 + W_2, \quad W_1 \in PV(\mathcal{P}), \quad (7.44)$$

то мы имеем лишь (см. предложение 7.8)

$$W_1(f) = (T\Omega, T\Pi(f)\Omega), \quad \text{где } T \in \mathcal{P}'_w, \quad T\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{D}(\mathcal{P}^*).$$

Если $\mathcal{D}(\mathcal{P}^*) \supsetneq \mathcal{D}$ и $T\Omega \notin \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{D}$, то функционал W_1 не является векторным по отношению к $\mathcal{P}$ и разложение (7.44) не противоречит структуре (7.43). Но если только W_1 — векторный функционал, т.е. $T\Omega \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{D}$, такое разложение невозможно, так как $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{D} = \mathfrak{M}_\Omega^\mathcal{P}$, что дает $W_1 = W_\Omega$. Если же Ор*-алгебра $\mathcal{P}$ — класса II, то разложение W_Ω не может содержать дискретной части: в этом случае функционал W_1 в (7.44) всегда векторный (предложение 7.8).

Таким образом, в рассматриваемом случае разложения W_Ω (а также и ω_Ω) по чистым инвариантным состояниям должны иметь вид интегралов по мерам с носителем, не содержащим дискретной части. Общая теория разложения функционалов на алгебрах неограниченных операторов, с особым рассмотрением функционалов Вайтмана на алгебре Борхерса, была разработана Борхерсом и Ингвасоном [BY 1,2; Y2]. Согласно этой теории, разложение Ор*-состояния W на алгебре $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ в пространстве $\mathcal{H}$ по экстремальным Ор*-состояниям строится с помощью определенного расширения $\hat{\mathcal{P}}$ алгебры $\mathcal{P}$, действующего, вообще говоря, в расширенном гильбертовом пространстве $\hat{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$, и имеет вид

$$W(\Pi) = \int^\oplus W_\xi(\Pi) d\nu_\xi, \quad \Pi \in \mathcal{P}, \quad (7.45)$$

где $d\nu_\xi$ — конечная положительная борелевская мера на $\mathbf{R}$, порождаемая изоморфизмом Гельфанда [[Д, п. 1.4]] для некоторой абелевой алгебры фон Неймана в $\hat{\mathcal{H}}$, лежащей в сильном коммутанте $\hat{\mathcal{P}}$. Ор*-состояния W_ξ на $\mathcal{P}$ чисты почти всюду по мере ν , являются функционалами Вайтмана, если W — функционал Вайтмана, и допускают вообще говоря, аномалию Борхерса, т.е. могут иметь бесконечномерное вакуумное подпространство, не быть кластерными и не отвечать чистой фазе. Однако для очень многих вайтмановских теорий, в частности, для всех теорий с полевой Ор*-алгеброй класса I, нет необходимости прибегать к сложной конструкции расширения $\hat{\mathcal{P}}$: в этих теориях существует [DrS3; HV2] такое разложение порождающего функционала по чистым функционалам Вайтмана, мера в котором определяется абелевой (в силу теоремы 7.17) алгеброй R' , если $\mathcal{P}'_w$ — алгебра, или же некоторой максимальной абелевой алгеброй фон Неймана из R' , вполне аналогично теории разложения по эргодическим состояниям для C^* -динамических систем [[БР]]. Но точное описание класса теорий, допускающих подобные разложения, пока отсутствует, так что

остаётся неясным, в какой степени общая теория Борхерса — Ингвасона реально необходима в физических ситуациях.

В итоге мы рассмотрели примеры вайтмановских теорий, отвечающие наличию как дискретного, так и непрерывного вакуумного суперотбора. Как легко видеть, наиболее общая вакуумная структура может совмещать в себе оба эти случая, так что вакуумный суперотбор будет включать как дискретную, так и непрерывную часть. Действительно, для глобальной алгебры $R = (\mathcal{P}'_w)'$ общей вайтмановской теории, согласно лемме 4.3, имеем

$$R = R_p \oplus R_m, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_m, \quad (7.46)$$

где R_p есть алгебра P-класса, а R_m не содержит чистых векторных состояний. Благодаря наличию сильно циклического вакуума Ω из разложений (7.46) вытекают соответствующие разложения для порождающего функционала Вайтмана W_Ω :

$$W_\Omega = W_d + W_c, \quad W_d = W_{\Omega_d} = \sum_{i \in I} c_i W_{\Omega_i}, \quad W_c = W_{\Omega_c};$$

и аналогично

$$\omega_\Omega = \omega_d + \omega_c, \quad \omega_d = \omega_{\Omega_d} + \sum_{i \in I} \omega_{\Omega_i}, \quad \omega_c = \omega_{\Omega_c},$$

где $\Omega_d = P_p \Omega$, $\Omega_c = P_c \Omega$ и P_p, P_m — проекторы на $\mathcal{H}_p$ и $\mathcal{H}_m$ соответственно. Состояние W_d задает вайтмановскую теорию с дискретным вакуумным суперотбором, подробно описанную выше. Состояние W_c задает вайтмановскую теорию в подпространстве $\mathcal{H}_m$, где нет чистых состояний ни на $\mathcal{P}$, ни на R , и его разложение по чистым инвариантным состояниям должно иметь вид прямого интеграла (7.45). Если (все или некоторые) компоненты этого прямого интеграла являются чистыми фазами, то вайтмановская теория $\{W_c, \mathcal{H}_m\}$ описывает непрерывный вакуумный суперотбор.

В заключение снова подчеркнем, что полный параллелизм построенного описания вакуумного суперотбора с обычной суперотборной теорией § 4 имеет место строго в математическом, но не в физическом аспекте. По своему физическому смыслу вакуумный суперотбор, в отличие от обычных правил суперотбора, означает приводимость и секторную структуру полевой алгебры F , а не алгебры наблюдаемых R , хотя в рассмотренном классе теорий обе эти алгебры совпадают.

§ 8. ПОСТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА ПОЛЕВЫХ АЛГЕБР ФОН-НЕЙМАНА

8.1. Различные способы определения и проблема локальности. Известный объем результатов, который удастся получить в рамках формализма полевых Op^* -алгебр, не изменяет того общего обстоятельства, что, в целом, алгебры неограниченных операторов все же представляют собой слишком неудобный и малоизученный аппарат, и было бы гораздо желательнее иметь в основе алгебраической техники квантовой теории поля алгебры фон Неймана или C^* -алгебры. Желательно также, чтобы алгебраический формализм для полевой теории был по своей структуре возможно ближе к теории Хаага—Араки, описанной в гл. 1, с тем чтобы он мог воспользоваться ее богатыми результатами. В силу этих соображений в качестве

исходной проблемы алгебраического описания системы квантованных полей встает следующая задача:

сопоставить набору полевых операторов $A(f)$, или, что равносильно, сети полевых Ор-алгебр $\mathcal{P}(O)$, сеть полевых алгебр фон Неймана $F(O)$, удовлетворяющую основным постулатам релятивистской квантовой теории.*

Эта задача складывается из двух частей: требуется построить или определить некоторую сеть алгебр фон Неймана, исходя из $A(f)$ или $\mathcal{P}(O)$, и затем проверить, что данная сеть удовлетворяет физическим постулатам (или же отобрать из множества возможных сетей ту или те, которые удовлетворяют указанным постулатам). Ясно, что для проведения первого из этих этапов существует целый ряд различных возможностей, и потому на данном этапе решение задачи обладает большой неоднозначностью. Хорошо известны многие способы, посредством которых можно сопоставить алгебру фон Неймана системе неограниченных замыкаемых операторов $A(f)$; другой набор способов позволяет ставить в соответствие алгебры фон Неймана Ор*-алгебре $\mathcal{P}(O)$; и наконец, еще ряд вариантов определения $F(O)$ возникает, если учесть дополнительные свойства, связанные с физической интерпретацией $A(f)$ и $\mathcal{P}(O)$: как, скажем, возможность определять такие алгебры, исходя не только из $\mathcal{P}(O)$, но и из $\mathcal{P}(O')$. Указать все доступные способы едва ли возможно, да и едва ли нужно; но все же мы приведем обширный набор примеров — шире, нежели требуется для практических целей, — чтобы наглядней продемонстрировать разнообразие существующих вариантов.

Итак, прежде всего рассмотрим возможность определения алгебр $F(O)$ непосредственно в терминах вайтмановских полей. Скалярную вайтмановскую теорию будем, как правило, предполагать из наиболее общего класса, даваемого теоремой реконструкции: такая теория обладает произвольной глобальной Ор*-алгеброй $\mathcal{P}$ и произвольным вакуумным подпространством, содержащим хотя бы один циклический вектор $\mathcal{P}$. Пространством основных функций полагаем обычное $S(\mathbb{R}^4)$ (хотя, как и в § 7, обобщение на случай произвольной строго локализуемой теории не составляет особого труда).

1) Поскольку все операторы $A(f)$ замыкаемы, то каждому из них отвечает полярное разложение

$$\overline{A(f)} = V_f H_f, \quad V_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad H_f \geq 0, \quad H_f = \int_0^\infty \lambda dE(f, \lambda).$$

Тем самым множеству всех полей $A(f)$, $\text{supp } f \subset O$, действующих в произвольной области $O \in B(M)$, естественно соответствует алгебра фон Неймана

$$F_1(O) = \{V_f, E(f, \lambda) \mid f \in S(\mathbb{R}^4), \text{supp } f \subset O\}''.$$

Очевидно, что данный способ не требует наложения на поля никаких дополнительных ограничений.

2) Если предположить, что каждый симметрический оператор $A(f)$, $f \in S_R(\mathbb{R}^4)$ ($S_R(\mathbb{R}^4)$ — подпространство всех вещественных функций из $S(\mathbb{R}^4)$), обладает хотя бы одним самосопряженным расширением $\tilde{A}(f)$, то полю $A(f)$, $\text{supp } f \subset O$, можно сопоставить алгебру фон Неймана, порождаемую ограниченными функциями этих самосопряженных расшире-

ний. Как известно, для заданной системы самосопряженных операторов $\tilde{A}(f)$ одна и та же алгебра фон Неймана порождается либо полным набором из всех ограниченных функций этих операторов, либо любым из следующих наборов:

спектральные проекции $\tilde{E}(f, \lambda)$ операторов $\tilde{A}(f)$;

экспоненты $\exp[i\tilde{A}(f)]$;

резольвенты $\tilde{R}(f, \mu) = (\tilde{A}(f) - \mu)^{-1}$, $\text{Im } \mu \neq 0$.

Таким образом, полю $A(f)$, $\text{supp } f \subset O$, сопоставляется алгебра фон Неймана

$$F_2(O) = \{e^{i\tilde{A}(f)}\}'' = \{\tilde{E}(f, \lambda)\}'' = \{\tilde{R}(f, \mu), \text{Im } \mu \neq 0\}''.$$

3) В общем случае, симметрический оператор $A(f)$, $f = \bar{f}$, может обладать множеством (в том числе пустым) различных самосопряженных расширений и соответственно для заданного вайтмановского поля в области O может существовать множество различных алгебр $F_2(O)$. Очевидно, что достаточным условием существования и единственности алгебры $F_2(O)$ является единственность самосопряженного расширения $\tilde{A}(f)$, а для этого в свою очередь достаточно, если $A(f)$ в существенном самосопряжен. В этом частном случае $\tilde{A}(f) = \overline{A(f)} = A(f)^* = A(f)^{**}$, и алгебра $F_2(O)$ принимает вид

$$F_3(O) = \{\exp(iA(f)) \mid f \in S_R(\mathbb{R}^4), \text{supp } f \subset O\}''.$$

Далее, укажем некоторые способы определения $F(O)$ в терминах Op^* -алгебры $\mathcal{P}(O)$.

4) Самый прямой из таких способов — тот, что мы использовали в § 7: Op^* -алгебре $\mathcal{P}(O)$ без всяких ограничений на ее свойства всегда можно сопоставить алгебру фон Неймана

$$F_4(O) = (\mathcal{P}(O)'_w)'$$

5, 6) Также без всяких ограничений на $\mathcal{P}(O)$ алгебрами фон Неймана всегда будут множества

$$F_5(O) = \{\mathcal{P}(O)'_s \cup (\mathcal{P}(O)'_s)^*\}', \quad F_6(O) = \{\mathcal{P}(O)'_s \cap (\mathcal{P}(O)'_s)^*\}'.$$

7) Для произвольного множества $\mathcal{R}$ замкнутых операторов фон Нейманом [vN1] было введено еще одно понятие коммутанта, не совпадающее, вообще говоря, ни с сильным, ни со слабым коммутантом. Именно, "коммутантом фон Неймана" множества $\mathcal{R}$ будем называть множество ограниченных операторов

$$\mathcal{R}'_N = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid TA \subset AT, \quad TA^* \subset A^*T \quad \forall A \in \mathcal{R}\}.$$

Это — самый узкий из всех вводимых видов коммутанта множества неограниченных операторов: очевидно, что для произвольной Op^* -алгебры $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}'_N \subset \mathcal{A}'_s \subset \mathcal{A}'_w,$$

где с учетом возможной незамкнутости операторов из $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}'_N = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid T\bar{A} \subset \bar{A}T, \quad TA^* \subset A^*T \quad \forall A \in \mathcal{A}\}. \quad (8.1)$$

Еще фон Нейман показал, что $\mathcal{R}'_N$ есть "кольцо" — то, что мы называем

сейчас алгеброй фон Неймана. Соответственно полю $A(f)$, действующему в области O , можем сопоставить алгебру фон Неймана

$$F_7(O) = (\mathcal{P}(O)'_N)'.$$

Наконец, учтем, что объекты $A(f)$ и $\mathcal{P}(O)$ образуют сетевую локальную структуру по отношению к пространству Минковского. Поля, действующие в области O , коммутируют с полями, действующими в O' , и очевидно, что это свойство должна унаследовать и полевая алгебра фон Неймана $F(O)$ области O ; т.е. должно иметь место

$$F(O) \subset \mathcal{P}(O')'_{(?)}, \quad (8.2)$$

(вид коммутанта, конечно, не определяется из этих интуитивных соображений).

8) Таким образом, если мы хотим выбрать наиболее широкую полевую алгебру, совместимую с постулатами релятивистской квантовой теории (а это явно предпочтительно, в видах полноты информации о системе), то таковой будет максимальная алгебра фон Неймана, содержащаяся в $\mathcal{P}(O')'_{(?)}$. При этом из разных видов коммутанта алгебры $\mathcal{P}(O')$ к наиболее широкой алгебре $F(O)$ приводит слабый коммутант. В итоге полям, действующим в области O , может быть сопоставлена алгебра фон Неймана

$$F_8(O) =_{\text{alg}} \mathcal{P}(O')'_w,$$

где для произвольного множества $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$_{\text{alg}} \mathcal{K} = \{T \in \mathcal{K} \mid T\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \supset \mathcal{K}T\}.$$

9) Возможен и целый ряд модификаций последнего определения. Так, можно заметить, что по своему непосредственному смыслу условие локальности должно требовать коммутативности физических операторов, относящихся к области O , вообще говоря, не с любыми элементами алгебры $\mathcal{P}(O')$, а только с самими полями $A(f)$, $\text{supp } f \subset O'$, а также с их сопряженными. На этом основании взамен условия (8.2) можно выдвинуть условие

$$F(O) \subset L(O')'_N,$$

где

$$L(O') = L\{A(f), \text{supp } f \subset O'\},$$

и коммутант фон Неймана дается формулой (8.1); и вновь по соображениям максимальной принятости в качестве определения полевой алгебры фон Неймана

$$F_9(O) = L(O')'_N.$$

10) Наконец, по тем же соображениям допустимости замены всей алгебры $\mathcal{P}(O)$ системой $L(O)$ ее полевых образующих, можно модифицировать и определение 7), выбрав в качестве полевой алгебры фон Неймана

$$F_{10}(O) = (L(O)'_N)'.$$

Каждой из введенных систем алгебр обычным образом отвечают квази-локальная и глобальная полевые алгебры:

$$\mathcal{F}_i = \overline{\bigcup_{O \in B(M)} F_i(O)}^u, \quad F_i = \left\{ \bigcup_{O \in B(M)} F_i(O) \right\}'' , \quad i = 1, \dots, 10.$$

Приведенный набор определений дает достаточное представление как о принципах выбора полевой алгебры фон Неймана, так и о степени неоднозначности этого выбора; каждый читатель без труда мог бы добавить к нашему перечню еще несколько вариантов. Между введенными объектами $F_i(O), i = 1, \dots, 10$, имеющими одно и то же назначение и несущими, в главном, одну и ту же информацию, должны, естественно, существовать различные связи. В своем большинстве они опять-таки могут быть без труда получены самим читателем; мы же укажем сейчас лишь некоторые основные из них.

Итак, имеют место следующие соотношения:

$$F_1(O) = F_{10}(O) \subset F_7(O);$$

$$F_1(O) = F_2(O) = F_3(O) = F_4(O) = F_{10}(O)$$

(если алгебра $F_3(O)$ определена);

$$F_4(O) \subset F_5(O) \subset F_6(O) \supset F_7(O) \quad (8.3)$$

(если же полевые Ор*-алгебры самосопряжены, $\mathcal{P}(O) = \mathcal{P}(O)^*$, то

$$F_4(O) = F_5(O) = F_6(O) = F_7(O));$$

$$F_4(O') \subset F_8(O)';$$

$$F_4(O) \subset F_{10}(O);$$

$$F_9(O) = F_{10}(O')' \subset F_8(O).$$

Все они вытекают лишь из определений $F_i(O)$ без привлечения аксиом Вайтмана для $\mathcal{P}(O)$. Вывод большинства из них вполне очевиден, для вывода остальных достаточно кратких пояснений. Равенство в первом соотношении получается, если вспомнить, что для любых замкнутого оператора

$$A = V \int_0^\infty \lambda dE_A(\lambda) \text{ и алгебры фон Неймана } N \text{ свойство } V \in N, E_A(\lambda) \in N$$

равносильно $A \in N$. С учетом этого, указанное равенство выражает хорошо известное свойство фон-неймановского коммутанта: коммутант к коммутанту фон Неймана множества замкнутых операторов есть наименьшая алгебра фон Неймана, к которой присоединены все операторы этого множества. Во втором соотношении достаточно вывести равенства третье и четвертое. Третье равенство получается с учетом простого свойства: в силу того, что Ор*-алгебра $\mathcal{P}(O)$ является полиномиальной алгеброй для системы образующих $A(f)$, $\text{supp } f \subset O$, слабый коммутант $\mathcal{P}(O)$ совпадает со слабым коммутантом этой системы, или, что то же,

$$\mathcal{P}(O)'_w = L(O)'_w. \quad (8.4)$$

(Действительно, для любого $B \in L(O)'_w$, всех $f_i \in S_R(\mathbb{R}^4)$, $\text{supp } f_i \subset O$, $i = 1, \dots, n$, и всех $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}$ имеем

$$(\Phi, BA(f_1) \dots A(f_n)\Psi) = (A(f_1)\Phi, BA(f_2) \dots A(f_n)\Psi) = \dots$$

$$\dots = (A(f_n) \dots A(f_1)\Phi, B\Psi) = ((A(f_1) \dots A(f_n))^* \Phi, B\Psi),$$

т.е. $B \in \mathcal{P}(O)'_w$.) Равенство $F_3(O) = F_4(O)$ следует из (8.4), поскольку коммутативность ограниченного оператора с самосопряженными операторами $A(f)$ равносильна его коммутативности с ограниченными функ-

циями этих операторов, так что $L(O)'_w = F_3(O)'$. (Отсюда видим, что в теориях, где поля в существенном самосопряжены, все $\mathcal{P}(O)$ — Ор*-алгебры класса I, т.е. $\mathcal{P}(O)'_w$ — алгебры фон Неймана.) Далее, четвертое равенство получается, если учесть следующий прямо проверяемый факт. Пусть $\mathcal{A}$ — множество в существенном самосопряженных операторов, заданных на общей существенной области. Тогда

$$\mathcal{A}'_w = \mathcal{A}'_s = \mathcal{A}'_N.$$

Действительно, в силу этого равенства, если полевые операторы $A(f)$, $f \in S_R(\mathbb{R}^4)$, в существенном самосопряжены на $\mathcal{D}$, то

$$L(O)'_w = L(O)'_s = L(O)'_N,$$

что сразу влечет искомое (но, кстати говоря, еще не влечет равенства $\mathcal{P}(O)'_w = \mathcal{P}(O)'_s$).

В третьей формуле (8.3) неочевидно лишь последнее включение, которое вытекает из следующих простых соотношений для коммутанта фон Неймана произвольной Ор*-алгебры $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}'_N = \overline{\mathcal{A}}'_N = \overline{\mathcal{A}}'_s \cap (\overline{\mathcal{A}}'_s)^* \supset \mathcal{A}'_s \cap (\mathcal{A}'_s)^*. \quad (8.5)$$

Вывод этих соотношений полезно проделать в качестве упражнения. Помимо определений, в нем используются лишь такие свойства: если T — ограниченный оператор, A — замыкаемый оператор, то $TA \subset AT$ влечет $T\overline{A} \subset \overline{A}T$; если при этом A — элемент замкнутой Ор*-алгебры ($A \in \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$), а T — элемент ее сильного коммутанта, то верно и обратное; наконец, $(TA)^* = A^*T^*$, но включение $(AT)^* \supset T^*A^*$, вообще говоря, может не являться равенством. Из приведенных соотношений очевидно, что для самосопряженной Ор*-алгебры $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$, $\mathcal{B}'_w = \mathcal{B}'_s = \mathcal{B}'_N$ (еще один случай совпадения всех трех коммутантов), откуда вытекает четвертая из формул (8.3). Предпоследняя формула получается с учетом (8.4), последняя — с учетом очевидного следствия (8.4):

$$\mathcal{P}(O')'_w = L(O')'_w \supset L(O')'_N = F_9(O).$$

Отметим тут же еще одно общее свойство [HV1]: в типичных квантово-полевых ситуациях, когда алгебры $F_i(O)$ — факторы типа III и притом $F_i(O) \supset F_4(O)$, они не оставляют инвариантной области Гординга $\mathcal{D}$; это же верно и для глобальных алгебр F_i , если они являются алгебрами R-класса и $F_i \supset F_4$.

Далее будет видно, что хотя и не все введенные алгебры равно естественны и полезны, однако нельзя указать какую-либо одну из них, которая во всех отношениях обладала бы преимуществом перед остальными. В различных вопросах теории оказываются предпочтительны различные сети полевых алгебр. Понятно, скажем, что в простых моделях (например, для свободных и обобщенных свободных полей; см. § 9), где удастся доказать "хорошие" свойства полевых операторов, типа их самосопряженности в существенном на области Гординга, мы естественно приходим к алгебрам $F_2(O)$ и $F_3(O)$. Алгебры же $F_4(O)$ ввиду вышеприведенного равенства являются прямым обобщением $F_3(O)$ на случай произвольной вайтмановской теории. Алгебры $F_8(O)$ и $F_9(O)$, как мы увидим в п. 8.2, выделены в другом важном отношении: для них удастся, не налагая на теорию никаких дополнительных ограничений, доказать локальную коммута-

тивность. Для алгебр $F_{10}(D)$ имеет место цикличность вакуума, для алгебр $F_8(D)$ (при некотором допущении) — дуальность. Наконец, определенные соображения имеются и в пользу алгебры $F_1(O)$: как мы видели, это есть наименьшая алгебра фон Неймана, к которой присоединены все операторы $\overline{A(f)}$ и $A(f)^*$, $\text{supp } f \subset O$. Условие же, чтобы поля были присоединены к полевой алгебре фон Неймана, представляется весьма разумным требованием к выбору $F(O)$. Ряд других алгебр $F_i(O)$ и их коммутантов также оказываются "присоединяющими" алгебрами фон Неймана для различных множеств вайтмановских полей. Так, в силу того же основного факта, что наименьшая "присоединяющая" алгебра фон Неймана множества замкнутых операторов совпадает с коммутантом к коммутанту фон Неймана этого множества, имеем: $F_7(O)$ — минимальная алгебра фон Неймана, к которой присоединены все замыкания и сопряженные для операторов из $\mathcal{P}(O)$; $F_9(O)'$ — аналогичный объект для операторов из $L(O')$. Алгебру $F_8(O)$ также можно связать со свойствами присоединенности полевых операторов [BW2, лемма 10].

Разумеется, главным требованием к любой из сетей $\{F_i(O)\}$ является выполнение аксиом релятивистской квантовой теории. Непосредственно из определений ясно, что все введенные нами сети удовлетворяют аксиоме изотонии: при $O_1 \subset O_2$

$$F_i(O_1) \subset F_i(O_2), \quad i = 1, \dots, 10.$$

Для проверки выполнения релятивистской ковариантности отметим следующий факт. Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ — множество замыкаемых операторов с общей плотной областью $\mathcal{D}$ такой, что $A\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $A^*\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ для всех A из $\mathcal{A}$, и пусть U — унитарный или антиунитарный оператор такой, что $U\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $U^*\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Тогда

$$(UAU^*)'_c = UA'_c U^*, \quad \text{alg}(UAU^*)'_w = U_{\text{alg}} A'_w U^*, \quad (8.6)$$

где индекс c обозначает любой из трех коммутантов, сильный, слабый или фон Неймана. Данные формулы получаются простой проверкой; в случае коммутанта фон Неймана надо учесть, что

$$\overline{UAU^*} = \overline{UA}U^*, \quad (UAU^*)^* = UA^*U^*.$$

Как легко видеть, формулы (8.6) обеспечивают релятивистскую ковариантность всех сетей $\{F_i(O)\}$, за исключением $\{F_2(O)\}$ (очевидно, что в случае существования самосопряженного расширения вайтмановского поля релятивистская ковариантность такого расширения, вообще говоря, не обеспечена и должна требоваться особо). Таким образом, если $U(a, \Lambda)$ — унитарное представление группы Пуанкаре, осуществляющее релятивистскую ковариантность исходной вайтмановской теории, то

$$U(a, \Lambda) F_i(O) U(a, \Lambda)^{-1} = F_i(\Lambda^{-1}(O - a)), \quad i = 1, \dots, 10, \quad i \neq 2.$$

Отсюда также ясно, что каждая из указанных сетей удовлетворяет и аксиоме спектральности.

Иная ситуация с аксиомой слабой аддитивности. Как мы видели в § 7, сеть полевых Ор*-алгебр $\mathcal{P}(O)$ удовлетворяет сильной аддитивности:

$$\mathcal{P}(O_1 \cup O_2) = \mathcal{P}(O_1) \vee \mathcal{P}(O_2).$$

Однако определения сетей $\{F_i(O)\}$ таковы, что для них пока не удалось проверить сохранение этого свойства либо доказать слабую аддитивность.

С другой стороны, ни для одной из этих сетей не имеется и негативного результата, доказательства нарушения слабой аддитивности. Поэтому вопрос о выполнении данной аксиомы для полевых алгебр фон Неймана остается открытым. Отсюда сразу вытекает важное следствие: мы не можем утверждать, что в формализме полевых W^* -алгебр выполнены предположения теоремы Рее-Шлидера — и, хотя в теории имеется вакуумный вектор Ω , циклический для всех алгебр $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}(O)$, мы, тем не менее, не можем вывести цикличности Ω для $F_i(O)$, как и вообще существования циклических векторов для этих алгебр. (Конечно, для такого вывода, наряду с теоремой Рее-Шлидера, нам еще требовалось бы доказать цикличность Ω для глобальных W^* -алгебр F_i .)

Для сети $\{F_4(O)\}$, помимо теоремы Рее-Шлидера, существует и другой путь доказательства цикличности Ω : можно использовать формулы (7.9), согласно которым

$$\overline{F_4(O)\Omega} \supset \overline{\mathcal{P}(O)\Omega} = \mathcal{H}, \quad (8.7)$$

если только $\mathcal{P}(O)'_w$ есть алгебра фон Неймана. В случае выполнения (8.7) Ω будет циклическим и для всех $F_i(O)$, $i = 1, 3, 5 - 7, 10$. Однако для свойства: $\mathcal{P}(O)'_w$ — алгебра фон Неймана, также неизвестно прямых средств проверки. Поэтому в тех вопросах теории, для которых требуется цикличность вакуума для $F_i(O)$ или, более общим образом, существование циклических векторов у этих алгебр, такие свойства приходится налагать в качестве дополнительного условия.

Исключение, однако, составляют алгебры $F_2(O)$ и $F_{10}(O)$: как легко проверить, все векторы, циклические для $\mathcal{P}(O)$, остаются циклическими для указанных алгебр (а также ввиду (8.3) и для $F_1(O)$, $F_3(O)$, $F_7(O)$). Именно, справедлива

Л е м м а 8.1. *Все аналитические по энергии векторы, циклические для $\mathcal{P}$, являются тотализаторами для алгебр $F_i(O)$, $i = 1, 2, 3, 7, 10$, и сепараторами для алгебр $F_k(O)$, $k = 8, 9$, при любой открытой непустой области $O \subset M$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала алгебры $F_{10}(O)$. Справедливо простое свойство: для всякой O^* -алгебры $\mathcal{A}$ любой циклический вектор χ есть сепаратор слабого коммутанта $\mathcal{A}'_w$. (В самом деле, так как для всех $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ и $T \in \mathcal{A}'_w$

$$(A_1\chi, TA_2\chi) = (A_2^*A_1\chi, T\chi),$$

то в силу плотности множеств $\{A_i\chi, A_i \in \mathcal{A}\}$, $i = 1, 2$, из $T\chi = 0$ следует и $T = 0$.) Поэтому благодаря теореме Рее-Шлидера всякий вектор χ , аналитический по энергии и циклический для $\mathcal{P}$, является сепаратором для множества $\mathcal{P}(O')'_w$. В силу включений

$$F_9(O) \subset F_8(O) \subset \mathcal{P}(O')'_w$$

χ есть сепаратор и для $F_{8,9}(O)$, а также, с учетом (8.3), тотализатор для $F_{10}(O')$. Поскольку здесь O может быть любой областью такой, что $O' \neq \emptyset$, имеем искомое утверждение.

Цикличность χ для алгебр $F_3(O)$ следует отсюда в силу формул (8.3); однако алгебры $F_2(O)$ должны рассматриваться особо. Итак, пусть сущест-

вует самосопряженное расширение вайтмановского поля $\tilde{A}(f) \supset A(f)$, $f \in S_R(\mathbf{R}^4)$, обладающее спектральным разложением

$$\tilde{A}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\tilde{E}(f, \lambda).$$

Для произвольного интервала $\Delta_\lambda = (-\lambda, \lambda) \subset \mathbf{R}$, произвольной области $O \subset M$ и любого набора основных функций $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\text{supp } f_i \subset O$, рассмотрим ограниченные операторы

$$A_i(\lambda) = \tilde{A}(f_i)\tilde{E}(f_i, \Delta_\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \mu d\tilde{E}(f_i, \mu) \in F_2(O).$$

Благодаря сильной сходимости спектрального разложения для всех $\Phi \in \mathcal{D}$ имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_i(\lambda)\Phi = \tilde{A}(f_i)\Phi = A(f_i)\Phi \in \overline{F_2(O)\Phi} \quad (8.8)$$

и, в частности,

$$\Phi_1 \equiv A(f_1)\chi \in \overline{F_2(O)\chi} \cap \mathcal{D},$$

где χ — любой аналитический по энергии и циклический для $\mathcal{P}$ вектор. Поэтому из (8.8) аналогично следует, с учетом ограниченности операторов из $F_2(O)$,

$$\begin{aligned} \Phi_2 &\equiv A(f_2)A(f_1)\chi = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_2(\lambda)\Phi_1 \in \overline{F_2(O)\Phi_1} \subset \overline{F_2(O)\chi} \cap \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Аналогично, для любого натурального n получим

$$A(f_n) \dots A(f_1)\chi \in \overline{F_2(O)\chi} \cap \mathcal{D},$$

что и дает искомое:

$$\overline{L\{A(f_n) \dots A(f_1)\chi\}} = \overline{\mathcal{P}(O)\chi} = \mathcal{H} \subset \overline{F_2(O)\chi}. \quad \square$$

Заметим также, что в силу обратной теоремы Рее–Шлидера (предложение 3.2) для релятивистски ковариантных сетей $\{F_i(O)\}$ свойство Рее–Шлидера $\overline{F_i(O)\chi} = \overline{F_i\chi}$ для всех аналитических по энергии векторов χ является и достаточным условием слабой аддитивности, так что, если это свойство как-то доказано или наложено постулативно для этих сетей, то для них выполняется и указанная аксиома. Отсюда, однако, еще нельзя заключить о выполнении этой аксиомы для сетей $F_i(O)$, $i = 1, 2, 3, 7, 10$, поскольку лемма 8.1 устанавливает свойство Рее–Шлидера только для тех аналитических по энергии векторов, которые лежат в $\mathcal{D}$ и, кроме того, являются циклическими для $\mathcal{P}$ (впрочем, согласно упоминавшемуся в § 7 результату Дрисслера и Саммерса [DrS2], в случае неприводимой вайтмановской теории множество всех таких векторов

плотно, и, возможно, этого уже окажется достаточно, чтобы обобщить предложение 3.2).

Однако главную проблему при построении формализма полевых алгебр фон Неймана составляет обеспечение их локальности. Как и в случае свойств аддитивности, наши определения сетей $\{F_i(O)\}$ не дают возможности непосредственно доказать их локальную коммутативность, исходя из локальной коммутативности сети $\{\mathcal{P}(O)\}$. Более того, простые соображения показывают, что, вообще говоря, локальность вайтмановских полей отнюдь не обязательно влечет локальность $\{F_i(O)\}$, и для достижения последней требуется налагать дополнительные условия. В самом деле, допустим, что полевые операторы $A(f)$ являются в существенном самосопряженными. В этом случае операторы $A(f)$ и $A(g)$ с $\text{supp} f = O_1 \times O_2 = \text{supp} g$ в существенном самосопряжены на общей существенной области $\mathcal{D}$; они сохраняют эту область и являются перестановочными на ней. Но, согласно известному примеру Нельсона [[РС, т. 1, с. 300]], два оператора, удовлетворяющие всему этому набору условий, еще могут иметь некоммутирующие ограниченные функции; и, стало быть, если эта возможность реализуется для какой-либо пары $A(f)$, $A(g)$, то алгебры $F_3(O_1)$ и $F_3(O_2)$ не будут коммутировать между собой, а в силу соотношений (8.3) локальность будет тогда нарушена также и для сетей $\{F_i(O)\}$, $i = 1, 4-7, 10$. В общем же случае, при отсутствии всяких условий на полевые операторы подобную утрату локальности при переходе от вайтмановских полей к полевым алгебрам фон Неймана тем более нельзя считать исключенной.

Итак, проблема локальности алгебр $F_i(O)$ ставится как проблема отыскания дополнительных условий на поле $A(f)$ или алгебры $\mathcal{P}(O)$, обеспечивающих указанную локальность. Интерес представляли бы, разумеется, все виды таких условий — необходимые, достаточные, необходимые и достаточные. Однако еще один пример из теории операторов [[РС, т. 1, с. 299]] говорит нам, что необходимых условий для нашей проблемы не существует: возможно, что два в существенном самосопряженных оператора имеют взаимно коммутирующие наборы ограниченных функций, но при этом они заданы на непересекающихся между собой существенных областях, и, следовательно, никакие свойства коммутативности, выражающиеся в терминах самих этих операторов, заведомо не имеют места (или, иначе говоря: существуют пары операторов A, B такие, что $\bar{A} = A^*$, $\bar{B} = B^*$, $[\exp(it\bar{A}), \exp(is\bar{B})] = 0$, но при этом $\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(BA) = \{0\}$). В результате задача сводится к отысканию достаточных условий. Таких условий было найдено несколько; помимо этого (что согласуется с нашим замечанием об отсутствии необходимых условий), удалось показать, что для сетей $\{F_8(O)\}$ и $\{F_9(O)\}$ локальность имеет место и без наложения на вайтмановскую теорию каких-либо дополнительных ограничений. В свете сказанного выше последний результат вовсе не означает, что все остальные сети оказываются ненужными, и условия их локальности не представляют интереса. Поэтому, прежде чем перейти к (довольно длительному и сложному) получению указанного результата для сетей $\{F_{8,9}(O)\}$, мы рассмотрим простейшее достаточное условие локальности алгебр $\{F(O)\}$, обнаруженное еще в 1964 г. Борхерсом и

Циммерманом [BZ], и затем неоднократно видоизменявшееся и усовершенствованное (см. например, [D-V; Б; Г]).

В своем первоначальном виде указанное условие формулировалось как "постулат аналитичности вакуума": циклический вакуумный вектор Ω является аналитическим вектором для каждого полевого оператора $A(f)$, $f \in S_R(\mathbb{R}^4)$. Из этого постулата при его добавлении к системе аксиом Вайтмана легко вытекает следующий результат [BZ, теорема 2]: для всякого оператора $A(f)$, $f = \bar{f}$, $\text{supp } f \subset O$, вместе с век-

тором Ω будут аналитическими и все векторы вида $\Phi = \prod_{i=1}^n A(g_i) \Omega$,

$\text{supp } g_i \subset O'$, $n = 1, 2, \dots$, а так как по теореме Рее—Шлидера, множество всех таких векторов тотально в $\mathcal{H}$, то отсюда в силу известной теоремы Нельсона следует, что $A(f)$ в существенном самосопряжен на области Гординга. Таким образом, для любой теории, удовлетворяющей постулату аналитичности вакуума, определена сеть $F_3(O)$. Локальность же этой сети еще должна доказываться особо (и мы должны предостеречь, что доказательство, данное в [BZ, теорема 3], содержит существенный пробел: там не учтено, что аналитические векторы оператора $A(f)$, вообще говоря, могут не быть аналитическими для его сужения $A(f)|_{\mathcal{D}'}$ на область $\mathcal{D}' = (A(g) - \lambda) \mathcal{P}(O_2) \Omega$, $\text{supp } f \subset O_2 \subset O'$, поскольку эта область неинвариантна относительно $A(f)$). Однако проблемы отдельного доказательства локальности не возникает, если вместо теоремы Нельсона воспользоваться теоремой Нуссбаума [Nu], которая включает в себя не только критерий самосопряженности оператора в существенном, но и условие коммутативности спектральных проекций двух операторов, удовлетворяющих данному критерию и коммутирующих между собой на общей существенной области. Такой путь, избегая доказательства локальности, дает вместе с тем и менее жесткое ее условие, чем постулат аналитичности вакуума, поскольку критерий Нуссбаума формулируется в терминах не аналитических, а квазианалитических векторов. В итоге в качестве усовершенствованной формы достаточного условия выступает следующий "постулат квазианалитичности вакуума"

циклический вакуумный вектор Ω является квазианалитическим вектором для каждого полевого оператора $A(f)$, $f \in S_R(\mathbb{R}^4)$, т. е. имеет место условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A(f)^n \Omega\|^{-1/n} = \infty.$$

В основе применения этого постулата, как мы уже сказали, находится

Т е о р е м а Н у с с б а у м а [Nu]. Пусть A и B — симметрические операторы, и $\mathcal{D}_q$ — множество всех общих квазианалитических векторов A и B , лежащих в области определения полиномиальной алгебры, натягиваемой на A и B . Пусть, далее, A и B , а также любые их степени коммутируют между собой на $\mathcal{D}_q$. Тогда, если область $\mathcal{D}_q$ плотна в $\mathcal{H}$, то A и B в существенном самосопряжены, и спектральные проекции их замыканий коммутируют между собой.

С помощью этой теоремы докажем теперь

Предложение 8.2 [D-V]. Пусть задана вайтмановская теория, удовлетворяющая постулату квазианалитичности вакуума. Тогда полевые операторы $A(f)$, $f \in S_R(\mathbb{R}^4)$, в существенном самосопряжены на области Гординга, и их ограниченные функции порождают локальную сеть $\{F_3(O)\}$.

Доказательство. Выберем произвольные области $O_1, O_2 \subset O'_1$, $O \subset (O_1 \cup O_2)'$. Тогда для основных функций $f_i \in S_R(\mathbb{R}^4)$, $\text{supp } f \subset O_i$, $i = 1, 2$, и $g_k \in S(\mathbb{R}^4)$, $\text{supp } g_k \subset O$, $k = 1, \dots, m$, и для любого натурального n имеем

$$\begin{aligned} & \|A(f_i)^n A(g_1) \dots A(g_m) \Omega\|^2 = \\ & = (A(g_1) \dots A(g_m) \Omega, A(f_i)^{2n} A(g_1) \dots A(g_m) \Omega) = \\ & = (A(g_m)^* \dots A(g_1)^* A(g_1) \dots A(g_m) \Omega, A(f_i)^{2n} \Omega) \leq \\ & \leq K \|A(f_i)^{2n} \Omega\|, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где

$$K = \|A(g_m)^* \dots A(g_1)^* A(g_1) \dots A(g_m) \Omega\|.$$

Тем самым и для любого $\Phi \in \mathcal{D}(O) \equiv \mathcal{P}(O) \Omega$

$$\|A(f_i)^n \Phi\|^2 \leq K(\Phi) \|A(f_i)^{2n} \Omega\|, \quad i = 1, 2,$$

откуда в силу квазианалитичности Ω получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A(f_i)^n \Phi\|^{-1/n} \geq C(\Phi) \sum_{n=1}^{\infty} \|A(f_i)^{2n} \Omega\|^{-1/2n} = \infty,$$

поскольку $u_n = \|A(f_i)^n \Omega\|^{1/n}$ есть возрастающая положительная последо-

вательность, и расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{-1}$ равносильна расходимости

$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}^{-1}$. Таким образом, область $\mathcal{D}(O)$, плотная в силу теоремы

Рее–Шлидера, состоит из общих квазианалитических векторов для $A(f_1)$ и $A(f_2)$, а в силу локальности вайтмановских полей эти операторы, а также любые их степени коммутируют на $\mathcal{D}(O)$. Поэтому все условия теоремы Нуссбаума выполнены. $\square$

Поскольку всякий аналитический вектор является и квазианалитическим, обратное же, вообще говоря, неверно, то квазианалитичность вакуума — менее ограничительное условие, нежели аналитичность. Тем не менее оба условия еще являются весьма жесткими и, как неоднократно отмечалось (см., например, [[БЛТ, приложение А]]), будучи выполнены для свободного и обобщенного свободного полей, они нарушаются для ряда моделей, представимых виновыми полиномами по свободным полям, таких, как модель A^3 .

Более совершенное и реалистическое условие было найдено Дрисслером и Фрелихом [DF]. Оно приспособлено к вайтмановской теории, полу-

чаемой по теореме реконструкции Остервальдера—Шрадера из некоторой последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций Швингера [[ЕКТП]] и потому имеет две формулировки: первоначальная из них налагается в рамках исходного формализма евклидовой теории как условие на обобщенные функции S_n ; в рамках же результирующей релятивистской теории эта первоначальная формулировка порождает некоторое условие на вайтмановское поле $A(f)$.

В первой, евклидовой формулировке, условие Дрисслера—Фрелиха носит в своей главной части такой же характер, как и условия аналитичности и квазианалитичности вакуума: это есть ограничение на рост последовательности $\{S_n\}$ с ростом порядка n корреляционной функции. Именно, требуется, чтобы по отношению к какой-либо непрерывной норме $\|\cdot\|_s$ на $S(\mathbb{R}^4)$ последовательность $\{S_n\}$ удовлетворяла условию

$$|S_n(f_1, \dots, f_n)| \leq (n!)^{1/2} \prod_{i=1}^n \|f_i\|_s \quad \forall f_1, \dots, f_n \in S(\mathbb{R}^4). \quad (8.9)$$

(Для сравнения укажем, что постулат аналитичности вакуума, как легко проверить [BZ], равносильен следующему условию:

$$|W_n(f, \dots, f)| = |(\Omega, A(f)^n \Omega)| \leq n! c(f)^n$$

для всех $f \in S(\mathbb{R}^4)$.) Однако при переходе к релятивистски инвариантной теории (8.9) порождает условие несколько иного рода. Его особенность в том, что оно эксплуатирует трансляционную ковариантность и спектральность теории, и соответственно в его формулировке участвует генератор $H = \hat{p}_0$ трансляций по времени, являющийся в силу спектральности положительным оператором. Условие требует, чтобы по отношению к какой-либо трансляционно инвариантной норме $|\cdot|$ на $S(\mathbb{R}^4)$ выполнялось следующее неравенство для квадратичных форм, отвечающих операторам $A(f)$, H : для всех $f \in S_R(\mathbb{R}^4)$ и всех Ψ из области квадратичной формы оператора H

$$|(\Psi, A(f)\Psi)| \leq |f|(\Psi, (H+I)\Psi). \quad (8.10)$$

Как и в случае постулатов аналитичности и квазианалитичности вакуума использование (8.10) в качестве достаточного условия существования и локальности сети $\{F(O)\}$ базируется на некоторой "коммутаторной теореме", устанавливающей достаточные условия существенной самосопряженности пары симметрических операторов и взаимной коммутативности их ограниченных функций. В связи с условием (8.10) Дрисслер и Фрелих выводят следующую коммутаторную теорему:

пусть H — положительный оператор, A, B — замкнутые симметрические операторы, слабо коммутирующие на некоторой существенной области $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ квадратичной формы оператора H^2 :

$$(A\Phi, B\Psi) = (B\Phi, A\Psi) \quad \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{D}_0,$$

и пусть существует константа K такая, что на некоторой существенной области $\mathcal{D}_1$ квадратичной формы H A и B как формы ограниче-

ны формой H в следующем смысле: для всех $\chi \in \mathcal{D}_1$

$$|(\chi, A\chi)| \leq K(\chi, (H+I)\chi), \quad |(\chi, B\chi)| \leq K(\chi, (H+I)\chi),$$

$$|(\chi, i[H, A]\chi)| \leq K(\chi, (H+I)\chi),$$

$$|(\chi, i[H, B]\chi)| \leq K(\chi, (H+I)\chi).$$

Тогда операторы A и B самосопряжены и их ограниченные функции коммутируют.

С помощью этой теоремы уже просто доказывается

Предложение 8.3 [DF]. Пусть задана вайтмановская теория, удовлетворяющая условию (8.10). Тогда полевые операторы $A(f)$, $f \in S_R(\mathbf{R}^4)$, в существенном самосопряжены на области Гординга, а также на каждой существенной области гамильтониана H , и их ограниченные функции порождают локальную сеть алгебр фон Неймана $F_3(O)$.

Доказательство. Наглядно видно, что условие (8.10) согласовано с требованиями коммутаторной теоремы. Полагая в этой теореме $A = \overline{A(f)}$, $B = \overline{A(g)}$, $f, g \in S_R(\mathbf{R}^4)$, $\text{supp } f \times \text{supp } g$, мы видим, что локальность вайтмановских полей обеспечивает выполнение первого условия теоремы, а (8.10) — выполнение второго условия; при этом можно выбрать $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$ (область Гординга является существенной как для оператора H , так и для его формы). Учитывая, что $i[H, A(f)] = -A(\partial f / \partial t)$, мы замечаем, далее, что вместе с (8.10) всегда будет выполняться аналогичное условие, получаемое заменой $A(f)$ на $i[H, A(f)]$ в левой части (8.10), и $|f|$ на $|\partial f / \partial t|$ — в правой части. Это означает выполнение и последнего из условий коммутаторной теоремы, так что поля в существенном самосопряжены на области Гординга, и их ограниченные функции локально коммутируют. Очевидно, что равным образом все условия коммутаторной теоремы будут выполнены и для замыкания $A(f)$ не с $\mathcal{D}$, но с любой существенной области $\mathcal{D}_1$ формы H , $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$. $\square$

Анализ евклидовой версии (8.9) условия Дрисслера—Фрелиха показывает, что для широкого класса моделей евклидовой и конструктивной теории, обладающих свойствами наличия массовой щели и конечной перенормировки поля (в частности, для моделей φ_d^4 в различной размерности d), типична следующая ситуация: если некоторая модель из данного класса корректно определена, то она удовлетворяет и условиям (8.9), (8.10). Однако констатируя, что условие Дрисслера—Фрелиха является не столь жестким и лучше приспособленным для проверки в реальных моделях, чем постулаты аналитичности и квазианалитичности вакуума, мы в то же время еще не можем утверждать, что это условие хотя бы в каком-либо смысле оптимально; равным образом, оно не дает средств доказать, помимо существования и локальности сети $\{F(O)\}$, другие желательные свойства этой сети, такие, как условия дуальности. Поэтому, вообще говоря, оно еще не должно рассматриваться как окончательное решение проблемы.

8.2. Алгебры клиновидных областей: формализм Бизоньяно—Вичмана. Дальнейшего продвижения в проблеме построения и исследования алгебр $F(O)$ позволяет достичь анализ одного специального класса областей —

уже неоднократно рассматривавшихся клиньев W_R, W_L . Учитывая специфические свойства этих областей, оказывается возможным получить весьма детальную информацию об алгебрах $F(W_i)$, $i = R, L$: не только указать для них новые условия локальности, но, более того, показать, что для алгебр $F_8(W_i)$ и $F_9(W_i)$ локальность выполняется и без всяких дополнительных условий, а также вывести ряд глубоких структурных свойств этих алгебр — прежде всего, условие дуальности и представления для модулярной инволюции и модулярных автоморфизмов через операторы пространственно-временных преобразований. Часть установленных фактов затем удастся обобщить и для алгебр других областей, в частности двойных конусов.

Вывод всех этих результатов требует детального рассмотрения групповой структуры и аналитических свойств физических объектов, связанных с областями W_i , и составляет предмет особого формализма, развитого в работах Бизоньяно и Вичмана [BW 1, 2]. Некоторые элементы этого формализма уже бегло вводились в § 3 (см. предложение 3.24); сейчас мы напомним и дополним их.

В основе всего лежат особенности геометрии пары областей W_R, W_L . Как уже отмечалось, эти области служат пространственноподобным дополнением одна другой:

$$W'_R = W_L, \quad W'_L = W_R$$

и существуют три подгруппы преобразований Пуанкаре, которые оставляют обе эти области инвариантными:

- 1) трансляции вдоль осей x^2 и x^3 ;
- 2) вращения $R(e^1, \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, в плоскости (x^2, x^3) ;
- 3) лоренцевы или гиперболические вращения $\Lambda(e^1, t)$, $t \in \mathbf{R}$, в плоскости (x^0, x^1) .

Имеется также ряд преобразований, отображающих W_R на W_L ; в частности,

$$R(e^2, \pi)(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, -x^1, x^2, -x^3),$$

$$R(e^3, \pi)(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, -x^1, -x^2, x^3),$$

$$G(x^0, x^1, x^2, x^3) = (-x^0, -x^1, x^2, x^3).$$

Первые два из этих преобразований принадлежат $\mathcal{P}_+^\uparrow$; в отличие от них G есть дискретное преобразование (отражение в плоскости (x^0, x^1)), которое можно считать принадлежащим комплексификации подгруппы $\Lambda(e^1, t)$: поскольку

$$\Lambda(e^1, t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & & \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

очевидно, $G = \Lambda(e^1, i\pi)$.

В силу релятивистской ковариантности вайтмановской теории подгруппы 1–3 представляются в $\mathcal{H}$ подгруппами унитарной группы $U(\mathcal{P}_+^\uparrow)$ (уни-

тарную подгруппу $U(0, \Lambda(e^1, t))$ далее будем для краткости обозначать $V(t)$, и все эти подгруппы осуществляют автоморфизмы как Op^* -алгебр $\mathcal{P}(W_i)$, так и алгебр фон Неймана $F(W_i)$, $k = 1, \dots, 10$. Аналогично, преобразования $R(e^2, \pi)$, $R(e^3, \pi)$ также представляются унитарными операторами в $\mathcal{H}$, и эти операторы осуществляют пространственные изоморфизмы соответствующих алгебр, как Op^* , так и W^* :

$$U(0, R(e^i, \pi))\mathcal{P}(W_R)U(0, R(e^i, \pi))^{-1} = \mathcal{P}(W_L),$$

$$U(0, R(e^i, \pi))F_k(W_R)U(0, R(e^i, \pi))^{-1} = \\ = F_k(W_L), \quad i = 2, 3, \quad k = 1, \dots, 10.$$

Однако ковариантность этих алгебр относительно отражения G , т.е. существование в $\mathcal{H}$ антиунитарного оператора $U(G)$ такого, что

$$U(G)F(W_R)U(G) = F(W_L),$$

уже не входит в аксиому релятивистской ковариантности. Также не входит в аксиому релятивистской ковариантности, но, тем не менее, в силу CPT -теоремы Паули–Людерса–Йоста имеет место существование CPT -оператора θ , обеспечивающего ковариантность полевой системы относительно преобразования CPT . θ есть антиунитарный оператор со свойствами:

$$\theta A(f)\theta = A^+(f_{PT}), \quad f_{PT}(x) = f(-x), \quad \theta \Omega = \Omega, \\ \theta \mathcal{P}(O)\theta = \mathcal{P}(-O); \quad \theta U(a, \Lambda)\theta = U(-a, \Lambda), \quad (8.11)$$

которые в силу формул (8.6) влекут и CPT -ковариантность сетей $\{F_k(O)\}$:

$$\theta F_k(O)\theta = F_k(-O), \quad k = 1, \dots, 10. \quad (8.12)$$

Существование оператора θ со свойствами (8.11) играет важнейшую роль при изучении алгебр $F(W_i)$. Как мы видели в § 3, в общей локальной квантовой теории CPT -теорема может и не иметь места. Именно за счет этого результаты о свойствах полевых алгебр $F(W_i)$ оказываются гораздо полнее, чем результаты предложения 3.24 о свойствах алгебр наблюдаемых $R(W_i)$ в теории Хаага–Араки. Эти последние результаты оставались неполными в двух отношениях: 1) выполнение условия (3.27) не было доказано, так что вывод о том, что $V(t)$ — модулярная группа $R(W_R)$, базировался не только на аксиомах Хаага–Араки, но и на этом дополнительном условии; 2) для модулярной инволюции J , в отличие от модулярных автоморфизмов, никакой физико-геометрической интерпретации найдено не было. Мы увидим, что в полевой теории оба эти недостатка удастся восполнить.

Соотношение $G = \Lambda(e^1, i\pi)$, а также результаты предложения 3.24 вызывают гипотезу, что преобразования, переводящие алгебры области W_R в алгебры области W_L , могут быть связаны с комплексным продолжением унитарной группы $V(t)$. Как хорошо известно [[ХФ]], такое продолжение $V(t) \rightarrow V(t + i\lambda)$ корректно определено для любых $\tau = t + i\lambda \in \mathbb{C}$, и операторы $V(\tau)$ с $\text{Im } \tau \neq 0$ являются неограниченными замкнутыми операторами, области которых нетрудно охарактеризовать с помощью функционального операторного исчисления. Пусть K — самосопряженный генератор группы $V(t)$ (т.е. $V(t) = \exp[-itK]$), $E(K, s)$ — его спектральная мера.

Тогда для любой функции $c(s)$ с компактным носителем на вещественной оси существует ограниченный оператор

$$c(K) = \int_{-\infty}^{\infty} c(s) dE(K, s) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \tilde{c}(t) dt$$

(где $\tilde{c}(t)$ — фурье-образ $c(s)$), а так как для любого $\tau \in \mathbb{C}$ функция $\exp(-i\tau s) c(s)$ также лежит в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, то существует и ограниченный оператор

$$V(\tau)c(K) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau s} c(s) dE(K, s),$$

зависящий от τ как целая функция. Тем самым область любого оператора $V(\tau)$ включает линейал $L\{c(K)\mathcal{H} \mid c(s) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$. Поскольку в пространстве $Z(\mathbb{R})$ фурье-образов функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ существуют последовательности, сходящиеся к дельта-функции, то этот линейал плотен в $\mathcal{H}$; более того, для любого плотного линейала Q плотным будет и линейал

$$\mathcal{D}_c = L\{c(K)Q \mid c(s) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\},$$

также входящий в область любого $V(\tau)$. Можно проверить, что $\mathcal{D}_c$ — существенная область для $V(\tau)$, и он определен на ней соотношением

$$V(\tau)\chi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau s} c(s) dE(K, s)\xi \quad \forall \chi = c(K)\xi, \xi \in Q. \quad (8.13)$$

Очевидно, что замыкание $V(\tau)$ с области $\mathcal{D}_c$ означает расширение класса функций $c(s)$ за счет таких функций, которые не лежат в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, но еще обеспечивают сходимость интеграла в (8.13). Отсюда следует, что область $V(\tau)$ зависит лишь от $\operatorname{Im} \tau = \lambda$, причем, обозначая $\mathcal{D}(V(\tau)) \equiv \mathcal{D}(\lambda)$, имеем

$$\mathcal{D}(\lambda_1) \subset \mathcal{D}(\lambda_2) \quad \text{при} \quad 0 \leq \lambda_2 / \lambda_1 \leq 1, \quad (8.14)$$

и область $\mathcal{D}(\lambda_1)$ существенна для всех $V(\tau)$ с $0 \leq (\operatorname{Im} \tau) / \lambda_1 \leq 1$. Если $\Phi \in \mathcal{D}(\lambda_1)$, то векторнозначная функция $V(\tau)\Phi$ аналитична в открытой полосе $0 < (\operatorname{Im} \tau) / \lambda_1 < 1$ и непрерывна на ее границе. Наконец, благодаря существенности $\mathcal{D}_c$ для $V(\tau)$ из (8.13) имеем

$$V(\tau)^* = V(-\bar{\tau}),$$

так что все операторы $V(i\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, самосопряжены. Из них на свойствах оператора $V(i\pi)$ надо остановиться детальней: по предварительным соображениям (ср., например, (3.27)) именно он должен переводить объекты, принадлежащие области W_R , в объекты, принадлежащие W_L . Введем семейство ограниченных открытых подобластей $O_n \subset W_R$, $n = 1, 2, \dots$, определив их следующим образом. Пусть O_1 — произвольное непустое открытое подмножество W_R , и вектор $x_0 \in W_R$ таков, что $(x - x_0) \in W_L$ для всех $x \in \bar{O}_1$. Тогда для любого целого $n > 1$ положим

$$O_n = \{x \in M \mid x = y + (n-1)x_0, y \in O_1\}.$$

Легко проверить, что все O_n лежат в W_R и являются попарно пространственноподобными. Используя это семейство, рассмотрим действие $V(i\pi)$ на вайтмановские поля в области W_R .

Л е м м а 8.4. Пусть задана вайтмановская теория с циклическим вакуумом Ω и областью Гординга $\mathcal{D}$. Тогда для любого набора основных функций $f_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, таких, что $\text{supp} f_k \subset O_n$, и любой функции $c(s) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеет место

$$V(i\pi)c(K)A(f_1) \dots A(f_n)\Omega = c(K)A(f_1^j) \dots A(f_n^j)\Omega, \quad (8.15)$$

где $f_k^j(x) = f_k(Gx)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем доказывать (8.15) с помощью цепочки равенств. Сначала докажем, что

$$\begin{aligned} & V(i\pi/2)c(K)A(f_1) \dots A(f_n)\Omega = \\ & = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +0} V(i\pi/2)c(K)T(it e^0)A(f_1) \dots T(it e^0)A(f_n)\Omega, \end{aligned} \quad (8.16)$$

где $e^0 = (1, 0, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Достаточно показать, что векторнозначная функция в правой части сильно непрерывна по t при $t \geq 0$; для этой цели преобразуем ее с помощью следующего представления:

$$\begin{aligned} & T(z_1)A(f_1) \dots T(z_n)A(f_n)\Omega = \\ & = \int \prod_{k=1}^n d^4 x_k A(x_1) \dots A(x_n) f(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_n)\Omega, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где

$$\begin{aligned} & (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{J}_n^+ = \\ & = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{4n} \mid \text{Im } z_i \in V^+, \quad i = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

а основная функция f есть фурье-образ по переменным $p_1, \dots, p_n$ функции

$$\tilde{f}(p_1, \dots, p_n; z_1, \dots, z_n) = \prod_{k=1}^n \tilde{f}_k(p_k) E\left(\sum_{r=k}^n p_r; z_k\right) \quad (8.18)$$

и функция E задается формулой

$$E(p; z) = u_0(p^2)u_0((p^2)^2)e^{ipz}, \quad u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad u_0(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 0, \\ 0, & s \leq -1. \end{cases} \quad (8.19)$$

Представление (8.17) можно получить с помощью индукции по n из стандартных формул (см., например, [И, гл. 4]), выражающих трансляционную ковариантность вайтмановской теории в комплексной области: при $z \in \overline{\mathcal{J}}^+ = \mathbb{R}^4 + i\overline{V}^+$

$$T(z)A(f_1) \dots A(f_n)\Omega = \int \prod_{k=1}^n d^4 x_k A(x_1) \dots A(x_n) f(x_1, \dots, x_n; z)\Omega,$$

где f есть фурье-образ по $p_1, \dots, p_n$ функции, которая равна

$$\tilde{f}(p_1, \dots, p_n; z) = \tilde{f}_1(p_1) \dots \tilde{f}_n(p_n) e^{iz \sum_{r=1}^n p_r}$$

при

$$(p_1, \dots, p_n) \in K_n \equiv \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{4n} \left| \sum_{r=1}^n p_r \in \overline{V^+}, k=1, \dots, n \right. \right\}.$$

Из (8.18), (8.19) видно, что $\tilde{f}(p_1, \dots, p_n; z_1, \dots, z_n)$ непрерывна по $z_1, \dots, z_n$ на $\overline{\mathcal{T}_n^+}$ (как функция со значениями в $S(\mathbb{R}^{4n})$), а отсюда и $f_1(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_n)$ непрерывна также. Наконец, векторнозначная обобщенная функция умеренного роста в правой части (8.17) непрерывна по основной функции f , так что правая часть (8.17) сильно непрерывна по $z_1, \dots, z_n$ на $\overline{\mathcal{T}_n^+}$ и, следовательно, с учетом ограниченности оператора $V(i\pi/2)c(K)$, функция в правой части (8.16) сильно непрерывна по t при $t \geq 0$ ($ite^0 \in \overline{\mathcal{T}^+}$ при $t \geq 0$).

Очередное равенство

$$\begin{aligned} & s\text{-}\lim_{t \rightarrow +0} V(i\pi/2)c(K)T(ite^0)A(f_1) \dots T(ite^0)A(f_n)\Omega = \\ & = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +0} V(i\pi/2)c(K) \int \prod_{k=1}^n d^4x_k f_1(x_1) \dots f_n(x_n) \times \\ & \times A(ite^0 + x_1)A(ite^0 + x_2 - x_1) \dots A(ite^0 + x_n - x_{n-1})\Omega \end{aligned} \quad (8.20)$$

является простым применением операции свертки для обобщенных функций умеренного роста, и мы можем сразу переходить к доказательству следующего за ним равенства:

$$\begin{aligned} & s\text{-}\lim_{t \rightarrow +0} V(i\pi/2)c(K) \int \prod_{k=1}^n d^4x_k f_1(x_1) \dots f_n(x_n) A(ite^0 + x_1) \times \\ & \times A(ite^0 + x_2 - x_1) \dots A(ite^0 + x_n - x_{n-1})\Omega = \\ & = \int \prod_{k=1}^n d^4x_k f_1(x_1) \dots f_n(x_n) s\text{-}\lim_{t \rightarrow +0} V(i\pi/2)c(K)A(ite^0 + x_1) \times \\ & \times A(ite^0 + x_2 - x_1) \dots A(ite^0 + x_n - x_{n-1})\Omega. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь перенос оператора $V(i\pi/2)c(K)$ допустим благодаря его ограниченности. Допустимость же перестановки интегрирования по x_k и сильного предела по t установим с помощью следующего представления: при $x_k \in W_R$, $k=1, \dots, n$, и $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & s\text{-}\lim_{t \rightarrow +0} V(i\pi/2)A(x_1 + ite^0) \dots A(x_n + ite^0)\Omega = \\ & = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +0} V(-i\pi/2)A(Gx_1 + ite^0) \dots A(Gx_n + ite^0)\Omega = A(z_1) \dots A(z_n)\Omega, \end{aligned} \quad (8.22)$$

где $z_k = (ix_k^1, ix_k^0; x_k^2, x_k^3)$, $k=1, \dots, n$.

Для вывода (8.22) убедимся сначала, что для $z_1, \dots, z_n$ ($z_j = x_j + iy_j$, $j=1, \dots, n$) таких, что $y_k^2 = y_k^3 = 0$, $y_k^0 > |y_k^1|$, $k=1, \dots, n$, вектор $A(z_1), \dots, A(z_n)\Omega$ при $x_1, \dots, x_n \in W_R$ лежит в области оператора $V(i\pi/2)$, а при $x_1, \dots, x_n \in W_L$ — в области $V(-i\pi/2)$; при этом для всех $\lambda \in [0, \pi/2]$ и $x_1, \dots, x_n \in W_R$, а также для всех $\lambda \in [-\pi/2, 0]$ и $x_1, \dots, x_n \in W_L$

$$V(i\lambda)A(z_1) \dots A(z_n)\Omega = A(z_1(i\lambda)) \dots A(z_n(i\lambda))\Omega, \quad (8.23)$$

где $z_k(\tau) = \Lambda(e^1, \tau)z_k$. Способ доказательства (8.23) стандартный: нам достаточно показать, что для всех χ из какой-либо существенной области оператора $V(i\lambda)^*$ имеет место

$$(V(i\lambda)^*\chi, A(z_1) \dots A(z_n)\Omega) = (\chi, A(z_1(i\lambda)) \dots A(z_n(i\lambda))\Omega). \quad (8.24)$$

Выберем в качестве такой области введенную выше область $L\{c(K)\mathcal{H} \mid c(s) \in \mathcal{D}(R)\}$; тогда левая часть (8.24) будет целой аналитической функцией λ . Явным вычислением легко проверяется, что для рассматриваемых в (8.23) точек $(z_1, \dots, z_n)$ при $x_1, \dots, x_n \in W_R$ имеет место $(z_1(i\lambda), \dots, z_n(i\lambda)) \in \mathcal{T}_n^+$ для всех $\lambda \in [0, \pi/2]$, и, следовательно, правая часть (8.24), в соответствии с известными аналитическими свойствами вайтмановских полей, есть также аналитическая функция λ в области, включающей (поскольку $\mathcal{T}_n^+$ — открытое множество) некоторую открытую окрестность $\mathcal{N}$ сегмента $[0, \pi/2]$. Поскольку же обе функции совпадают на некоторой вещественной окрестности $\lambda = 0$, то они совпадают и на всей окрестности $\mathcal{N}$, откуда следует выполнение (8.24), а тем самым и (8.23). Утверждения, касающиеся W_L , доказываются идентично, с учетом того, что при $x_1, \dots, x_n \in W_L$ имеет место $(z_1(i\lambda), \dots, z_n(i\lambda)) \in \mathcal{T}_n^+$ для всех $\lambda \in [-\pi/2, 0]$.

Возвращаясь к доказательству (8.22), из (8.23) при $x_1, \dots, x_n \in W_R$ и $t > 0$ имеем

$$V(i\pi/2) A(x_1 + ite^0) \dots A(x_n + ite^0) \Omega = A(z'_1) \dots A(z'_n) \Omega, \quad (8.25)$$

где $z'_k = z'_k(t) = z_k - (0, t, 0, 0)$, $k = 1, \dots, n$, и z_k — такие, как в (8.22). Поскольку при $x_1, \dots, x_n \in W_R$ $Gx_1, \dots, Gx_n \in W_L$, то (8.23) при $x_1, \dots, x_n \in W_R$ и $t < 0$ также дает

$$V(-i\pi/2) A(Gx_1 + ite^0) \dots A(Gx_n + ite^0) \Omega = A(z''_1) \dots A(z''_n) \Omega, \quad (8.26)$$

где $z''_k = z''_k(t) = z_k + (0, t, 0, 0)$, $k = 1, \dots, n$. Согласно известным свойствам аналитичности обобщенных функций вайтмановской теории [[Й]], векторнозначные функции в правой части (8.25) и (8.26) аналитичны по своим аргументам в открытой трубе $\mathcal{T}_n^+$ и сильно непрерывны в замкнутой трубе $\overline{\mathcal{T}_n^+}$ (эти свойства несложно выводятся с помощью таких же рассуждений, которые использовались выше при выводе формул (8.16) и (8.17)). Таким образом, для функций в правой части (8.25) и (8.26) существуют сильные пределы при $t \rightarrow +0$, взятие которых дает нам оба равенства (8.22).

В свою очередь из (8.22) легко вытекает (8.21): благодаря тому, что в (8.21) $\text{supp} f_k \subset O_k \subset W_R$, равенства (8.22) применимы к подынтегральной функции в (8.21) и дают, что для нее существует сильный предел при $t \rightarrow +0$, достигаемый равномерно по $x_1, \dots, x_n$. С другой стороны, сходимости интеграла в левой части (8.21) равномерна по t ; в итоге перестановка предела $t \rightarrow +0$ и интегрирования по $x_1, \dots, x_n$ в (8.21) допустима.

Теперь уже нетрудно получить всю остающуюся часть нужной для нас цепочки равенств:

$$\begin{aligned} & \int \prod_{k=1}^n d^4 x_k f_1(x_1) \dots f_n(x_n) \quad s\text{-}\lim_{t \rightarrow +0} V(i\pi/2) c(K) A(ite^0 + x_1) \times \\ & \times A(ite^0 + x_2 - x_1) \dots A(ite^0 + x_n - x_{n-1}) \Omega = \\ & = \int \prod_{k=1}^n d^4 x_k f_1^j(x_1) \dots f_n^j(x_n) \quad s\text{-}\lim_{t \rightarrow +0} V(-i\pi/2) c(K) A(ite^0 + x_1) \times \\ & \times A(ite^0 + x_2 - x_1) \dots A(ite^0 + x_n - x_{n-1}) \Omega = \\ & = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +0} V(-i\pi/2) c(K) T(ite^0) A(f_1^j) T(ite^0) \dots \\ & \dots T(ite^0) A(f_n^j) \Omega = V(-i\pi/2) c(K) A(f_1^j) \dots A(f_n^j) \Omega. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Здесь первое равенство следует сразу из (8.22) при замене переменных интегрирования $x_k \rightarrow Gx_k$. Вывод второго равенства: в силу тех же соображений, что и при выводе (8.21), мы можем вновь переставить во втором члене в (8.27) порядок интегрирования по $x_1, \dots, x_n$ и предельного перехода $t \rightarrow +0$, и вынести из-под интеграла ограниченный оператор $V(-i\pi/2) c(K)$, после чего применение равенства, аналогичного (8.20), дает третий член в (8.27). Наконец, третье равенство полностью аналогично уже доказанному равенству (8.26).

В итоге вся цепочка равенств (8.16), (8.20), (8.21) и (8.27) дает

$$V(i\pi/2) c(K) A(f_1) \dots A(f_n) \Omega = V(-i\pi/2) c(K) A(f_1^j) \dots A(f_n^j) \Omega.$$

Поскольку операторы $V(\tau)$ образуют представление аддитивной группы $\mathbb{C}$, и $c(K) \mathcal{H} \subset \mathcal{D}(V(\tau)) \quad \forall \tau \in \mathbb{C}$, то к этому равенству можно применить оператор $V(i\pi/2)$, и это дает искомое равенство (8.15). $\square$

Как подсказывают результаты § 3, одной только группы $V(t)$ и ее комплексного продолжения еще недостаточно для полного описания модулярной структуры алгебр $F(W_i)$. Если мы даже сумеем доказать выполнение условия (3.27), то получим лишь тот вывод, что $V(t)$ — модулярная группа для $F(W_R)$, а $V(-t)$ — для $F(W_L)$. Модулярная же инволюция Томиты — второй фундаментальный объект модулярной теории — останется еще непостроенной (или, точнее, несвязанной с физическими свойствами и геометрической структурой теории); и очевидно, что она, будучи антиунитарным оператором, не принадлежит к числу ни операторов $V(t)$, ни их комплексных продолжений $V(\tau)$. Таким образом, для полного описания модулярной структуры алгебр $F(W_i)$ необходимо ввести в рассмотрение еще некоторый объект, не сводящийся к группам $V(t)$ и $V(\tau)$.

У нас уже имеется достаточно наводящих соображений, чтобы определить основные свойства, требующиеся от такого объекта, и сделать понятным тот его выбор, который совершается в формализме Бизоньяно — Вичмана. В самом деле, согласно предложению 3.24, условие (3.27) одновременно обеспечивает как совпадение группы $V(t)$ с модулярной группой $F(W_R)$, так и выполнение условия дуальности для этой пары алгебр, $F(W_R)' = F(W_L)$. Это означает, что модулярная инволюция J должна быть антиунитарным оператором, переводящим $F(W_R)$ в $F(W_L)$. Очевидно, что в качестве такой инволюции не могут служить унитарные операторы $U(0, R(e^2, \pi))$, $U(0, R(e^3, \pi))$. Поэтому по своему геометрическому содержанию инволюция J должна быть связана не с преобразованиями $R(e^2, \pi)$, $R(e^3, \pi) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$, а с отображением G , инверсией в плоскости (x^0, x^1) . В теории Хаага—Араки может и не существовать операторов, реализующих это преобразование (так что делается понятным, отчего в § 3 мы не продвинулись до построения модулярной инволюции), — однако в вайтмановской теории благодаря CPT -теореме они всегда присутствуют. В самом деле, действие антиунитарного CPT -оператора θ включает в себя полную инверсию PT , а G можно представить как композицию PT и инверсии в плоскости (x^2, x^3) , которая в свою очередь может рассматриваться как евклидово вращение $R(e^1, \pi)$ на угол π вокруг оси x^1 . Отсюда приходим к выводу: следует ожидать, что модулярной инволюцией для алгебр $F(W_i)$ должен служить оператор

$$J = U(0, R(e^1, \pi))\theta. \quad (8.28)$$

Сейчас мы увидим, что этот предварительный вывод оказывается верным.

Рассмотрим основные свойства оператора J . С учетом формул (8.11), легко получаем

$$J^2 = I, J\Omega = \Omega, JU(a, \Lambda)J = U(Ga, G\Lambda G). \quad (8.29)$$

В частности, при $a = 0$, $\Lambda = \Lambda(e^1, t)$ имеем

$$JV(t)J = V(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (8.30)$$

откуда благодаря антиунитарности J получаем и поведение J по отношению к генератору K и комплексификации $V(\tau)$ группы $V(t)$:

$$\begin{aligned} J\mathcal{D}(K) &= \mathcal{D}(K), \quad JKJ = -K, \quad J\mathcal{D}(\lambda) = \mathcal{D}(-\lambda), \\ JV(\tau)J &= V(\bar{\tau}). \end{aligned} \quad (8.31)$$

Эти свойства J позволяют получить усиление леммы 8.4, придав (8.15) форму, более близкую к условию (3.27).

Л е м м а 8.5. Пусть $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ — тот же набор подобластей W_R , что и в лемме 8.4, и $\tilde{\mathcal{P}}(W_R) \subset \mathcal{P}(W_R)$ — линейная оболочка оператора I и всех операторов вида $A = A(f_1) \dots A(f_n)$, $\text{supp } f_k \subset O_k$, $k = 1, \dots, n$. Тогда $\tilde{\mathcal{P}}(W_R)$ есть $*$ -подмножество в смысле инволюции в полевой Op^* -алгебре $\mathcal{P}$, а область $\tilde{\mathcal{P}}(W_R)\Omega$ плотна в $\mathcal{H}$. Кроме того, для любых $A \in \tilde{\mathcal{P}}(W_R)$ и $c(s) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$V(i\pi) c(K) A \Omega = c(K) J A^* \Omega. \quad (8.32)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Плотность $\tilde{\mathcal{P}}(W_R)\Omega$ вытекает из "вайтмановского аналога" следствия к предложению 3.1 (теореме Рее–Шлидера). То, что $A \in \tilde{\mathcal{P}}(W_R)$ влечет и $A^* = A^*|_{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{P}}(W_R)$ очевидно, поскольку $A(f)^*|_{\mathcal{D}} = A(\bar{f})$, и в силу $O_i \times O_k$, $i, k = 1, \dots, n$, $i \neq k$, мы имеем

$$(A(f_1) \dots A(f_n))^*|_{\mathcal{D}} = A(\bar{f}_n) \dots A(\bar{f}_1) = A(\bar{f}_1) \dots A(\bar{f}_n) \in \tilde{\mathcal{P}}(W_R). \quad (8.33)$$

Для вывода (8.32) заметим, что из (8.11) следует $J\mathcal{D} = \mathcal{D}$, а из (8.11) и (8.29) —

$$JA(f)J = A(f^J) \quad (8.34)$$

Поэтому для любого $A \in \tilde{\mathcal{P}}(W_R)$ вида $A = A(f_1) \dots A(f_n)$, с учетом (8.33),

$$JA^*J = A(f_1^J) \dots A(f_n^J).$$

Подставляя это соотношение в (8.15) и учитывая, что $A^*\Omega = A^*\Omega$, получаем (8.32). $\square$

Отсюда мы уже легко можем получить последнее из наших предварительных утверждений: в нем мы соберем все свойства, так сказать, "модулярных" объектов J , $V(t)$, $V(\pm i\pi)$ по отношению к Op^* -алгебрам $\mathcal{P}(W_i)$.

Л е м м а 8.6. В произвольной вайтмановской теории с циклическим вакуумом Ω для Op^* -алгебр $\mathcal{P}(W_i)$, $i = R, L$, имеют место следующие свойства:

- 1) $V(t) \cdot V(t)^{-1}$ есть группа автоморфизмов $\mathcal{P}(W_i)$;
- 2) $J\mathcal{P}(W_R)J = \mathcal{P}(W)_L$;
- 3) $\mathcal{P}(W_R)\Omega \subset \mathcal{D}(\pi)$, $\mathcal{P}(W_L)\Omega \subset \mathcal{D}(-\pi)$;
- 4) для всех $A \in \mathcal{P}(W_R)$, $B \in \mathcal{P}(W_L)$

$$JV(i\pi)A\Omega = A^*\Omega, \quad JV(-i\pi)B\Omega = B^*\Omega. \quad (8.35)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1 очевидно, утверждение 2 — также, с учетом (8.34). Далее, первое из утверждений 3 и первое из утверждений 4 можно доказать одновременно, стандартным способом: выбрав некоторую существенную область $\mathcal{D}_+$ для самосопряженного оператора $V(i\pi)$ и показав, что для всех $\chi \in \mathcal{D}_+$ и всех $A \in \mathcal{P}(W_R)$

$$(A\Omega, V(i\pi)\chi) = (JA^*\Omega, \chi). \quad (8.36)$$

Возьмем $\mathcal{D}_+ = L\{c(K)\tilde{\mathcal{P}}(W_R)\Omega \mid c(s) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$; ее существенность для $V(i\pi)$ следует из плотности $\tilde{\mathcal{P}}(W_R)\Omega$ в $\mathcal{H}$. Тогда в (8.36) $\chi = c(K)T\Omega$, $c(s) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $T \in \tilde{\mathcal{P}}(W_R)$, и мы имеем

$$\begin{aligned} (A\Omega, V(i\pi)\chi) &= (A\Omega, V(i\pi)c(K)T\Omega) = (A\Omega, c(K)JT^*\Omega) = \\ &= (A\Omega, Jc(-K)^*T^*\Omega) = (c(-K)^*T^*\Omega, JA\Omega), \end{aligned} \quad (8.37)$$

где второе равенство следует из (8.32), третье — из (8.31), четвертое — из антиунитарности J . Далее, продолжим эту цепочку равенств, используя представление операторнозначной функции $c(K)$ через фурье-образ $c(s)$:

$$c(K) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \tilde{c}(t) dt, \quad \tilde{c}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{its} c(s). \quad (8.38)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} (c(-K)^* T^* \Omega, JA \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{c}(t) (V(t) T^* V(t)^{-1} \Omega, JAJ \Omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{c}(t) ((JAJ)^* \Omega, V(t) TV(t)^{-1} \Omega) = \\ &= (JA^* \Omega, c(K) T \Omega) = (JA^* \Omega, \chi). \end{aligned} \quad (8.39)$$

Здесь в первом равенстве учтена антилинейность скалярного произведения в $\mathcal{H}$ по первому аргументу; второе равенство следует из коммутативности на $\mathcal{D}$ операторов $(JAJ)^* \in \mathcal{P}(W_L)$ и $V(t) T^* V(t)^{-1} \in \mathcal{P}(W_R)$; третье и четвертое равенства очевидны. В совокупности (8.37) и (8.39) дают (8.36), и утверждения, относящиеся к $\mathcal{P}(W_R)$ и $V(i\pi)$, доказаны. Утверждения, относящиеся к $\mathcal{P}(W_L)$ и $V(-i\pi)$, сразу получаются из них с учетом утверждения 2 и свойства $JV(i\pi)J = V(-i\pi)$. $\square$

Теперь, наконец, мы можем переходить к формулировке основных результатов.

Т е о р е м а 8.7. А. Пусть задана вайтмановская теория с циклическим вакуумом Ω и CPT-оператором θ ; пусть также $V(t)$ — подгруппа лоренцевых вращений вокруг оси x^1 , K — генератор $V(t)$, $J = U(0, R(e^1, \pi)) \theta$. Тогда для полевых алгебр фон Неймана $F_n(W_i)$, $n = 8, 9$, $i = R, L$, справедливы следующие свойства:

1) выполнено условие локальности,

$$F_n(W_R) \subset F_n(W_L)';$$

2) алгебры правого и левого клиньев переводятся друг в друга инволюцией J :

$$F_n(W_R) = JF_n(W_L)J; \quad (8.40)$$

$$\begin{aligned} 3) F_n(W_R)\Omega \subset \mathcal{D}(\pi), F_n(W_L)\Omega \subset \mathcal{D}(-\pi), \text{ и для всех } A \in F_n(W_R), B \in F_n(W_L) \\ JV(i\pi)A\Omega = A^*\Omega, JV(-i\pi)B\Omega = B^*\Omega. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Б. Если, кроме того, Ω циклический для $F_n(W_i)$, то справедливы также свойства:

4) Ω есть бициклический вектор для $F_n(W_i)$;

5) выполнено условие дуальности:

$$F_n(W_R)' = F_n(W_L);$$

6) модулярная структура алгебр $F_n(W_i)$ описывается следующими объектами:

а) $V(\pm t)$, $t \in \mathbf{R}$, есть модулярная группа пары $(F_n(W_R), \Omega)$ или $(F_n(W_L), \Omega)$ соответственно;

б) $\Delta^{\pm 1} = \exp(\pm 2\pi K)$ — модулярные операторы указанных пар;

с) $JV(i\pi) = S_R$, $JV(-i\pi) = S_L$ — инволюции в совершенных обобщенных гильбертовых алгебрах $F_n(W_R)\Omega$ и $F_n(W_L)\Omega$ соответственно; области $\mathcal{D}(\pm\pi)$ — пространства $\mathcal{D}^{\#}$ и $\mathcal{D}^b$, связанные с этими алгебрами;

d) J – модулярная инволюция Томиты:

$$JF_n(W_i)J = F_n(W_i)'.$$

В. Если, кроме того, Ω – единственный вакуумный вектор в $\mathcal{H}$, то справедливо свойство

7) $F_n(W_i)$ – факторы типа III_1 .

Доказательство мы проведем для алгебр $F_9(W_i)$ и затем убедимся, что оно, с минимальными изменениями, сохраняет справедливость и для $F_8(W_i)$. Утверждения части А, кроме локальности, просто устанавливаются с помощью леммы 8.6. Действительно, свойство А2, аналогичное утверждению 2 этой леммы, сразу вытекает из него, с учетом (8.6), а свойства А3, аналогичные утверждениям 3 и 4, доказываются тем же путем, т.е. (в случае $F_9(W_R)$) нам следует вывести соотношение (8.36) для всех χ из некоторой существенной области $V(i\pi)$ и всех $A \in F_9(W_R)$. Сначала получим вспомогательное равенство: для всех $A \in F_9(W_R)$ и всех $\eta \in \mathcal{P}(W_L)\Omega$

$$(JV(t)\eta, JA^*\Omega) = (V(i\pi)JV(t)\eta, A\Omega). \quad (8.42)$$

Для вывода (8.42) заметим, что существует $B \in \mathcal{P}(W_L)$ такой, что $V(t)\eta = B_t\Omega$, где $B_t = V(t)BV(t)^{-1} \in \mathcal{P}(W_L)$; с учетом этого, левую часть (8.42) преобразуем в правую, используя (8.31) и (8.35):

$$\begin{aligned} (JB_t\Omega, JA^*\Omega) &= (A^*\Omega, B_t\Omega) = (B_t^*\Omega, A\Omega) = \\ &= (JV(-i\pi)B_t\Omega, A\Omega) = (V(i\pi)JV(t)\eta, A\Omega). \end{aligned}$$

Отсюда для произвольной функции $c(s) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с помощью (8.38) имеем

$$\begin{aligned} (Jc(K)\eta, JA^*\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{c}(t) (JV(t)\eta, JA^*\Omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{c}(t) (V(i\pi)JV(t)\eta, A\Omega) = (V(i\pi)Jc(K)\eta, A\Omega). \end{aligned}$$

Учитывая, что область

$$\mathcal{D}_- = L \{ c(K)\mathcal{P}(W_L)\Omega \mid c(s) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \}$$

существенна для $V(-i\pi)$, и, следовательно, в силу (8.31) область $J\mathcal{D}_-$ существенна для $V(i\pi)$, имеем из этой цепочки искомое: для всех $A \in F_9(W_R)$

$$A\Omega \in \mathcal{D}(\pi), JV(i\pi)A\Omega = A^*\Omega.$$

Аналогично доказывается, что для всех $B \in F_9(W_L)$

$$B\Omega \in \mathcal{D}(-\pi), JV(-i\pi)B\Omega = B^*\Omega.$$

Перейдем к доказательству локальности. Сначала покажем, что алгебры $F_9(W_R)$ и $F_9(W_L)$ коммутируют на вакуумном векторе Ω :

$$[A, B]\Omega = 0 \quad \forall A \in F_9(W_R), B \in F_9(W_L), \quad (8.43)$$

что, с учетом (8.40), равносильно свойству

$$[A, JcJ]\Omega = 0 \quad \forall A, C \in F_9(W_R). \quad (8.44)$$

Поскольку $V(t)$ – группа автоморфизмов $F_9(W_R)$, то при всех $t \in$

$\in \mathbf{R} \quad AV(t) C^* V(t)^{-1} \in F_9(W_R)$, и для любого ограниченного оператора Y такого, что $Y\Omega \in \mathcal{D}(-\pi)$, $JV(-i\pi) Y\Omega = Y^* \Omega$, с учетом (8.41) имеем

$$\begin{aligned} (Y\Omega, AV(t) C^* V(t)^{-1} \Omega) &= (Y\Omega, JV(i\pi) V(t) CV(t)^{-1} A^* \Omega) = \\ &= (Y\Omega, V(-i\pi) JV(t) CV(t)^{-1} A^* \Omega) = \\ &= (V(-i\pi) Y\Omega, JV(t) CV(t)^{-1} A^* \Omega) = \\ &= (V(-i\pi - t) Y\Omega, JCV(-t) A^* \Omega) = \\ &= (V(-i\pi - t) Y\Omega, JCJV(i\pi - t) A\Omega), \end{aligned}$$

и в итоге получим: при всех вещественных t

$$\begin{aligned} f(t) &\equiv (Y\Omega, AV(t) C^* \Omega) - \\ &- (V(-t - i\pi) Y\Omega, JCJV(i\pi - t) A\Omega) = 0. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Рассмотрим свойства входящих сюда векторнозначных аналитических функций. Поскольку $F_9(W_R) \Omega \subset \mathcal{D}(\pi)$, а $Y\Omega \in \mathcal{D}(-\pi)$, то в силу (8.14) функции $AV(\tau) C^* \Omega$, $JCV(i\pi - \tau) A\Omega$ и $V(-\bar{\tau} - i\pi) Y\Omega$ определены и сильно непрерывны в замкнутой полосе $0 \leq \text{Im} \tau \leq \pi$ τ -плоскости. Кроме того, первые две функции сильно аналитичны в соответствующей открытой полосе, а третья функция сильно аналитична по $\bar{\tau}$ в открытой полосе $0 > \text{Im} \bar{\tau} > -\pi$. В результате $f(t)$ допускает комплексное продолжение как функция, аналитическая в открытой полосе $0 < \text{Im} \tau < \pi$ и непрерывная на ее замыкании (при этом функцию $V(-t - i\pi) Y\Omega$ в (8.45) мы продолжаем как $V(-\bar{\tau} - i\pi) Y\Omega$). Поэтому из равенства $f(\tau) = 0$ на множестве $\text{Im} \tau = 0$ следует и $f(\tau) = 0$ на всей замкнутой полосе $0 \leq \text{Im} \tau \leq \pi$. Отсюда, в частности, $f(i\pi) = 0$, что, с учетом (8.41) и $V(-\bar{\tau} - i\pi) = I$, при $\tau = i\pi$ дает

$$(Y\Omega, [A, JCJ] \Omega) = 0. \quad (8.46)$$

Докажем теперь, что совокупность всех операторов Y в (8.46), т.е. множество

$$\mathcal{A}(W_L) = \{Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid Y\Omega \in \mathcal{D}(-\pi), JV(-i\pi) Y\Omega = Y^* \Omega\},$$

порождает плотное в $\mathcal{H}$ множество векторов $\mathcal{A}(W_L) \Omega$. Для этой цели каждому вектору $\eta \in \mathcal{D}(-\pi)$ сопоставим ограниченный вектор $Y(\eta)$, задав его следующим явным определением (в обозначениях Дирака)¹⁾:

$$Y(\eta) = |\eta\rangle\langle\Omega| + |\Omega\rangle\langle JV(-i\pi)\eta| - \langle\Omega|\eta\rangle\langle\Omega|\Omega\rangle.$$

Удобство такой записи в том, что она сразу дает и сопряженный оператор:

$$Y(\eta)^* = |\Omega\rangle\langle\eta| + |JV(-i\pi)\eta\rangle\langle\Omega| - \langle\eta|\Omega\rangle|\Omega\rangle\langle\Omega|.$$

В обычной же записи, с учетом $(\Omega, \eta) = (JV(-i\pi)\eta, \Omega)$, имеем: для

¹⁾ Как легко видеть, отображение $Y: \mathcal{D}(-\pi) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ родственно представлению $\pi': \mathcal{D}^b \rightarrow L(\mathcal{H})$ в теории Томиты–Такесаки [[Т1, § 3]] (согласно п. Б6 нашей теоремы $\mathcal{D}(-\pi)$ есть пространство $\mathcal{D}^b$ для пары $(F_9(W_R), \Omega)$, а $JV(-i\pi)$ — инволюция в гильбертовой алгебре $\mathcal{U}' = F_9(W_L)\Omega$), однако не совпадает с ним: операторы $\pi'(\eta)$, в отличие от $Y(\eta)$, ограничены не для всех $\eta \in \mathcal{D}^b$, а только для $\eta \in \mathcal{U}'$. Причина этого различия в том, что отображение Y не есть представление, и его образ $\mathcal{A}(W_L)$ есть множество, более широкое, чем $F_9(W_L)$, и не являющееся алгеброй. Совершенно аналогично можно ввести отображение $X: \mathcal{D}(\pi) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, образ которого $\mathcal{A}(W_R)$ включает $F_9(W_R)$ и также не является алгеброй [ВW1, лемма 12].

любого $\Phi \in \mathcal{H}$.

$$Y(\eta)\Phi = (\Omega, \Phi)\eta + (JV(-i\pi)\eta, (I - P_\Omega)\Phi)\Omega,$$

$$Y(\eta)^*\Phi = (\eta, \Phi)\Omega + (\Omega, \Phi)[JV(-i\pi) - P_\Omega]\eta$$

(P_Ω — проектор на луч $\{c\Omega\}$), что дает

$$Y(\eta)\Omega = \eta, \quad Y(\eta)^*\Omega = JV(-i\pi)\eta \quad \forall \eta \in \mathcal{D}(-\pi).$$

Из этих формул очевидно, что $Y(\eta) \in \mathcal{A}(W_L)$ и, кроме того, с учетом определения $\mathcal{A}(W_L)$,

$$\mathcal{A}(W_L)\Omega = \mathcal{D}(-\pi).$$

Таким образом, множество всех векторов $Y\Omega$ в (8.46) плотно; вследствие этого (8.46) влечет (8.44), а значит, и (8.43).

Заметим теперь, что для всех $a \in W_R$ имеет место $(a, I)W_R \subset W_R$; с учетом этого, из релятивистской ковариантности алгебр $F_9(O)$ следует, что $A(a) \in F_9((a, I)W_R) \subset F_9(W_R)$ для всех $A \in F_9(W_R)$. Поэтому (8.43) влечет

$$[A(a), B]\Omega = 0 \quad \forall A \in F_9(W_R), B \in F_9(W_L). \quad (8.47)$$

Рассмотрим область $O = W_L \cup (a, I)W_R$. Для операторов в (8.47) имеем $A(a) \in F_9(O)$, $B \in F_9(O)$. Учитывая, что $F_9(O)$ — алгебра, и $F_9(O) \subset F_8(O)$, получаем

$$[A(a), B] \in F_9(O) \subset F_8(O) \subset \mathcal{P}(O')'_w,$$

что, по определению слабого коммутанта и в силу (8.47), дает

$$(S_1\Omega, [A(a), B]S_2\Omega) = (S_2^*S_1\Omega, [A(a), B]\Omega) = 0 \quad (8.48)$$

для всех $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(O')$. Поскольку $O' = W_R \cap (a, I)W_L$ при любом $a \in W_R$ есть открытое непустое множество, то в силу теоремы Рее—Шлидера векторы $S_1\Omega$ и $S_2\Omega$ в левой части (8.48) пробегают плотное множество $\mathcal{P}(O')\Omega$, откуда следует, что $[A(a), B] = 0$ при $a \in W_R$. Но представление $U(a, \Lambda)$ сильно непрерывно, так что операторнозначные функции $A(a)$ и $[A(a), B]$ сильно непрерывны по a , и, следовательно, $[A(a), B] = 0$ также и при $a \in \bar{W}_R$. Поскольку же $a = 0 \in \bar{W}_R$, имеем искомую локальную коммутативность $F_9(W_R)$ и $F_9(W_L)$.

Вывод дальнейших утверждений теоремы для $F_9(W_i)$ теперь уже прост. Рассмотрим часть Б. С учетом (8.40), Ω цикличен как для $F_9(W_R)$, так и для $F_9(W_L)$, а так как эти алгебры коммутируют, то Ω и бицикличен для них. В результате для данных алгебр и группы $V(t)$ выполнены все условия теоремы Риготти (см. п. 3.3; в частности, основное условие 3 следует из (8.41) с учетом (8.40)), из которой немедленно получаем $V(t) \cdot V(t)^{-1}$ — модулярная группа для пары $(F_9(W_R), \Omega)$; выполнено условие дуальности; $\Delta^{\pm 1} = \exp(\pm 2\pi K)$ — модулярный оператор для $(F_9(W_R), \Omega)$ или $(F_9(W_L), \Omega)$ соответственно. Дуальность в сочетании с (8.40) и $J\Omega = \Omega$ дает, что J — модулярная инволюция для $(F_9(W_i), \Omega)$. Утверждения пункта бс очевидны в силу (8.41).

Наконец, утверждения части В — о типе и факторности $F_9(W_i)$ — следуют из того, что, в силу принадлежности W_i к классу светоподобно монотонных областей, аналогичные утверждения справедливы для локальных алгебр $R(W_i)$ теории Хаага—Араки: как нетрудно проверить, соответст-

вующие доказательства (предложения 3.6 и 3.12) используют лишь свойства, уже установленные нами для алгебр $F_9(W_i)$ и сети $\{F_9(O)\}$. В итоге для алгебр $F_9(W_i)$ теорема доказана полностью.

Проделаем теперь обобщение доказательства на случай алгебр $F_8(W_i) = {}_{\text{alg}} \mathcal{P}(W_i)'_w$.

а) Свойства (8.40) и (8.41), как легко видеть, доказываются для любого множества операторов такого, что оно слабо коммутирует с $\mathcal{P}(W_L)$, а $V(t) \cdot V(t)^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$, есть его группа автоморфизмов. Тем самым эти свойства имеют место для всех операторов из $\mathcal{P}(W_L)'_w$, и, следовательно, для алгебр $F_8(W_i)$ справедливы утверждения А2 и А3.

б) С учетом этого все доказательство формулы (8.44) сохраняет справедливость, если взять $A \in F_8(W_R)$, $C \in \mathcal{P}(W_L)'_w$, поскольку, кроме свойств (8.40), (8.41), от этих операторов потребуется лишь

$$A V(t) C^* V(t)^{-1} \in F_8(W_R),$$

что имеет место по определению сети $F_8(O)$.

с) Наконец, для перехода от (8.44) и (8.43) к (8.48), используется не $[A, B] \in F_9(O)$, а только $[A(a), B] \in \mathcal{P}(O')'_w$, что выполняется при $B \in \mathcal{P}(W_R)'_w \subset \mathcal{P}(O')'_w$ и, в частности, для всех $B \in F_8(W_L)$. Очевидно, что и оператор A может быть взят из $F_8(W_R)$: сеть $\{F_8(O)\}$ также релятивистски ковариантна, и для всех $a \in W_R$ тогда будет $A(a) \in F_8(W_R)$, так что достаточное для (8.48) свойство $[A(a), B] \in \mathcal{P}(O')'_w$ сохраняется. Таким образом, локальность алгебр $F_8(W_i)$ доказана.

Вся дальнейшая часть доказательства сохраняется точно той же, что и для алгебр $F_9(W_i)$. Если наложено дополнительное условие

$$\overline{F_8(W_R)\Omega} = \mathcal{H}, \quad (8.49)$$

то, с учетом уже доказанной локальности и свойства (8.41), справедливого при $A \in F_8(W_R)$, $B \in F_8(W_L)$, для $F_8(W_i)$ выполнены предположения теоремы Риготти, что дает все утверждения части Б. Предполагая затем единственность вакуума, получаем утверждения части В. $\square$

Результаты этой теоремы заслуживают некоторого обсуждения. Укажем сначала простое

С л е д с т в и е 1. В произвольной вайтмановской теории с циклическим вакуумом Ω справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} F_9(W_i) &\subset F_8(W_i) \subset \mathcal{P}(W_i)'_w \subset \\ &\subset F_8(W_j)' \subset F_9(W_j)' = F_{10}(W_i), \\ F_8(W_i) &\subset F_4(W_i) \subset F_8(W_j)'; \quad i, j = R, L, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вторая из формул (8.50) — коммутант к средней части первой. В первой же формуле очевидны (с учетом (8.3)) все включения, кроме третьего, которое представляет собой побочный продукт доказательства локальности для $F_8(W_i)$: на заключительном этапе этого доказательства мы заметили, что коммутативность $[A, B] = 0$, сначала установленная для $A \in F_9(W_R)$, $B \in F_9(W_L)$, без всякого изменения рассуждений распространяется на $A \in F_8(W_R)$, $B \in \mathcal{P}(W_R)'_w$. $\square$

Понятно, далее, что условие (8.49), вообще говоря, слабее, нежели циклическость Ω для $F_9(W_R)$. Соответственно оно обеспечивает и более узкий

комплекс свойств. Действительно, если оба условия эффективно различны, т.е. класс вайтмановских теорий, для которых

$$F_9(W_i) \subsetneq F_8(W_i), \quad \overline{F_9(W_R)\Omega} \subsetneq \overline{F_8(W_R)\Omega} = \mathcal{H}$$

непуст, то в этом классе:

1) алгебры $F_8(W_i)$ локальны и дуальны, алгебры же $F_9(W_i)$ локальны, но заведомо не дуальны (последнее вытекает из следствия 2 ниже);

2) "геометрические" операторы $V(\pm t)$, $V(\pm i\pi)$, J характеризуют модулярную структуру алгебр $F_8(W_i)$, но, вообще говоря, не $F_9(W_i)$. Если же вакуум циклический для $F_9(W_R)$, то модулярные структуры алгебр $F_9(W_i)$ и $F_8(W_i)$ совпадают, а значит, совпадают и сами алгебры; кроме того, это условие влечет и значительное число других следствий.

С л е д с т в и е 2. В вайтмановской теории с циклическим вакуумом Ω следующие условия являются эквивалентными:

1) Ω циклический для $F_9(W_R)$;

2) Ω циклический для всех $F_k(W_i)$, $k = 1, \dots, 10$;

3) Ω — сепаратор для $F_{10}(W_i)$;

4) локальность для $F_{10}(W_i)$;

5) дуальность для $F_9(W_i)$;

6) $F_4(W_i) = F_8(W_i) = F_9(W_i) = F_{10}(W_i) = \mathcal{P}(W_j)'_w$, $i, j = R, L$, $i \neq j$;

и влекут свойство

7) дуальность для $F_4(W_i)$.

Если, кроме того, поля $A(f)$, $f \in S_R(\mathbb{R}^4)$, в существенном самосопряжены на $\mathcal{D}$, то имеет место также

8) $F_k(W_i) = F_l(W_i)$, $k, l = 1 - 4, 8 - 10$.

Все алгебры, входящие в равенства 6 и 8, удовлетворяют локальности и дуальности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эквивалентность условий 1, 3—5 показывают элементарные импликации $1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. $1 \rightarrow 5$ есть одно из утверждений теоремы 8.7. $5 \rightarrow 4$: с учетом последней из формул (8.3), дуальность для $F_9(W_i)$ сразу дает $F_9(W_i) = F_{10}(W_i)$, так что алгебры $F_{10}(W_i)$ не только локальны, но и дуальны. $4 \rightarrow 3$: согласно лемме 8.1 Ω циклический для $F_{10}(W_L)$, так что из $F_{10}(W_L) \subset F_{10}(W_R)'$ следует 3. $3 \rightarrow 1$: если Ω циклический для $F_{10}(W_R)'$, то (8.40) в совокупности с последней из формул (8.3) влекут 1.

Далее, как мы видели, условие 5 влечет равенство $F_9(W_i) = F_{10}(W_i)$, а при его наличии (8.50) сразу дает цепочку равенств 6. Свойство 7 следует из 5 и 6. Свойство 2 очевидно для $k = 1 - 3, 8 - 10$, для остальных значений k оно вытекает из формул (7.9), (8.3) и свойства 6: согласно 6 $\mathcal{P}(W_R)'_w$ есть алгебра фон Неймана, а в этом случае, в силу (7.9) и теоремы Рее—Шлидера,

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{P}(W_R)\Omega} \subset \overline{F_4(W_R)\Omega} \subset \overline{F_k(W_R)\Omega}, \quad k = 5, 6, 7$$

(последнее включение следует из (8.3)). Наконец, последнее утверждение очевидно из формул (8.3) и свойства 6. $\square$

Теорема 8.7 вместе со своими следствиями является центральной для всего формализма полевых алгебр. Ее главные результаты, очевидно, лежат в двух направлениях: в выяснении условий существования локальных и дуальных W^* -алгебр $F(W_i)$, а также в геометрической интерпретации

модулярной структуры $F(W_i)$. Коснемся сначала второго аспекта. Как мы убедились, геометрические объекты $V(t)$, $V(\pm i\pi)$, J , связанные с релятивистскими симметриями квантовой системы и со специфической геометрией областей-клиньев, непосредственно оказываются структурными характеристиками полевых алгебр $F(W_i)$, так что модулярная структура этих алгебр полностью получает физико-геометрическую интерпретацию. Этот результат, принадлежащий Бизоньяно и Вичману, — новое нетривиальное следствие свойств релятивистской ковариантности вайтмановской теории. Как мы уже не раз подчеркивали, данный результат не мог быть получен в рамках общей теории Хаага—Араки, он существенно опирается на специфику полевой теории. Стоит, однако, отметить, что и в рамках последней, результаты об интерпретации модулярной структуры не являются строго аксиоматическими: для их получения приходится налагать "условие Рее—Шлидера", $F_9(W_R)\Omega = \mathcal{H}$, либо какое-либо из равносильных ему условий в следствии 2. Кроме того, эти результаты, находясь в теснейшей зависимости от специальных свойств пары областей W_R , W_L , разумеется, не допускают прямого перенесения на какие-либо другие области, за исключением тех, которые получаются из клиньев W_i преобразованиями Пуанкаре (в последнем случае, т.е. для пар областей $(a, \Lambda) W_i$, $((a, \Lambda) W_i)'$, $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$, все утверждения теоремы 8.7 и ее следствий сохраняют справедливость автоматически). Поэтому остается неясным, обладают ли подобной геометрической интерпретацией модулярные структуры полевых W^* -алгебр для иных классов областей. До сих пор результаты такого рода были получены только в теории свободных безмассовых полей: благодаря дополнительным свойствам масштабной и конформной симметрии таких теорий, через операторы преобразований симметрии в них удается выразить объекты модулярной структуры для W^* -алгебр $F(D)$ и $F(V^\pm)$, отвечающих наиболее важным классам областей — двойным конусам и световым конусам [HL, Bu5].

В вопросе о локальности и дуальности обобщение полученных результатов на другие области попросту необходимо. Здесь достижения пока совсем частные: мы показали локальность или дуальность не всей сети $\{F(O)\}$, а лишь одной выделенной пары областей. Очевидно, однако, что, в отличие от результатов о модулярной структуре, результаты о локальности вполне допускают обобщение. Помимо очевидного обобщения всех утверждений о локальности и дуальности на пары областей W, W' вида $W = (a, \Lambda) W_i$, $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$, утверждения о локальности сразу же обобщаются для всех пар областей как ограниченных, так и неограниченных вида (O_1, O_2) , $O_1 \subset W$, $O_2 \subset W'$. Но и это обобщение, конечно, еще недостаточно: любое удовлетворительное решение проблемы локальности должно включать доказательство того, что некоторая сеть $\{F(O)\}$ (пусть при каких-то дополнительных условиях) удовлетворяет условию локальности для любых пар областей $O_1 \times O_2$, $O_1, O_2 \in B(M)$ или хотя бы для какого-либо базисного набора областей, например двойных конусов. Использовать для получения такого решения результаты, относящиеся к областям W_i (и тем самым W), будет возможно, если мы сумеем хотя бы отчасти свести изучение алгебр $F(O)$ с $O \in B(M)$ к изучению алгебр $F(W)$. Это удастся сделать.

Введем множество $\mathcal{W}$ всех областей W :

$$\mathcal{W} = \{ W \subset M \mid W = (a, \Lambda) W_i, \quad i = R, L, (a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow \}.$$

Тогда, если $F(O)$ — любая из наших сетей $\{F_k(O)\}$, $k = 1, \dots, 10$, то мы можем сопоставить ей вспомогательную сеть $\{F^w(D)\}$, определив ее для двойных конусов D и их причинных дополнений D' с помощью формул

$$F^w(D) = \bigcap_{W \ni W \supset D} F(W), \quad F^w(D') = \left\{ \bigcup_{W \ni W \subset D'} F(W) \right\}'. \quad (8.51)$$

Общие свойства получаемых таким образом сетей алгебр описывает

Л е м м а 8.8. Пусть в произвольной вайтмановской теории задана некоторая сеть $\{F(O)\}$ полевых алгебр фон Неймана, и по алгебрам $F(W_i)$ данной сети построена система алгебр $\{F^w(\tilde{D})\}_{\tilde{D} = D, D'}$ с помощью формул (8.51). Тогда:

1) если алгебры $F(W)$, $W \in \mathcal{W}$, удовлетворяют условиям изотонии, релятивистской ковариантности и CPT-ковариантности, то система алгебр $\{F^w(\tilde{D})\}$ есть сеть, также удовлетворяющая всем этим условиям;

2) если алгебры $F(W_i)$, $i = R, L$, удовлетворяют условию локальности или дуальности, то система $\{F^w(\tilde{D})\}$ также удовлетворяет соответственно условию локальности или дуальности, причем локальность имеет место как для пар двойных конусов $D_1 \times D_2$, так и для пар областей D, D' :

$$F^w(D_1) \subset F^w(D_2)', \quad F^w(D)' \supset F^w(D');$$

3) для любой сети $\{F(O)\}$

$$F(D) \subset F^w(D), \quad F(D') \supset F^w(D'), \quad (8.52)$$

а также

$$F^w(D_1) \subset F(W) \subset F^w(D_2') \quad (8.53)$$

для любых двойных конусов D_1, D_2 и клина $W \in \mathcal{W}$ таких, что $D_1 \subset W \subset D_2'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения 1 и 3 очевидны из определений (8.51). Если сеть $\{F(O)\}$ локальна, то для любого двойного конуса D и клина $W \subset D'$, с учетом (8.52) и (8.53), имеем

$$F(W) \subset F(W')' \subset F^w(D)',$$

откуда и

$$F^w(D') = \left\{ \bigcup_{W \subset D'} F(W) \right\}' \subset F^w(D)'.$$

Локальность для пар двойных конусов $D_1 \times D_2$ следует отсюда в силу изотонии системы $\{F^w(\tilde{D})\}$. В случае дуальности сети $\{F(O)\}$ имеем

$$\begin{aligned} F^w(D')' &= \left\{ \bigcup_{W \subset D'} F(W) \right\}' = \bigcap_{W \subset D'} F(W)' = \\ &= \bigcap_{W \subset D'} F(W') = \bigcap_{\tilde{W} \supset D} F(\tilde{W}) = F^w(D). \quad \square \end{aligned}$$

С л е д с т в и е. В произвольной вайтмановской теории с циклическим вакуумом Ω для каждой из сетей $\{F_k(O)\}$, $k = 1, \dots, 10$, вспомогательные алгебры $\{F_k^w(\tilde{D})\}$ обладают свойствами изотонии, релятивистской ковариантности и CPT-ковариантности. Сети $\{F_n^w(\tilde{D})\}$, $n = 8, 9$, удовлетво-

ряют условию локальности. Если же теория удовлетворяет дополнительно-
му условию

$$F_9(W_R)\Omega = \mathcal{H}$$

(или какому-либо из равносильных условий в следствии 2), то

$$F_4^w(\tilde{D}) = F_8^w(\tilde{D}) = F_9^w(\tilde{D}) = F_{10}^w(\tilde{D}),$$

и для единой сети $\{F_k^w(\tilde{D})\}$, $k = 4, 8-10$, имеет место условие дуальности

$$F_k^w(D)' = F_k^w(D'),$$

а также свойство Рее–Шлидера: вектор Ω бицикличен для всех алгебр $F_k^w(\tilde{D})$.

Доказательство. Не вполне очевидно только последнее утверждение; но оно сразу следует из (8.52), цикличности Ω для $F_{10}(D)$ (лемма 8.1) и локальности $F_k^w(\tilde{D})$. $\square$

Таким образом, вспомогательные сети дают в целом удовлетворительное описание полевой системы, обеспечивая выполнение основных аксиом, CPT-ковариантности, дуальности и свойства Рее–Шлидера (по-прежнему остающегося самостоятельным условием, а не теоремой ввиду недоказанности слабой аддитивности). Однако они, в отличие от исходных сетей $\{F_k(O)\}$, не обладают никакой обозримой связью с вайтмановскими полями, и потому желательно использовать их лишь в качестве промежуточных объектов, вернувшись на заключительном этапе вновь к алгебрам $F_k(O)$. Как мы сейчас увидим, подобное возвращение оказывается возможным за счет того, что можно отыскать такое множество операторов, которое остается инвариантным при "клиновидном отображении" $F_k(\tilde{D}) \rightarrow F_k^w(\tilde{D})$.

Лемма 8.9. В произвольной вайтмановской теории имеет место равенство

$$\mathcal{P}(D')'_w = \mathcal{P}^w(D')'_w \equiv \bigcap_{\mathcal{W} \ni W \subset D'} \mathcal{P}(W)'_w. \quad (8.54)$$

Доказательство. Включение слева направо очевидно, так что следует лишь доказать для произвольного оператора T из правой части (8.54), что $T \in \mathcal{P}(D')'_w$. Ввиду (8.4) для этого достаточно проверить, что T слабо коммутирует со всеми операторами $A(f)$, $\text{supp } f \subset D'$. Выберем произвольный компакт $O \subset D'$. Для каждой точки $x \in O$ можно выбрать $\rho_x > 0$ такое, что

$$B(x, 2\rho_x) \subset W \subset D',$$

где $W \in \mathcal{W}$ и $B(x, \rho)$ — шар радиуса ρ с центром в точке $x \in M$. Очевидно, что множество $\{B(x, \rho_x) \mid x \in O\}$ есть покрытие O , и так как O — компакт, то из него можно выбрать конечное подпокрытие. Это означает, что существует конечный набор точек $x_1, \dots, x_n \in O$ и клиновидных областей $W_1, \dots, W_n \in \mathcal{W}$ такой, что

$$O \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \rho_{x_k}), \quad B(x_k, 2\rho_{x_k}) \subset W_k \subset D'. \quad (8.55)$$

Очевидно, что для покрытия (8.55) найдется набор функций $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ такой, что

$$\text{supp } f_k \subset B(x_k, 2\rho_{x_k}), \quad \sum_{k=1}^n f_k(x) = 1 \quad \forall x \in O.$$

Поскольку же функции f_k — мультипликаторы в $S(\mathbb{R}^4)$, то для любого оператора $A(f) \in \mathcal{P}(O)$ имеем

$$A(f) = \sum_{k=1}^n A(ff_k), \quad \text{supp } ff_k \subset W_k,$$

т.е. $A(ff_k) \in \mathcal{P}(W_k)$, $W_k \subset D'$. Но для любого оператора T из правой части (8.54) имеет место $T \in \mathcal{P}(W_k)'_w$, так что T слабо коммутирует со всеми $A(ff_k)$, а следовательно, и с их суммой $A(f)$:

$$(A(f)\Phi, T\Psi) = (T^*\Phi, A(f)^+\Psi) \quad \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{D}, \quad (8.56)$$

и для всех $A(f)$ с $\text{supp } f \subset O$. Поскольку O — любая компактная под-область D' , множество функций с компактным носителем плотно в $S(\mathbb{R}^4)$ по его топологии, и матричные элементы в (8.56) — обобщенные функции над $S(\mathbb{R}^4)$, то (8.56) имеет место и для любых $A(f)$ с $\text{supp } f \subset D'$, т.е. с учетом (8.4),

$$I \in L(D')'_w = \mathcal{P}(D')'_w,$$

и лемма доказана. $\square$

Заметим, что проделанное доказательство не распространяется на слабые коммутанты $\mathcal{P}(O)'_w$ ограниченных областей $O \in B(M)$.

С помощью (8.54) уже нетрудно установить связь между алгебрами $F_k(O)$ и вспомогательными алгебрами $F_k^w(\tilde{D})$, удовлетворяющими локальности и дуальности.

С л е д с т в и е. Пусть задана вайтмановская теория с циклическим вакуумом Ω , удовлетворяющая дополнительному условию $F_9(W_R)\Omega = \mathcal{H}$ или другому равносильному условию из следствия 2 теоремы 8.7. Тогда при $k = 4, 8 - 10$

$$F_k^w(D) = F_8(D) = \mathcal{P}(D')'_w \supset F_{10}(D) \supset F_9(D), \quad (8.57)$$

$$F_k^w(D') \subset F_9(D') \subset F_8(D') \subset \mathcal{P}(D)_w. \quad (8.58)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим соотношения (8.57). Из (8.54) имеем $F_8(D) = F_8^w(D)$, что, с учетом следствия из леммы 8.8, дает первое равенство в (8.57). Второе равенство: из следствия 2 теоремы 8.7 и (8.54) имеем

$$\mathcal{P}(D')'_w = \mathcal{P}^w(D')'_w = F_8^w(D).$$

Первое включение: в силу (8.52) $F_{10}(D) \subset F_{10}^w(D)$. Второе включение: в силу локальности алгебр $F_9^w(\tilde{D})$ и (8.52) алгебры $F_9(D)$ также локальны; с учетом (8.3) это дает $F_9(D) \subset F_{10}(D)$. В (8.58) первое включение вытекает из (8.52), второе — из (8.3). $\square$

(Как видно отсюда, совпадение вспомогательных сетей $F_k^w(\tilde{D}) = F_l^w(\tilde{D})$, вообще говоря, еще не влечет совпадения исходных сетей $F_k(\tilde{D})$ и $F_l(\tilde{D})$.)

Теперь мы имеем возможность сформулировать окончательные результаты о локальности, дуальности и других свойствах полевых W^* -алгебр $F_k(O)$, уже не обращаясь к алгебрам $F_k^w(\tilde{D})$.

Предложение 8.10. В произвольной вайтмановской теории с циклическим вакуумом Ω полевые алгебры фон Неймана $F_k(O)$, $k = 1, \dots, 10$, удовлетворяют условиям изотонии, релятивистской ковариантности, спектральности и CPT-ковариантности. Алгебры $F_8(D) = \text{alg } \mathcal{P}(D')'_w$ и $F_9(D) = L(D')'_N$ удовлетворяют условию локальности, а алгебры $F_{10}(D) = (L(D)'_N)'$ обладают свойством Рее–Шлидера (вектор Ω бициклический для всех $F_{10}(\tilde{D})$, $\tilde{D} = D, D'$). Если же теория удовлетворяет дополнительному условию $\overline{F_9(W_R)}\Omega = \mathcal{H}$ (или другому равносильному условию из следствия 2 теоремы 8.7), то

сети $\{F_k(\tilde{D})\}$, $k = 1, 4, 8 - 10$, удовлетворяют условию локальности; сеть $\{F_8(\tilde{D})\}$ удовлетворяет условию дуальности, причем $F_8(D) = \mathcal{P}(D')'_w$;

сеть $\{F_8(\tilde{D})\}$ обладает свойством Рее–Шлидера.

Доказательство. Все утверждения, относящиеся к общей вайтмановской теории, были получены выше. Дуальность сети $\{F_8(\tilde{D})\}$ следует из (8.57) и дуальности сети $\{F_8^w(\tilde{D})\}$ (следствие из леммы 8.8). Локальность $\{F_{10}(\tilde{D})\}$ следует из $F_{10}(D) \subset F_8(D)$, а локальность $\{F_4(\tilde{D})\}$ — из $F_4(D) \subset F_{10}(D)$. Свойство Рее–Шлидера для $F_8(\tilde{D})$ следует из (8.57). $\square$

Сделаем заключительные замечания. Поскольку алгебры $F_9(O)$ определяются по свойству коммутативности с полями из области O' , свойство локальности этих алгебр, подобно существенной дуальности, может рассматриваться как выражение транзитивности локальности: сеть, локальная по отношению к локальной системе полей $\{L(O)\}$, сама также оказывается локальной. Напомним также, что в силу теоремы 8.7, дуальность сети $\{F_8(D)\}$, как мы видели, прямо вытекающая из дуальности алгебр $F_8(W_i)$, имеет место уже при более слабом дополнительном условии $\overline{F_8(W_R)}\Omega = \mathcal{H}$. То же верно и для свойства Рее–Шлидера этой сети. Далее, стоит заметить, что в случае вайтмановской теории с полями, самосопряженными в существенном, полученные результаты дают лишь локальность, но не дуальность "естественной" сети $\{F_3(D)\}$ (при все том же дополнительном условии $\overline{F_9(W_R)}\Omega = \mathcal{H}$ или равносильном ему) и оставляют открытой возможность $F_3(D) \subsetneq F_8(D)$, где $\{F_8(D)\}$ — локальная и дуальная сеть. И наконец, упомянем,

что проблема обобщения алгебраического подхода на калибровочные теории приводит к задаче о построении алгебр $F_k(O)$ в пространстве состояний с индефинитной метрикой, принадлежащем классу так называемых J -пространств или пространств Крейна (см. Приложение). Эти алгебры оказываются из класса так называемых WJ^* -алгебр, которые отличны от алгебр фон Неймана: инволюция в них не удовлетворяет C^* -условию $\|A^*A\| = \|A\|^2$. Изучение их пока только начато [ДХЗ, 4]. Другим новым и весьма обещающим направлением являются применения формализма Бизоньяно–Вичмана в гравитации и космологии, в частности к построению строгой теории эффекта Унру. Возможность космологической интерпретации этого формализма почти очевидна: в ускоренной системе отсчета группа $V(t)$ оказы-

вается группой трансляций по собственному времени, а совпадение этой группы с модулярной группой пары $(F(W_R), \Omega)$ означает в силу условия Кубо—Мартина—Швингера, что состояние $\omega_{\Omega}^{(W_R)}$ является в этой системе отсчета равновесным состоянием с ненулевой температурой [Sew; HNS; Fr2].

§ 9. СВОБОДНЫЕ И ОБОБЩЕННО СВОБОДНЫЕ ПОЛЯ

Мы уже говорили, что рамки нашей книги не позволяют включить в нее современную алгебраическую трактовку конкретных моделей, проводимую на основе метода морфизмов локальных алгебр. Однако алгебраическое описание простейших систем — свободных и обобщенно свободных нейтральных полей, не имеющих заряженных секторов, не связано с методом морфизмов. Оно строится на базе обычного формализма полевых алгебр (которые в данном случае совпадают с алгебрами наблюдаемых), и мы рассмотрим его сейчас в качестве явного примера локальной квантовой теории, что и послужит завершением нашего введения в эту теорию.

Существует целый ряд способов алгебраической трактовки свободных и обобщенных свободных полей: релятивистски ковариантное описание [A4] и описание в фиксированный момент времени [A4,7], описание в рамках общего формализма канонических систем [Ka; Str1] и на основе аппарата бесконечных тензорных произведений [DA2]. Такое разнообразие вполне оправдано: все эти способы эффективно используются при изучении свободных теорий, а также в применениях их аппарата к исследованию более сложных систем, например, моделей конструктивной теории поля. Наша же задача состоит сейчас в том, чтобы сопоставить свободному полю сеть локальных алгебр $\{R(O)\}_{O \in V(M)}$, представить эту сеть как пример общей теории Хаага—Араки и установить для нее основные структурные свойства, изучавшиеся в § 3. Для таких целей наиболее удобным остается традиционный формализм Араки [A3, 4, 7].

Итак, рассмотрим хорошо известную модель свободного скалярного нейтрального поля ненулевой массы $m > 0$. Будем считать, что модель изначально задана в своей вайтмановской формулировке [[БЛТ, гл. 3, § 4]], так что имеется операторнозначная обобщенная функция $A(f)$, $f \in S(\mathbb{R}^4)$, удовлетворяющая всем аксиомам Вайтмана и, кроме того, уравнению Клейна—Гордона

$$A(Kf) = 0, \quad K = \square + m^2.$$

Пространство состояний $\mathcal{H}$, в котором действует поле $A(f)$, обладает строением фоковского пространства, т.е. прямой суммы симметризованных тензорных степеней (см. [[Бе]] или [[БЛТ, гл. 2, § 5]]) одночастичного пространства $\mathcal{H}_1$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_F(\mathcal{H}_1) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{sym } \mathcal{H}_1^{\otimes n}$$

Пространство $\mathcal{H}_1$ есть гильбертово пространство, получаемое из прост-

пространства основных функций путем его пополнения по некоторой L^2 -норме. Вводить такие нормы на пространстве Шварца возможно очень многими способами, и эта неоднозначность широко эксплуатируется при построении алгебраического описания свободного поля. Стандартным одночастичным пространством для вайтмановской теории поля $A(f)$ служит комплексное гильбертово пространство $L(\mathbb{R}^4) = \mathcal{H}_{m,0}$ неприводимого представления $[m, 0]$ группы Пуанкаре $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Его можно получить, вводя на вещественном пространстве $S_R(\mathbb{R}^4)$ комплексное скалярное произведение

$$(f, g)_L = 2i \int d^4x d^4y f(x) \Delta^+(x-y) g(y) = \int \frac{d^3p}{\tilde{\omega}} \overline{\tilde{f}(\tilde{\omega}, p)} \tilde{g}(\tilde{\omega}, p),$$

где $\tilde{\omega} = (p^2 + m^2)^{1/2}$ и $\Delta^+(x)$ — положительно-частотная функция Паули—Йордана:

$$\Delta^+(x) = -i(2\pi)^{-3} \int d^4p e^{-ipx} \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2),$$

факторизуя по подпространству

$$S_0(\mathbb{R}^4) = \{ f \in S_R(\mathbb{R}^4) \mid \|f\|_L = 0 \}$$

и пополняя по $(\cdot, \cdot)_L$, т.е.

$$L(\mathbb{R}^4) = \overline{S_R(\mathbb{R}^4)/S_0(\mathbb{R}^4)}^{\|\cdot\|_L}$$

При этом умножение на i для элементов $S_R(\mathbb{R}^4)/S_0(\mathbb{R}^4)$ (классов эквивалентности вещественных функций) вводится с помощью преобразования Фурье: по определению, $f' = if$, если $\tilde{f}'(p) = i\tilde{f}(p)$ при $p \in V_{(m)}^+$.

В формализме Араки в основу релятивистски ковариантного описания поля $A(f)$ полагается вещественное гильбертово пространство $\hat{L}(\mathbb{R}^4)$, получаемое при введении в $L(\mathbb{R}^4)$ вещественного скалярного произведения

$$(f, g)_{\hat{L}} \doteq \text{Re}(f, g)_L = - \int d^4x d^4y f(x) \Delta_1(x-y) g(y),$$

где

$$\Delta_1(x) = (2\pi)^{-3} \int d^4p e^{-ipx} \delta(p^2 - m^2)$$

— четная функция Паули—Йордана. Поскольку i не входит в поле скаляров пространства $\hat{L}$, операция $f \rightarrow if$ рассматривается как действие "оператора комплексной структуры" β такого, что $\beta^* = -\beta$, $\beta^2 = -1$; при этом

$$(f, \beta g)_{\hat{L}} = -\text{Im}(f, g)_{\hat{L}} = - \int d^4x d^4y f(x) \Delta(x-y) g(y),$$

где

$$\Delta(x) = -i(2\pi)^{-3} \int d^4p e^{-ipx} \epsilon(p_0) \delta(p^2 - m^2)$$

— перестановочная функция Паули—Йордана. Пространством состояний тогда служит фоковское пространство $\mathcal{H}_F(\hat{L})$ над одночастичным пространством $\mathcal{H}_1 = \hat{L}$. Операторам, действующим в $\mathcal{H}_1$, канонически сопоставляется (см. [[Бе]] или [[Э, гл. I. 3]]) их "вторично квантованная форма" — операторы в $\mathcal{H}_F$. Таким путем в $\mathcal{H}_F$ определяются унитарные операторы $U(a, \Lambda)$, реализующие сильно непрерывное представление группы Пуанкаре.

Поля $A(f)$, $f \in \hat{L}$, действуют в $\mathcal{H}_F(\hat{L})$ как операторы, в существенном самосопряженные на общей плотной инвариантной области

$$\mathcal{D} = L\{A(f_1) \dots A(f_n)\Omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots\},$$

где Ω — вакуумный вектор, единственный в $\mathcal{H}_F$ ("фоковский вакуум"). В данной реализации поле $A(f)$ имеет на $\mathcal{D}$ перестановочные соотношения

$$[A(f), A(g)] = -i(f, \beta g)_{\hat{L}}.$$

Ввиду существенной самосопряженности $A(f)$ мы можем для любого линеала $H_1 \subset \hat{L}$ определить алгебру фон Неймана

$$R(H_1) = \{e^{i\overline{A(f)}} \mid f \in H_1\}'' = \{E_\Delta(f) \mid \Delta \subset \mathbb{R}^1, f \in H_1\}'', \quad (9.1)$$

где $E_\Delta(f)$ — спектральные проекции $\overline{A(f)}$. По лемме Араки–Вудса [AW, лемма 2.3], операторы $W(f) = \exp(i\overline{A(f)})$ сильно непрерывны (по отношению к сильной топологии на $\hat{L}$), и, следовательно, алгебры фон Неймана, отвечающие линеалу H_1 и его замыканию $\overline{H_1}$, совпадают между собой, так что достаточно рассматривать алгебры $R(H_1)$ только для подпространств $\hat{L}$. Поскольку для любой области $O \in B(M)$ множеству $S(O)$ всех функций из $S_R(\mathbb{R}^4)$ с носителем в O естественно сопоставляются линеал в $\hat{L}$ и его замыкание, подпространство $\hat{S}(O) \subset \hat{L}$, то (9.1) позволяет дать

О п р е д е л е н и е 9.1. Локальной алгеброй (полей или, равносильно, наблюдаемых) модели свободного нейтрального массивного скалярного поля будем называть алгебру фон Неймана

$$R(O) = R(\hat{S}(O)).$$

П р е д л о ж е н и е 9.1. Сеть локальных алгебр свободного поля $A(f)$ удовлетворяет всем аксиомам Хаага–Араки, причем аддитивность и спектральность имеют место в своих сильных формах IIa и VIa соответственно. В пространстве состояний $\mathcal{H} = \mathcal{H}_F(\hat{L})$ имеется единственный пуанкаре-инвариантный вектор Ω , и глобальная алгебра модели неприводима, $R = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для установления сильной аддитивности IIa достаточно проверить, что для любой функции $f \in \overline{L\{\cup_i \hat{S}(O_i)\}}$ $W(f) \in \overline{\bigvee_i R(O_i)}^w$. Ясно, что это имеет место, если $f \in \cup_i \hat{S}(O_i)$. При $f = f_1 + f_2$ с $f_1, f_2 \in \cup_i \hat{S}(O_i)$ из перестановочных соотношений Вейля–Сигала

$$W(h_1)W(h_2) = W(h_1 + h_2) \exp\left\{\frac{i}{2}(h_1, \beta h_2)_{\hat{L}}\right\}, \quad (9.2)$$

для всех $h_1, h_2 \in \hat{L}$ получаем

$$W(f_1), W(f_2) \in \overline{\bigvee_i R(O_i)}^w \Rightarrow W(f_1 + f_2) \in \overline{\bigvee_i R(O_i)}^w$$

откуда вытекает, что

$$W(f) \in \overline{\bigvee_i R(O_i)}^w \quad \forall f \in L\{\bigcup_i \hat{S}(O_i)\}.$$

Наконец, если $f = \lim_{h \rightarrow \infty} f_n, f_n \in L\{\bigcup_i \hat{S}(O_i)\}$, то сильная непрерывность

$W(h)$ снова влечет $W(f) \in \overline{\bigvee_i R(O_i)}^w$, и выполнение IIa доказано.

Выполнение локальности, служившее основной проблемой в общей теории полевых алгебр (§ 8) теперь очевидно из (9.2), поскольку при $\text{supp } h_1 \times \text{supp } h_2$ показатель экспоненты в (9.2) равен нулю. Равным образом, оно следует и из того, что фоковский вакуум Ω является аналитическим вектором для $A(f)$: нетрудно проверить [BZ, § 2], что в терминах усеченных функций Вайтмана W_n^{tr} условие аналитичности Ω для $A(f)$ принимает вид

$$|\int \prod_{i=1}^n (d^4 x_i f(x_i)) W_n^{\text{tr}}(x_1, \dots, x_n)| \leq n! c(f)^n,$$

а для свободного поля $W_n^{\text{tr}}(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$ при всех $n > 2$.

Выполнение аксиомы IV явствует из того, что поле $A(f)$, удовлетворяя уравнению Клейна–Гордона, определяется своими начальными данными. Релятивистская ковариантность обеспечивается одним из основных свойств фоковского формализма [[Бе; Э, гл. I, теорема 1]]: если u – унитарный оператор в одночастичном пространстве $\hat{L}$, и $U(u)$ – его ”вторичное квантование”,

$$U(u) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} u^{\otimes n}, \quad u^{\otimes 0} = I,$$

то для всех $f \in \hat{L}$

$$W(uf) = U(u)W(f)U(u)^{-1}$$

Операторы $u(a, \Lambda)$, реализующие неприводимое представление $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$ в $\hat{L}(\mathbf{R}^4)$, порождаются представлением $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$ в $S_R(\mathbf{R}^4)$:

$$f(x) \rightarrow f(\Lambda^{-1}(x - a)) \quad \forall (a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^{\uparrow}.$$

Рассматривая, в частности, операторы трансляций

$$T(a) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} u(a, I)^{\otimes n} = \int e^{ipa} dE(p)$$

и учитывая, что для всех классов эквивалентности $[f] \in S_R(\mathbf{R}^4)/S_0(\mathbf{R}^4)$

$u(a, I)[\tilde{f}(p)] = [e^{ipa}\tilde{f}(p)]$, заключаем, что

$$\text{supp } E(p) \subset \{0\} \cup \{p^2 \geq m^2\}.$$

Наконец, единственность вакуума и неприводимость системы полей — стан-

дартные свойства теории свободного поля, проверяемые разложением по операторам рождения-уничтожения. $\square$

С л е д с т в и е 1. Сеть $\{R(O)\}$ обладает свойством Рее–Шлидера: любой аналитический по энергии вектор является циклическим для всех $R(O)$, $O \subset M$, и отделяющим для всех $R(O)$ с $O' \neq \emptyset$.

С л е д с т в и е 2. Квазилокальная алгебра $\mathfrak{A}$, отвечающая сети $\{R(O)\}$, проста.

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. следствие 2 теоремы 5.1. $\square$

* * *

Более глубокие свойства алгебр $\{R(O)\}$ уже не удастся установить путем их прямого анализа, поскольку для него не выработано никакой эффективной методики. Во всех методах исследования алгебраической структуры свободного поля непосредственно используется не сеть $\{R(O)\}$, а сеть алгебр, отвечающих областям B евклидова пространства $\mathbf{R}^3$. Это пространство рассматривается как гиперплоскость $S_0 \subset M$, и соответственно описание свободного поля с помощью сети $\{R(O)\}$ $O \in V(M)$ называют ковариантной формулировкой, а с помощью сети $\{R(B)\}$ $B \in \mathbf{R}^3$ — формулировкой при равных временах или же при фиксированном времени. Разумеется, для произвольного вайтмановского поля (и даже, как мы увидим, для обобщенных свободных полей) такая формулировка, вообще говоря, отсутствует: ее существование обеспечивается лишь тем, что поле $A(f)$ удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона, и потому для него можно корректно определить "канонические поля" φ, π — поле и его производную по времени, взятые в начальный момент. Эти канонические поля порождают алгебры $R(B)$ точно так же, как поле $A(f)$ порождает алгебры $R(O)$; и понятно, что, зная связь между $A(f)$ и φ, π , можно установить и связь между сетями $\{R(B)\}$ и $\{R(O)\}$, с тем чтобы по структуре первой делать выводы о структуре второй. Для изучения же алгебр $\{R(B)\}$ возможно применять мощную технику теории канонических систем.

(Стоит напомнить здесь, что существование канонических переменных отличает не только класс свободных систем, но и значительно более широкий класс гамильтоновых систем. Поэтому во всех случаях, когда квантовополевая система может быть корректно представлена в гамильтоновой форме, — иными словами, во всех моделях конструктивной теории поля — возникает алгебраический формализм, весьма близкий к описываемому ниже и обладающий почти тем же комплексом результатов, включая связь "ковариантной" и "канонической" сетей и дуальность для локальных алгебр [Dr5; Su], но исключая (пока?) результаты о типе последних [ГД, § 8 – 10].)

По определению каноническое поле и канонический импульс, отвечающие явно ковариантному полю $A(f)$, задаются формулами

$$\varphi(h_f) = A(f), \quad \pi(h_f) = A(\dot{f}), \quad (9.3)$$

где $\dot{f} = \partial f / \partial x^0$, $\tilde{h}_f(p) = \tilde{f}(\tilde{\omega}, p)$. Если здесь $f \in S_R(\mathbf{R}^4)$, то $h_f \in S_R(\mathbf{R}^3)$; иначе говоря, формулы (9.3) задают два различных отображения δ_0, δ_1 из

$S_R(\mathbf{R}^4)$ в $S_R(\mathbf{R}^3)$, имеющие в импульсном представлении следующий явный вид:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\delta_0 f})(\mathbf{p}) &= \widetilde{f}(\widetilde{\omega}, \mathbf{p}), \\ (\widetilde{\delta_1 f})(\mathbf{p}) &= (i\widetilde{\omega})^{-1} \widetilde{f}(\widetilde{\omega}, \mathbf{p}).\end{aligned}\tag{9.4}$$

Для полного задания операторнозначных обобщенных функций $\varphi(h)$, $\pi(g)$ нужно продолжить эти отображения с $S_R(\mathbf{R}^4)$ на $\hat{L}(\mathbf{R}^4)$. С этой целью разобьем $S_R(\mathbf{R}^4)$ на подпространства функций, четных и нечетных по переменной x^0 :

$$S_R(\mathbf{R}^4) = S^+(\mathbf{R}^4) \dot{+} S^-(\mathbf{R}^4),\tag{9.5}$$

где

$$\begin{aligned}S^\pm(\mathbf{R}^4) &= \left\{ f \in S_R(\mathbf{R}^4) \mid f(x) = \right. \\ &= g_\pm(x) \equiv \frac{1}{2} (g(x^0, \mathbf{x}) \pm g(-x^0, \mathbf{x})), \quad g \in S_R(\mathbf{R}^4) \left. \right\}\end{aligned}$$

и символ $\dot{+}$ означает, что всякая функция $f \in S_R(\mathbf{R}^4)$ однозначно представима в виде $f = f_+ + f_-$, $f_\pm \in S^\pm(\mathbf{R}^4)$. Поскольку функция Δ_1 четна, а в импульсном представлении

$$\widetilde{f}_\pm(p_0, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} (\widetilde{f}(p_0, \mathbf{p}) \pm \widetilde{f}(p_0, -\mathbf{p})),$$

то разложение (9.5) порождает ортогональное разложение

$$\hat{L}(\mathbf{R}^4) = \hat{L}^+(\mathbf{R}^4) \oplus \hat{L}^-(\mathbf{R}^4),$$

причем $\hat{L}^- = \beta \hat{L}^+$. Из свойств четности, обеспечиваемых вещественностью функций f :

$$\widetilde{f}_\pm(p_0, \mathbf{p}) = \pm \widetilde{f}_\pm(-p_0, \mathbf{p}),\tag{9.6}$$

вытекает, что отображения (9.4) будут однозначными по модулю $S_0(\mathbf{R}^4)$, если их определять с какой-либо одной из компонент S^+ или S^- ; удобно δ_0 определять на S^+ , а δ_1 — на S^- , и затем продолжать их соответственно на $\hat{L}^+$ и $\hat{L}^-$. Введем на $S_R(\mathbf{R}^3)$ скалярные произведения:

$$(h, g)_\varphi = (\omega^{-1/2} h, \omega^{-1/2} g) = \int \frac{d^3 p}{\widetilde{\omega}} \overline{\widetilde{h}(\mathbf{p})} \widetilde{g}(\mathbf{p}),$$

$$(h, g)_\pi = (\omega^{1/2} h, \omega^{1/2} g) = \int d^3 p \widetilde{\omega} \overline{\widetilde{h}(\mathbf{p})} \widetilde{g}(\mathbf{p}).$$

Здесь $\omega^t = (-\Delta + m^2)^{t/2}$ — положительный оператор в $\hat{L}$, определяемый как фурье-образ оператора умножения $\widetilde{\omega}^t = (p^2 + m^2)^{t/2}$; область его, очевидно, включает $S_R(\mathbf{R}^3)$. В силу (9.6) при $f_1, f_2 \in \hat{L}^+$ или $f_1, f_2 \in \hat{L}^-$ имеет место равенство

$$(f_1, f_2)_{\hat{L}} = (h_{f_1}, h_{f_2})_\varphi.$$

Отсюда следует, что δ_0 и δ_1 продолжаются до (обозначаемых теми же символами) изометрических отображений:

$$\delta_0: \hat{L}^+(\mathbf{R}^4) \rightarrow L_\varphi(\mathbf{R}^3) \equiv \overline{S_R(\mathbf{R}^3)}^{\|\cdot\|_\varphi},$$

$$\delta_1: \hat{L}^-(\mathbf{R}^4) \rightarrow L_\pi(\mathbf{R}^3) \equiv \overline{S_R(\mathbf{R}^3)}^{\|\cdot\|_\pi}.$$

Введенные здесь пространства L_φ и L_π принадлежат детально изученному классу пространств Соболева $\mathcal{L}_\alpha^p$ с дробным индексом α , совпадая с $\mathcal{L}_{-1/2}^2(\mathbf{R}^3)$ и $\mathcal{L}_{1/2}^2(\mathbf{R}^3)$ соответственно (см. [[Ст]]). Оператор ω , рассматриваемый в пространстве $L_\varphi \oplus L_\pi$, осуществляет изометрическое отображение L_π на L_φ . Продолженные отображения δ_0, δ_1 позволяют определить канонические поля φ, π как самосопряженные операторы в прежнем пространстве состояний $\mathcal{H}_F(\hat{L})$:

$$\forall_{h \in L_\varphi(\mathbf{R}^3)} \varphi(h) = \overline{A(\delta_0^{-1}h)}, \quad \forall_{g \in L_\pi(\mathbf{R}^3)} \pi(g) = \overline{A(\delta_1^{-1}g)}.$$

Обратное соответствие, как следует из этих определений, имеет вид

$$\forall_{f \in \hat{L}(\mathbf{R}^4)} \overline{A(f)} = \varphi(\delta_0 f_+) + \pi(\delta_1 f_-), \quad (9.7)$$

из которого ясно, что система операторов φ, π является неприводимой. С учетом вещественности функций h, g , изометричности отображений δ_0, δ_1 и формул $\delta_0 \beta \delta_1^{-1} = -\omega, \delta_1 \beta \delta_0^{-1} = \omega^{-1}$, получаем перестановочные соотношения для системы φ, π

$$\begin{aligned} [\varphi(h_1), \varphi(h_2)] &= [\pi(g_1), \pi(g_2)] = 0, \\ [\varphi(h), \pi(g)] &= (h, \omega g)_\varphi = (h, g). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Самосопряженные операторы $\varphi(h), \pi(g)$ порождают вейлевские формы $U(h) = \exp[i\varphi(h)], V(g) = \exp[i\pi(g)]$, сильно непрерывные по отношению к топологиям L_φ, L_π соответственно. С их помощью, аналогично определению 9.1, можно сопоставить каждой паре подпространств $K_\varphi \subset L_\varphi, K_\pi \subset L_\pi$ вейлевскую алгебру над одночастичным пространством L_φ :

$$R(K_\varphi, \omega K_\pi) = \{U(h), V(g) \mid h \in K_\varphi, \omega g \in \omega K_\pi\}''.$$

Отсюда, чтобы ввести локальную алгебру для области $B \subset \mathbf{R}^3$, достаточно определить для этой области пару "локальных подпространств" типа пары K_φ, K_π . В случае нерелятивистского формализма вторичного квантования над одночастичным подпространством $L^2(\mathbf{R}^3, d^3x)$ (получаемого из релятивистского формализма при $\omega \equiv I$), имеется единое локальное подпространство $K_\varphi = K_\pi = L^2(B)$, порождающее простейшую и удобнейшую структуру:

$$L^2(\mathbf{R}^3) = L^2(B) \oplus L^2(B^\perp), \quad L^2(B)^\perp = L^2(B^\perp), \quad B^\perp \equiv \mathbf{R}^3 \setminus B. \quad (9.9)$$

При $\omega \neq I$ K_φ, K_π должны быть подпространствами пространств Соболева дробного индекса L_φ, L_π . Локальные подпространства таких пространств

строятся следующей процедурой. Пусть B — область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно гладкой границей, и пусть также заданы канонические вложения

$$j_1: L_\pi(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3), \quad j_2: L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L_\varphi(\mathbb{R}^3).$$

Тогда положим

$$L_\varphi(B) \doteq \overline{j_2 L^2(B)}^{\|\cdot\|_\varphi}, \quad L_\pi(B) \doteq j_1^{-1}(j_1 L_\pi(\mathbb{R}^3) \cap L^2(B)).$$

Как легко видеть, этим определениям равносильны

$$L_\pi(B) = \{g \in L_\pi(\mathbb{R}^3) \mid \text{supp } g \subset \text{int } B\},$$

$$L_\varphi(B) = \{h \in L_\varphi(\mathbb{R}^3) \mid (\omega^{-1/2} h, \omega^{1/2} g) = 0 \quad \forall g \in L_\pi(B^\perp)\}.$$

Нетрудно также проверить, что выполняются весьма важные соотношения

$$\omega L_\pi(B)^\perp = L_\varphi(B^\perp), \quad \omega L_\pi(B^\perp) = L_\varphi(B)^\perp, \quad (9.10)$$

хотя ввиду нелокальности оператора ω для L_φ и L_π не имеет места структура (9.9), и из $\omega L_\pi(\mathbb{R}^3) = L_\varphi(\mathbb{R}^3)$ отнюдь не следует $\omega L_\pi(B) = L_\varphi(B)$. Более того, как показали Сигал и Гудмен [SG], ω даже является "анти-локальным" оператором в том смысле, что для любой функции $g \in L_\pi(B)$ функция ωg не может обращаться в 0 в полной окрестности ни одной точки $x \in B^\perp$. Отсюда вытекает, что $\omega L_\pi(B) \cap L_\varphi(B) = \{0\}$. Мы увидим вскоре, что наряду с (9.10) это — одно из ключевых свойств модели, определяющих структуру ее локальных алгебр. Пока же сформулируем

О п р е д е л е н и е 9.2. Для одновременной формулировки модели свободного поля $A(f)$ будем называть *локальной алгеброй измеримой по Лебегу области $B \subset \mathbb{R}^3$ вейлевскую алгебру*

$$R_{\varphi, \pi}(B) \doteq R(L_\varphi(B), \omega L_\pi(B)).$$

Введенная система алгебр обладает свойствами изотонии, сильной аддитивности и локальности в нековариантной форме

$$R_{\varphi, \pi}(B_1) \subset R_{\varphi, \pi}(B_2)' \quad \text{при} \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset \quad (9.11)$$

и отвечающая ей глобальная алгебра неприводима:

$$R_{\varphi, \pi} \equiv \left\{ \bigcup_{B \subset \mathbb{R}^3} R_{\varphi, \pi}(B) \right\}'' = R_{\varphi, \pi}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Все эти свойства легко вытекают из (9.7), (9.8) и (9.10); сильная аддитивность проверяется так же, как для сети $\{R(O)\}$. Возможность ограничиться лишь анализом сети $\{R_{\varphi, \pi}(B)\}$ обеспечивает

П р е д л о ж е н и е 9.2. Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ — измеримая область с кусочно гладкой границей такая, что $\text{int } \bar{B} = B$, и пусть $C(B)$ — ее оболочка, выпуклая относительно светового конуса¹⁾ в пространстве Минковского:

$$C(B) = \{x \in M \mid (x - y)^2 < 0 \quad \forall y \in (M \setminus B) \cap S_0\}.$$

¹⁾ См. [[В, § 28]], где даны и другие характеристики оболочки $C(B)$. Если область B ограничена, то $C(B)$ — симметричный двойной конус, базой которого служит описанный шар B . Если же B неограничена, то $C(B)$ — неограниченная область в M , границу которой составляют гиперплоскости, касательные к световым конусам. Легко видеть, в частности, что для $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 > 0\}$, $C(B) = W_R$.

Тогда

$$R_{\varphi, \pi}(B) = R(C(B)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. Для произвольной области $O \subset M$ введем расширение $\hat{R}(O)$ алгебры $R(O)$ как проективный предел $R(\tilde{O})$ с $\tilde{O} \supset O$:

$$\hat{R}(O) = \bigcap_{\tilde{O} \supset O} R(\tilde{O}),$$

и докажем, что

$$R_{\varphi, \pi}(B) \subset \hat{R}(B) \subset \hat{R}(C(B)). \quad (9.12)$$

Второе включение — следствие изотонии. Для вывода первого убедимся сначала, что $R_{\varphi, \pi}(B)$ порождается уже подсистемой образующих $U(h), V(g)$ с $h, \omega^{-1}g \in \mathcal{D}_R(B)$. Благодаря сильной непрерывности $U(h), V(g)$ это утверждение верно, если $j_2 \mathcal{D}_R(B)$ плотно в $L_\varphi(B)$, а $j_1^{-1} \mathcal{D}_R(B)$ плотно в $L_\pi(B)$. Первое из этих свойств очевидно. Для вывода второго построим аппроксимацию произвольной функции $g \in L_\pi(B)$ функциями g_n с компактным носителем из $L_\pi(B)$. Возьмем функцию

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 1, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad p' \in \mathcal{D}_R(\mathbb{R}),$$

и для произвольных $\lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^3$ положим

$$f_{\lambda, a}(x) \equiv p((xa) - \lambda).$$

Как можно проверить, для всякой функции $g \in L_\pi(B)$ норма $\|f_{\lambda, a} g\|_\pi$ есть ограниченная функция λ , а для всякой функции

$$u(x) \in S_R(\mathbb{R}^3) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (u, f_{\lambda, a} g)_\pi = 0.$$

С учетом плотности $S_R(\mathbb{R}^3)$ в $L_\pi(\mathbb{R}^3)$ эти свойства влекут

$$L_\pi - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (1 - f_{\lambda, a}(x))g(x) = g(x).$$

Из свойств носителя $f_{\lambda, a}(x)$ видно, что хотя при любых фиксированных λ и a $\text{supp}(1 - f_{\lambda, a})$ некомпактен, но заведомо существует конечный набор $(a_1, \dots, a_n)$ такой, что

$$\text{supp} \prod_{j=1}^n (1 - f_{\lambda_j, a_j}) \subset \bigcap_{j=1}^n \text{supp}(1 - f_{\lambda_j, a_j})$$

— компактное множество. Полагая

$$g_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x) = \prod_{j=1}^n (1 - f_{\lambda_j, a_j}(x))g(x),$$

имеем искомое: $g = L_\pi - \lim_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \rightarrow \infty} g_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, где $g_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ — функции из $L_\pi(B)$

с компактным носителем.

Далее, покажем, что для всякой пары функций $h, g \in \mathcal{D}_R(B)$ можно найти последовательности $\{h_n\}, \{g_n\} \subset \hat{L}(\mathbb{R}^4)$ такие, что

$$U(h) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} W(h_n), \quad V(g) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} W(g_n). \quad (9.13)$$

Если $h_n \in \hat{L}^+$, $g_n \in \hat{L}^-$, то в силу (9.7)

$$W(h_n) = U(\delta_0 h_n), \quad W(g_n) = V(\delta_1 g_n),$$

так что (9.12) будет выполнено, если

$$\delta_0 h_n \rightarrow h, \quad \delta_1 g_n \rightarrow g \quad (9.14)$$

в какой-либо топологии, по которой операторы $U(h)$ и $V(g)$ непрерывны. Проверим, что искомые последовательности можно взять в виде

$$h_n = h_n^0(x^0)h(x), \quad g_n = g_n^0(x^0)g(x),$$

где функции h_n^0, g_n^0 таковы, что $|\tilde{h}_n^0(p_0)| \leq 1$, $|\tilde{g}_n^0(p_0)| \leq |p_0|$ и при $h \rightarrow \infty$

$$\tilde{h}_n^0(p_0) \rightarrow 1, \quad \tilde{g}_n^0(p_0) \rightarrow ip_0$$

в топологии равномерной сходимости на компактах. В самом деле, выбрать $h_n \in \hat{L}^+$, $g_n \in \hat{L}^-$ возможно, поскольку в x -представлении должно быть $h_n^0(x^0) \rightarrow \delta(x^0)$, $g_n^0(x^0) \rightarrow -\delta'(x^0)$, и обобщенные функции δ и δ' обладают нужными свойствами четности; выполнение же (9.14) для таких h_n, g_n очевидно из (9.4).

Из свойств последовательностей h_n, g_n вытекает, что для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N = N(\epsilon)$ такой, что для всех $n \geq N$ $W(h_n), W(g_n) \in R(B_\epsilon)$. $B_\epsilon = \{x \in M \mid |x^0| < \epsilon, x \in B\}$.

С учетом этого, (9.13) влечет $U(h), V(g) \in \hat{R}(B)$ для всех $h, g \in \mathcal{D}_R(B)$. Но множество таких образующих порождает $R_{\varphi, \pi}(B)$, и (9.12) доказано.

II. Усилим (9.12) до включения

$$R_{\varphi, \pi}(B) \subset R(C(B)). \quad (9.15)$$

Для этого убедимся сначала, что алгебры $R(O)$ и $R_{\varphi, \pi}(B)$ совпадают с W^* -индуктивными пределами собственных подобластей O и B :

$$R(O) = \left\{ \bigcup_{\overline{O_\alpha} \subset O} R(O_\alpha) \right\}'' , \quad R_{\varphi, \pi}(B) = \left\{ \bigcup_{\overline{B_\alpha} \subset B} R_{\varphi, \pi}(B_\alpha) \right\}'' . \quad (9.16a, б)$$

В этих равенствах нетривиально лишь включение слева направо. Для $R(O)$ оно следует из того, что для любой функции $f \in S_R(O)$ имеем $\overline{\text{supp } f} \subset O$ и, следовательно, найдется открытое множество O_α такое, что $\overline{O_\alpha} \subset O$, $\text{supp } f \subset O_\alpha$, т.е. $W(f) \in R(O_\alpha)$. Для $R_{\varphi, \pi}(B)$ напомним, что эта алгебра порождается образующими $U(h), V(g)$ с $h, g \in \mathcal{D}_R(B)$, а для области B с кусочно гладкой границей

$$\mathcal{D}_R(B) = \overline{\bigcup_{\overline{B_\alpha} \subset B} \mathcal{D}_R(B_\alpha)}.$$

Отсюда следует, что $R_{\varphi, \pi}(B)$ порождается образующими $U(h), V(g)$ с $h, g \in \mathcal{D}_R(B_\alpha)$, и (9.16) доказано.

В силу (9.16a) и определения алгебры $\hat{R}(O)$, для любой пары областей $O_1, O_2 \subset M$ таких, что $\overline{O_1} \subset O_2$, справедливо $\hat{R}(O_1) \subset R(O_2)$. С учетом этого из (9.12) для любой области B_α с $\overline{B_\alpha} \subset B$ получаем

$$R_{\varphi, \pi}(B_\alpha) \subset \hat{R}(C(B_\alpha)) \subset R(C(B)).$$

В совокупности с (9.16б) эта формула дает (9.15).

III. Осталось доказать включение, обратное к (9.15). Для этой цели найдем, как связаны между собой области локализации функции $f \in \hat{L}$ и ее образов $\delta_0 f_1$ и $\delta_1 f$. Сопоставляя функции $f \in S_R(\mathbb{R}^4)$ гладкое решение уравнения Клейна–Гордона

$$F_f(x) = \int d^4 y f(y) \Delta(x - y),$$

находим

$$F_f(0, x) = (\delta_1 f_-)(x), \quad \left(\frac{\partial F_f}{\partial x^0} \right)(0, x) = -(\delta_0 f_+)(x).$$

Учитывая, что носитель $\Delta(x - y)$ заключен в световом конусе, и за счет этого $F_f(x) = 0$ для всех $x \in (\text{supp } f)'$, получаем искомую связь между областями локализации:

$$(f \in S_R(\mathbb{R}^4), \text{supp } f \subset D) \Rightarrow \begin{cases} \text{supp } \delta_0 f_+ \subset (M \setminus D') \cap S_0, \\ \text{supp } \delta_1 f_- \subset (M \setminus D') \cap S_0 \end{cases}$$

(D — двойной конус). Отсюда, если $\text{supp } f \subset C(B_\alpha)$ и $\text{int } \overline{B_\alpha} = B_\alpha$, то $\text{supp } \delta_0 f_+, \text{supp } \delta_1 f_- \subset B_\alpha$ (следует учесть, что

$$(M \setminus C(B_\alpha))' \cap S_0 = C(B_\alpha) \cap S_0 = B_\alpha$$

лишь при условии $\text{int } \overline{B_\alpha} = B_\alpha$). Поскольку же из (9.7) следует, что для всякой $f \in S_R(\mathbb{R}^4)$

$$W(f) = U(\delta_0 f_+) V(\delta_1 f_-) \exp \left\{ \frac{1}{2} (j_2^{-1} \delta_0 f_+, j_1 \delta_1 f_-) \right\},$$

то мы получаем

$$R(C(B_\alpha)) \subset R_{\varphi, \pi}(B),$$

где B — открытая область такая, что $\overline{B_\alpha} \subset B$. Но из (9.16a) можно заключить, что при $\text{int } \overline{B} = B$ алгебры $R(C(B_\alpha))$ с $\text{int } \overline{B_\alpha} = B_\alpha$ порождают $R(C(B))$, и предложение доказано. $\square$

С л е д с т в и е. Сеть $\{R_{\varphi, \pi}(B)\}$ обладает свойством Рее–Шлидера: любой аналитический по энергии вектор является бициклическим для алгебры $R_{\varphi, \pi}(B)$, если B удовлетворяет условиям предложения 9.2.

Таким образом, наша задача свелась (в существенном) к изучению сети $\{R_{\varphi, \pi}(B)\}$. Согласно § 3 нам нужно выяснить строение центра локальной алгебры $R_{\varphi, \pi}(B)$, тип этой алгебры, а также выполнимость причинных соотношений, главными из которых являются дуальность и причинная независимость. По опыту гл. 1 следует также ожидать, что наименьшую сложность представляет вопрос о центре локальной алгебры. Это ожидание оправдывается: для нашей модели данный вопрос решается тривиально.

П р е д л о ж е н и е 9.3. Пусть B — измеримая область из $\mathbb{R}^3$. Тогда алгебры $R_{\varphi, \pi}(B)$ и $R(C(B))$ являются факторами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу локальности (9.11) алгебры $R_{\varphi, \pi}(B)$ и $R_{\varphi, \pi}(B^\perp)$ взаимно коммутируют; благодаря сильной аддитивности они порождают $R_{\varphi, \pi}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Поэтому они образуют факторизацию и, следовательно, являются факторами [[Н, § 34.4]]. $\square$

Сделаем два замечания. Во-первых, для ковариантной сети мы получили факторность только для алгебр $R(O)$ с $O = C(B)$ или $O = (a, \Lambda)C(B)$, $(a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$; возможность же $\mathcal{L}(O) \neq \mathcal{C}(\mathcal{H})$ для областей O более общего вида остается вполне открытой. Во-вторых, факторность может не иметь места и для вейлевской алгебры $R(K_1, K_2) = \{U(h), V(g) \mid h \in K_1, \omega g \in K_2\}''$, когда пара K_1, K_2 подпространств одночастичного пространства L_φ отлична от $L_\varphi(B), \omega L_\pi(B)$. Центр произвольной такой

алгебры найти также несложно [А3, § 5]: образуя попарные пересечения квартета подпространств $K_1, K_2, K_1^\perp, K_2^\perp$ и представляя одночастичное пространство в виде прямой суммы таких пересечений, мы стандартным путем получаем представление фоковского пространства в виде тензорного произведения, где каждый сомножитель отвечает одному из слагаемых прямой суммы. В возникающем представлении вейлевской алгебры центр каждого из сомножителей легко вычисляется, и мы находим, что центр $R(K_1, K_2)$ равен алгебре $R(K_1 \cap K_2^\perp, K_2 \cap K_1^\perp)$, откуда необходимым и достаточным условием факторности $R(K_1, K_2)$ оказывается

$$K_1 \cap K_2^\perp = K_2 \cap K_1^\perp = \{0\}.$$

Напротив, вопрос о типе локальной алгебры оказывается самым сложным. Разумеется, конечный ответ здесь прост и общеизвестен: все алгебры $R_{\varphi, \pi}(B)$ имеют тип III. Однако оба существующих доказательства этого результата [А7; DA2] достаточно громоздки и опираются на аппарат бесконечных тензорных произведений, до сих пор не вводившийся в нашей книге. В качестве некоторой компенсации переформулировка модели на базе этого аппарата позволит нам совсем просто, почти что "заодно", вывести и свойство дуальности локальных алгебр. К тому же данный аппарат давно применяется в исследованиях канонических систем (см., например, [[Э, гл. 3]]), а нам потребуются лишь его начальные элементы.

Чтобы определить бесконечное тензорное произведение гильбертовых пространств $\mathcal{H}_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$, $\text{card } \Gamma \geq \aleph_0$), необходимо задать набор $\Omega = \{\Omega_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ единичных векторов $\Omega_\gamma \in \mathcal{H}_\gamma$. По данному набору определяется множество всех наборов $\xi = \{\xi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\xi_\gamma \in \mathcal{H}_\gamma$ таких, что $\xi_\gamma = \Omega_\gamma$ при всех $\gamma \in \Gamma$ за вычетом конечного числа значений. Это множество является векторным пространством с естественными операциями

$$c_1 \xi + c_2 \eta = \{c_1 \xi_\gamma + c_2 \eta_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Вводя для его элементов обозначение $\xi = \bigotimes_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma$ и наделяя его скалярным

произведением:

$$\left(\bigotimes_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma, \bigotimes_{\gamma \in \Gamma} \eta_\gamma \right) \doteq \prod_{\gamma \in \Gamma} (\xi_\gamma, \eta_\gamma),$$

мы затем совершаем пополнение по возникающей норме и получаем гильбертово пространство, которое обозначается $\bigotimes_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{H}_\gamma$ и называется бесконечным тензорным произведением (или же неполным прямым произведением по терминологии фон Неймана) гильбертовых пространств $\mathcal{H}_\gamma$.

Пусть, далее, $\{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ — набор алгебр фон Неймана, действующих в $\mathcal{H}_\gamma$. Рассмотрим множество всех наборов $A = \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, где $A_\gamma \in R_\gamma$ и $A_\gamma = I_\gamma$ при всех $\gamma \in \Gamma$, за вычетом конечного числа значений (I_γ — единичный оператор в $\mathcal{H}_\gamma$). Каждый элемент этого множества однозначно

определяет оператор в $\mathcal{H} = \bigotimes_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{H}_\gamma$, действующий на элементах $\bigotimes_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma$

согласно

$$A \otimes_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma \doteq \otimes_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \xi_\gamma$$

и продолжимый по непрерывности на $\mathcal{H}$. Обозначая такие операторы символом $\otimes_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, мы наделяем их множеством структурой $*$ -алгебры, полагая

$$\left(\otimes_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right) \left(\otimes_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \right) \doteq \otimes_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma B_\gamma, \quad \left(\otimes_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)^* = \otimes_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^*.$$

Замыкая эту $*$ -алгебру в слабой топологии $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, мы получим алгебру

фон Неймана в $\mathcal{H}$, которая обозначается $\otimes_{\gamma \in \Gamma}^{\Omega} R_\gamma$ и называется *бесконечным тензорным произведением алгебр фон Неймана* R_γ . Свойства этой алгебры существенно зависят от выбора вектора $\Omega = \otimes_{\gamma \in \Gamma} \Omega_\gamma$ (что будет

видно и в рассматриваемых ниже примерах); однако во всех случаях, если

R_γ — факторы, то и $R = \otimes_{\gamma \in \Gamma}^{\Omega} R_\gamma$ — также фактор [[БР, с. 153]].

Возвращаясь к модели свободного скалярного поля, сформулируем основное утверждение о ее свойствах.

Т е о р е м а 9.4. *Для любой измеримой области $B \subset \mathbb{R}^3$ алгебра $R_{\varphi, \pi}(B)$ является фактором типа III и удовлетворяет условию дуальности*

$$R_{\varphi, \pi}(B) = R_{\varphi, \pi}(B^\perp)'.$$

Эти же свойства справедливы для алгебр $R(D)$ двойных конусов $D \in B(M)$ в ковариантной формулировке модели.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принимая снова удобные обозначения Араки

$$R_{\varphi, \pi}(B) = R(K_1, K_2), \quad K_1 = L_\varphi(B), \quad K_2 = \omega L_\pi(B),$$

получим, согласно обещанному, представление $R(K_1, K_2)$ в виде бесконечного тензорного произведения. Стандартная процедура такова. Определим на подпространстве $K_1 \subset K \equiv L_\varphi$ оператор

$$Y: K_1 \rightarrow K_1^\perp \quad \forall_{\eta \in K_2} \quad YP_1\eta = (I - P_1)\eta,$$

где P_1 — проектор на K_1 . Оператор Y задан на множестве всех K_1 -проекций векторов из K_2 и сопоставляет K_1 -проекции каждого $\eta \in K_2$ его $K_1^\perp$ -проекцию. Если отождествить график $\Gamma(A)$ оператора A со множеством векторов $\{\xi + A\xi, \xi \in \mathcal{D}(A)\}$, то график Y есть K_2 . Свойства Y определяются геометрией пары подпространств K_1, K_2 . В нашем случае K_1 и K_2 составляют так называемую пару подпространств общего положения, т.е. для квартета подпространств $K_1, K_2, K_1^\perp, K_2^\perp$ все попарные пересечения тривиальны; действительно,

$$K_1 \cap K_2^\perp = K_2 \cap K_1^\perp = \{0\}$$

в силу (9.10), а

$$K_1 \cap K_2 = K_1^\perp \cap K_2^\perp = \{0\}$$

в силу антилокальности оператора ω . Это геометрическое свойство играет ключевую роль для алгебраической структуры модели: именно на нем основывается и факторность $R_{\varphi, \pi}(B)$ (что мы уже видели) и другие структурные свойства. Ближайшим же образом, из него вытекают свойства Y : как легко убедиться,

за счет $K_2 \cap K_1^\perp = \{0\}$ Y корректно определен и замкнут;

за счет $K_1 \cap K_2^\perp = \{0\}$ область Y плотна в K_1 ;

за счет $K_1^\perp \cap K_2^\perp = \{0\}$ область значений Y плотна в $K_1^\perp$;

за счет $K_1 \cap K_2 = \{0\}$ нуль-пространство Y тривиально.

Отсюда следует, что существует сопряженный оператор Y^* с плотной областью в $K_1^\perp$, оператор $\alpha = Y^*Y$ положителен и Y обладает полярным разложением

$$Y = U\alpha^{1/2},$$

где U — изометрический оператор из K_1 в $K_1^\perp$, $\alpha^{1/2}$ — положительный оператор в K_1 ($\alpha^{1/2} > 0$).

В дальнейшей части доказательства следуем Делл'Антонио [DA 2, § 9]. Применим к $\alpha^{1/2}$ следующую лемму фон Неймана:

Любой самосопряженный оператор A в сепарабельном гильбертовом пространстве можно представить в виде

$$A = A_d + A_c,$$

где A_d — самосопряженный оператор с чисто дискретным спектром, который совпадает с A на подпространстве дискретного спектра A , а A_c есть оператор Гильберта—Шмидта.

В силу этой леммы, $\alpha^{1/2} = \alpha_d^{1/2} + \alpha_c^{1/2}$, и в подпространстве K_1 существует ортонормированный базис $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ из собственных векторов оператора $\alpha_d^{1/2}$; обозначим $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ соответствующий набор собственных значений (среди которых отдельные могут совпадать). Обозначая, далее, $\{h_i\}$ одномерное подпространство орта h_i , получаем разложения нашего квантета подпространств по степеням свободы:

$$\begin{aligned} K_1 &= \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \{h_i\}, \quad K_2 = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \{h_i + Yh_i\}, \\ K_1^\perp &= \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \{Uh_i\}, \quad K_2^\perp = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \{Uh_i - Y^*Uh_i\} \end{aligned} \quad (9.17)$$

(только последняя формула тут требует небольшой выкладки). Отсюда стандартные соображения непрерывности дают

$$R_{\varphi, \pi}(B) = R(K_1, K_2) = \{U(h_i), V(h_i + Yh_i), i \in \mathbb{N}\}'' \quad (9.18)$$

и, аналогично (с учетом (9.10)),

$$R_{\varphi, \pi}(B^\perp) = R(K_2^\perp, K_1^\perp) = \{U(Uh_i - Y^*Uh_i), V(Uh_i), i \in \mathbb{N}\}'' \quad (9.19)$$

Прямые суммы (9.17) в одночастичном пространстве K должны приводить к представлениям фоковского пространства $\mathcal{H}_F(K)$ и факторов $R_{\varphi, \pi}(B)$, $R_{\varphi, \pi}(B^\perp)$ в виде бесконечных тензорных произведений. Однако получить вполне строгие представления нужного вида, для которого имеются критерии принадлежности к определенному типу, не совсем просто.

Введем канонические переменные (операторы рождения-уничтожения) $\hat{a}_i^\# = (\hat{a}(h_i), \hat{a}(h_i)^*)$, отвечающие паре $U(h_i), V(h_i)$ вейлевских операторов:

$$\hat{a}(h_i) + \hat{a}(h_i)^* = s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow 0} (U(\lambda h_i) - I)/\lambda,$$

$$\hat{a}(h_i) - \hat{a}(h_i)^* = s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow 0} (V(\lambda h_i) - I)/\lambda.$$

Тогда операторы $a_i^\#$, определяемые формулой

$$a_i = \hat{a}\left(h_i + \frac{1}{2} Y h_i\right) - \frac{1}{2} \hat{a}^*(Y h_i), \quad (9.20)$$

канонически соответствуют паре $U(h_i), V(h_i + Y h_i)$ и удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям (ККС). Это означает, что данная пара вейлевских операторов реализует неприводимое представление ККС, пространство которого мы обозначим $\mathcal{H}_i^a$. Аналогично, паре $U(U h_i - Y^* U h_i), V(U h_i)$, как легко проверить, соответствуют операторы $b_i^\#$, вводимые формулой

$$b_i = \hat{a}\left(U h_i - \frac{1}{2} Y^* U h_i\right) - \frac{1}{2} \hat{a}^*(Y^* U h_i) \quad (9.21)$$

и также удовлетворяющие ККС. Тем самым последняя пара осуществляет неприводимое представление ККС в некотором пространстве $\mathcal{H}_i^b$. В пространстве же $\mathcal{H}_i^a \otimes \mathcal{H}_i^b$ неприводимым образом действует система из четырех вейлевских операторов (доопределяемых с помощью канонического изоморфизма вида $\tilde{U}(h_i) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i^a) \rightarrow \hat{U}(h_i) \otimes I_i^b$), а в бесконечном тензорном произведении $\otimes_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_i^a \otimes \mathcal{H}_i^b)$, если

только оно корректно определено, будет неприводимо действовать полная система образующих алгебр $R_{\varphi, \pi}(B)$ и $R_{\varphi, \pi}(B^\perp)$, точно так же, как она действует неприводимо в исходном $\mathcal{H}$ (напомним, что $\{R_{\varphi, \pi}(B) \cup R_{\varphi, \pi}(B^\perp)\}'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$). Поэтому мы можем отождествить $\mathcal{H}$ с пространством $\otimes_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_i^a \otimes \mathcal{H}_i^b)$, в котором вейлевские опе-

раторы имеют, очевидно, реализацию вида

$$U(h_i) = (I_1^a \otimes I_1^b) \otimes \dots \otimes (\tilde{U}(h_i) \otimes I_i^b) \otimes I_{i+1}^a \otimes \dots \quad (9.22)$$

Поскольку все фоковские столбцы (образующие плотное множество в пространстве состояний) должны иметь лишь конечное число ненулевых компонент, то корректным определением бесконечного тензорного произведения $\otimes_{i \in \mathbb{N}}$ является опре-

деление $\otimes_{i \in \mathbb{N}} = \otimes_{i \in \mathbb{N}}^\Omega$, где Ω — фоковский вакуум в $\mathcal{H}$. Однако $\mathcal{H}$ теперь реализова-

но у нас как пространство представления ККС, задаваемого каноническими переменными $\{a_i^\#, b_i^\#\}_{i \in \mathbb{N}}$, а это представление может и не иметь фоковского вакуума: при любом конечном числе N степеней свободы представление $\{a_i^\#, b_i^\#\}_{i=1}^N$ является фоковским и обладает вакуумом Ω_N ; однако для бесконечной системы фоковость не обеспечивается ни общими теоремами, ни формулами (9.20), (9.21). Поэтому в $\mathcal{H}$ строится вспомогательное представление ККС, вообще говоря, уже не связанное с алгебрами $R_{\varphi, \pi}(B)$ и $R_{\varphi, \pi}(B^\perp)$, но зато обладающее несложно проверяемым свойством фоковости. В этом представлении, как и в исходном, каждой степени свободы $i \in \mathbb{N}$ сопоставляются две пары вейлевских операторов U_i^A, V_i^A и U_i^B, V_i^B , определяемых с помощью формул

$$U_i^A = U(h_i), \quad V_i^A = V(h_i + Y h_i - \lambda_i U h_i), \quad (9.23)$$

$$U_i^B = U(U h_i - Y^* U h_i + \lambda_i h_i), \quad V_i^B = V(U h_i).$$

Легко проверить, что этой системе отвечают канонические переменные

$$A_i = \hat{a} \left(h_i + \frac{1}{2} Y h_i - \frac{1}{2} \lambda_i U h_i \right) - \frac{1}{2} \hat{a}^* (Y h_i - \lambda_i U h_i),$$

$$B_i = \hat{a} \left(U h_i - \frac{1}{2} Y^* U h_i + \frac{1}{2} \lambda_i h_i \right) - \frac{1}{2} \hat{a}^* (Y^* U h_i - \lambda_i h_i),$$

удовлетворяющие ККС, но, вообще говоря, не аннулирующие исходный вакуумный вектор $\Omega \in \mathcal{H}$, для которого

$$\hat{a}(h_i) \Omega = \hat{a}(U h_i) \Omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Чтобы доказать, что представление (9.23), тем не менее, является фоковским, определим в $\mathcal{H}$ аппроксимирующую фоковскую систему $\{A_i^{N\#}, B_i^{N\#}\}$, совпадающую с $\{A_i^\#, B_i^\#\}$ до N степеней свободы включительно:

$$A_i^N = \begin{cases} A_i, & i \leq N, \\ \hat{a}(h_i), & i > N, \end{cases} \quad B_i^N = \begin{cases} B_i, & i \leq N, \\ \hat{a}(U h_i), & i > N. \end{cases}$$

Ясно, что эта система определяет в $\mathcal{H}$ неприводимое представление ККС, и это представление – фоковское, ибо фоковской является "бесконечная часть" системы:

$$A_i^N \Omega = B_i^N \Omega = 0 \quad \forall i > N,$$

а любая "конечная часть" всегда эквивалентна фоковскому представлению. Таким образом, в $\mathcal{H}$ существует фоковский вакуум Ω_N данной системы, и нам достаточно доказать, что последовательность $\{\Omega_N\}_{N=1}^\infty$ имеет предел в $\mathcal{H}$ при $N \rightarrow \infty$. Этому требованию эквивалентно

$$\lim_{\substack{M, N \rightarrow \infty \\ N > M}} \|\Omega_N - \Omega_M\|^2 = 2 \lim_{\substack{M, N \rightarrow \infty \\ M < N}} (1 - \operatorname{Re}(\Omega_M, \Omega_N)) = 0.$$

Расчет по стандартной технике формализма вторичного квантования (ср. [DA 2, § 3]) дает, что последнее условие будет выполнено, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Y h_i - \lambda_i U h_i\|^2 < \infty \quad (9.24)$$

(где $\|\cdot\|$, в отличие от предыдущей формулы, есть норма в одночастичном пространстве). Вспоминая, что $Y = U(\alpha_d^{1/2} + \alpha_c^{1/2})$ и $\lambda_i h_i = \alpha_d^{1/2} h_i$, имеем $Y h_i - \lambda_i U h_i = U \alpha_c^{1/2} h_i$, причем по лемме фон Неймана, $\operatorname{Tr} \alpha_c < \infty$, что в точности совпадает с условием (9.24). Получаемый в пределе вектор $\Omega' = \lim_{N \rightarrow \infty} \Omega_N$ служит фоковским вакуумом системы (9.23).

По вектору Ω' построим бесконечное тензорное произведение $\tilde{\mathcal{H}}$ пространств $\tilde{\mathcal{H}}_i = \mathcal{H}_i^A \otimes \mathcal{H}_i^B$ (где $\mathcal{H}_i^A, \mathcal{H}_i^B$ – пространства представлений ККС, отвечающих операторам $A_i^\#, B_i^\#$ соответственно):

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{H}}_i, \quad \Omega' = \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \Omega'_i, \quad \Omega'_i = \Omega_{A_i} \otimes \Omega_{B_i}. \quad (9.25)$$

Заметим, что согласно определениям (9.23), вейлевские формы $U_i^{A,B}, V_i^{A,B}$ являются функциями вейлевских форм $U_i^{a,b}, V_i^{a,b}$, отвечающих операторам $a_i^\#, b_i^\#$:

$$U_i^A = U_i^a, \quad V_i^A = V_i^a (V_i^b)^{-\lambda_i}, \quad U_i^B = U_i^b (U_i^a)^{\lambda_i}, \quad V_i^B = V_i^b, \quad (9.26)$$

как и обратно, $U_i^{a,b}, V_i^{a,b}$ можно отсюда выразить как функции от $U_i^{A,B}, V_i^{A,B}$ (с тем же фиксированным индексом i). Поэтому и благодаря тому, что для конечного числа степеней свободы все представления ККС фоковские, мы можем отождест-

ВИТЬ

$$\mathcal{H}_i^A \otimes \mathcal{H}_i^B = \mathcal{H}_i^a \otimes \mathcal{H}_i^b. \quad (9.27)$$

Это значит, что в (9.25) можно полагать $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$, и формулы (9.25) дают искомое представление $\mathcal{H}$ в виде бесконечного тензорного произведения, приспособленное к разложению $R^3 = B \cup B^\perp$. В полученной реализации $\mathcal{H}$ образующие локальных алгебр $R_{\varphi, \pi}(B)$ и $R_{\varphi, \pi}(B^\perp)$, согласно (9.18), (9.19) и (9.22), имеют вид:

$$\begin{aligned} U(h_i) &= (I_1^a \otimes I_1^b) \otimes \dots \otimes (U_i^a \otimes I_i^b) \otimes I_{i+1}^a \otimes \dots, \\ V(h_i + Yh_i) &= I_1^a \otimes \dots \otimes (V_i^a \otimes I_i^b) \otimes I_{i+1}^a \otimes \dots, \\ U(Uh_i - Y^*h_i) &= I_1^a \otimes \dots \otimes (I_i^a \otimes U_i^b) \otimes I_{i+1}^a \otimes \dots, \\ V(Uh_i) &= I_1^a \otimes \dots \otimes (I_i^a \otimes V_i^b) \otimes I_{i+1}^a \otimes \dots \end{aligned}$$

Тем самым получены и представления для локальных алгебр

$$\begin{aligned} R_{\varphi, \pi}(B) &= \bigotimes_{i \in \mathbb{N}}^{\Omega'} \mathcal{B}(\mathcal{H}_i^a) \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H}_i^b) = \{ \mathcal{C}(\mathcal{H}_1^a) \otimes \dots \otimes (\mathcal{B}(\mathcal{H}_i^a) \otimes \\ &\otimes \mathcal{C}(\mathcal{H}_i^b)) \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H}_{i+1}^a) \otimes \dots, i = 1, 2, \dots \} ", \\ R_{\varphi, \pi}(B^\perp) &= \bigotimes_{i \in \mathbb{N}}^{\Omega'} \mathcal{C}(\mathcal{H}_i^a) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_i^b) = \{ \mathcal{C}(\mathcal{H}_1^a) \otimes \dots \otimes (\mathcal{C}(\mathcal{H}_i^a) \otimes \\ &\otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_i^b)) \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H}_{i+1}^a) \otimes \dots, i = 1, 2, \dots \} ". \end{aligned} \quad (9.28)$$

Эти-то представления и составляют цель наших усилий. Они чрезвычайно содержательны. Прежде всего, мы сразу имеем из них дуальность: она, как видим, здесь совпадает с теоремой о коммутанте $((\bigotimes_i R_i)' = \bigotimes_i R_i')$,

которая для алгебр такого вида была установлена еще самим фон Нейманом [vN2]. Далее, достаточно полную информацию мы получаем и о структуре алгебры. Алгебры (9.28) — гиперфинитные факторы, которые изучались в целом ряде работ [vN2; Gui; Bur] и для типа которых имеются необходимые и достаточные критерии. Эти критерии выражаются в терминах свойств числовой последовательности $\{d_i\}$, составленной из расстояний d_i порождающего вектора Ω' в каждой компоненте $\mathcal{H}_i^a \otimes \mathcal{H}_i^b$ от ближайшего вектора-произведения $f_i \otimes g_i$:

$$d_i = \inf_{f_i \in \mathcal{H}_i^a \cap S_1, g_i \in \mathcal{H}_i^b \cap S_1} \|\Omega' - f_i \otimes g_i\|.$$

Согласно [vN2; Bur] алгебры вида (9.28) — типа I, если $\sum_{i=1}^{\infty} d_i < \infty$, и типа

III в остальных случаях. Для нашей конструкции, как легко видеть, Ω' не может быть вектором-произведением: согласно (9.23) $\Omega' = \Omega_{A_i} \otimes \Omega_{B_i}$; но так как, согласно (9.26), операторы U_i^A, V_i^A зависят не только от V_i^a , но и от V_i^b , то (9.27) нельзя усилить до $\mathcal{H}_i^A = \mathcal{H}_i^a, \mathcal{H}_i^B = \mathcal{H}_i^b$. Расчет, аналогичный выводу условия (9.24), дает

$$d_i = 2(1 - 1/\sqrt{1 + \lambda_i^2}),$$

откуда, с учетом $Y = U(\alpha_d^{1/2} + \alpha_c^{1/2})$ и $\text{Tr } \alpha_c < \infty$, вытекает, что условие

$\sum_{i=1}^{\infty} d_i < \infty$ равносильно тому, что Y есть оператор Гильберта–Шмидта.

Но в нашем случае антилокальность ω влечет следующее геометрическое свойство пары подпространств K_1, K_2 : для любого $\epsilon > 0$ найдется пара векторов $\xi \in K_1, \eta \in K_2$ таких, что угол между ξ и η меньше ϵ ; отсюда в свою очередь вытекает, что область Y не может совпадать со всем K_1 , и Y — неограниченный оператор. Таким образом, факторы $R_{\varphi, \pi}(B)$ и $R_{\varphi, \pi}(B^\perp)$ — типа III, и теорема доказана. $\square$

Надо сказать, что свойство дуальности алгебр $R_{\varphi, \pi}(B)$ может быть выведено и многими другими способами. В литературе имеется ровным счетом шесть различных доказательств дуальности для этих алгебр! Из них наиболее ранние [A3, DA2] используют технику бесконечных тензорных произведений, которая казалась чрезмерно сложной, а также не допускала обобщения на иные системы, кроме (квази)свободных. Поэтому появились два других доказательства, данные Остервальдером [Os] и Ландау [L3]; они стремились главным образом к упрощению и использовали вместо бесконечных тензорных произведений разложения операторов в пространстве состояний свободного поля по нормальным произведениям полей φ, π (такие разложения, составляющие одно из традиционных средств квантовой теории поля, строго выводятся в [[Be]]). С другой стороны, развитие теории Томиты–Такесаки рождало интуицию о том, что проблема дуальности локальных алгебр, связанная со свойствами взаимной коммутативности алгебр фон Неймана, должна удобно ставиться и решаться в рамках этой теории, где с введением модулярной инволюции вопрос о связи между алгеброй фон Неймана и ее коммутантом получал исчерпывающее решение. Эта интуиция была успешно воплощена в доказательствах дуальности, данных Экманом и Остервальдером [EO] и Риффелем [Ri]; и так как модулярная структура локальных алгебр представляет самостоятельный интерес, то мы еще вернемся к этим работам.

Подчеркнем, далее, еще раз, что все результаты, получаемые для алгебр $R_{\varphi, \pi}(B)$, дают информацию о свойствах алгебр $R(O)$ только для областей-алмазов вида $D = C(B)$, $B \subset S_0$, и их преобразований Пуанкаре. В целом же строение релятивистски ковариантной сети может оказаться — и оказывается! — существенно иным, нежели строение сети $\{R_{\varphi, \pi}(B)\}$. Так, например, несложный пример Араки [A4, §7], который мы сейчас рассмотрим, показывает, что уже для простейших объединений алмазов вида $O = D_1 \cup D_2$ дуальность бывает заведомо нарушена.

Пусть

$$T_{\pm} = \{x^0 \in (\pm t_1, \pm t_2)\}, \quad T = \{x^0 \in (-t_2, t_2)\}, \quad t_2 > t_1 > 0,$$

— открытые интервалы на оси времени, растягивающие двойные конусы $C(T_+) = V_{t_1}^+ \cap V_{t_2}^-$, $C(T_-) = V_{-t_1}^- \cap V_{-t_2}^+$, $C(T) = V_{t_2}^- \cap V_{-t_2}^+$. Оба двойных конуса $C(T_+)$, $C(T_-)$ порождаются одной и той же областью (шаром) $B \subset S_0$:

$$B = \{x \in S_0 \mid |x| < \frac{\sqrt{2}}{4}(t_2 - t_1)\}.$$

Поэтому естественно ожидать, что на свойствах алгебры $R(O_0)$, где

$$O_0 = C(T_+) \cup C(T_-),$$

отразятся специфические отличия сети $\{R(O)\}$ от сети $\{R_{\varphi, \pi}(B)\}$. Такие отличия, как мы увидим, заключаются не только в нарушении дуальности.

Предложение 9.5. Для алгебры $R(O_0)$ заведомо не имеют места дуальность и теорема об алмазе ($R(O_0) \neq R(O_0'')$).

Доказательство. Нам следует рассматривать алгебры $R(O) = R(\hat{S}(O))$, являющиеся частным случаем алгебр $R(H_1)$ (см. (9.1)). Покажем, что соответствие между подпространствами $H_1 \subset \hat{L}$ и алгебрами $R(H_1)$ взаимно однозначно¹⁾:

$$R(H_1) = R(H_2) \iff H_1 = H_2. \quad (9.29)$$

Включение справа налево тривиально. Обратное включение вытекает из свойства, являющегося усилением изотонии:

$$R(H_1) \subset R(H_2) \Rightarrow H_1 \subset H_2, \quad (9.30)$$

которое мы и проверим. Если (9.30) нарушено, то для некоторой пары H_1, H_2 со свойством $R(H_1) \subset R(H_2)$ найдется функция $f \in H_2^\perp$ такая, что $f \notin H_1^\perp$, и, стало быть, для некоторой $f_1 \in H_1$ $(f_1, f)_{\hat{L}} \neq 0$. Тогда, с учетом (9.2), найдется $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого $[W(\lambda f_1), W(\beta f)] = W(\beta f)W(\lambda f_1) \{ \exp[-i\lambda(f_1, f)_{\hat{L}}] - 1 \} \neq 0$. Это означает, что $W(\beta f) \notin R(H_1)'$, хотя, очевидно, $W(\beta f) \in R(H_2)'$. Тем самым $R(H_2)' \not\subset R(H_1)'$, что противоречит $R(H_1) \subset R(H_2)$ и соотношения (9.29) и (9.30) доказаны.

Поскольку для $R(C(T))$ имеет место дуальность (теорема (9.4)), то в силу

$$O_0' = C(T)', \quad O_0'' = C(T),$$

т.е. для $R(O_0)$ утверждения дуальности и теоремы об алмазе совпадают между собой, и сильная аддитивность сети $\{R(O)\}$ влечет

$$R(O_0) = \{R(C(T_+)) \cup R(C(T_-))\}''.$$

Это значит, что и дуальность и теорема об алмазе для $R(O_0)$ нарушены, если

$$R(C(T)) \neq \{R(C(T_+)) \cup R(C(T_-))\}''.$$

В силу (9.29) для этого достаточно неравенства функциональных пространств

$$\hat{S}(C(T)) \neq \overline{\hat{S}(C(T_+)) \cup \hat{S}(C(T_-))}^{\|\cdot\|_{\hat{L}}},$$

а для него в свою очередь достаточно, если существует функция g такая, что

$$g \in (\hat{S}(C(T_+)) \cup \hat{S}(C(T_-)))^\perp, \quad g \notin \hat{S}(C(T))^\perp.$$

Чтобы построить такую функцию, рассмотрим двумерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - m^2 f = 0.$$

При любых граничных условиях $f_1(t) = f(t, 0)$, $f_2(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)$ из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ существует

единственное C^∞ -решение $f(t, x)$. По известным свойствам распространения решений $f(t, x) = 0$, если $x^2 < (t - t')^2$ при всех $t' \in (\text{supp } f_1 \cup \text{supp } f_2)$. Поэтому существует C^∞ -решение $f_0(t, x)$ такое, что $f_0(t, x) = 0$ в окрестности $C(T_+)$ и $C(T_-)$, и $f_0(t, x) \neq 0$ в окрестности некоторой точки $(t, 0)$, $|t| < t_1$. Пусть $h_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $h_1(x) = 1$ при $|x| \leq t_2$, и положим

$$g_1(x) = f_0(0, x^1)h_1(x), \quad g_2(x) = \frac{\partial f_0}{\partial t}(0, x^1)h_1(x).$$

Тогда решение уравнения Клейна–Гордона $(\square + m^2)F = 0$ с начальными данными

¹⁾ Отметим для сравнения, что, ввиду соотношений зависимости для решений волнового уравнения и для локальных алгебр (п. 3.2), соотношения $\hat{S}(O_1) = \hat{S}(O_2)$ или $R(O_1) = R(O_2)$ не всегда влекут $O_1 = O_2$.

$F(0, x) = g_1(x)$, $\dot{F}(0, x) = g_2(x)$ совпадает с функцией $f_0(x^0, x^1)$ на $C(T)$. Так как $g_1, g_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, то существует $g(x) \in S(\mathbb{R}^4)$ такая, что $\delta_1 g_- = g_1$, $\delta_0 g_+ = -g_2$ (можно взять, например,

$$\tilde{g}(p) = -\tilde{g}_2(p)\alpha(p^2) + i\tilde{\omega}\tilde{g}_1(p)\alpha(p^2)\epsilon(p_0)$$

при соответствующем выборе функции α). Тогда

$$\int d^4 y g(y) \Delta(x - y) = F(x).$$

Но по построению функция $f(x)$ равна 0 на $C(T_+) \cup C(T_-)$ и отлична от 0 в некоторой точке $C(T)$. Отсюда следует, что $\beta g \notin \hat{S}(C(T))^\perp$, но $\beta g \in (\hat{S}(C(T_+)) \cup \hat{S}(C(T_-)))^\perp$. $\square$

* * *

Перейдем к рассмотрению причинной независимости (п. 3.4). Согласно теореме 3.30 это свойство сети $\{R(O)\}$ тесно связано с серией из четырех эквивалентных структурных свойств данной сети (условия 1 — 4 теоремы 3.30), являясь следствием любого из них. Эти свойства представляют и самостоятельный интерес, и поэтому мы докажем, что в модели свободного поля они выполнены все (а с ними, конечно, и причинная независимость). Непосредственно же будет доказываться условие 4, утверждающее существование нормального факторизуемого состояния для локальных подалгебр областей $O_1 \times O_2$ или, равносильно, для алгебр $R_{\varphi, \pi}(B)$ областей $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. При этом состояния на R будет удобно рассматривать как состояния на абстрактной алгебре ККС, с тем чтобы можно было воспользоваться критериями эквивалентности и квазиэквивалентности, известными для таких состояний. Из различных существующих конструкций алгебры ККС (см., например, [Ка; М2], [[Си]], [[Э, гл. 3]]), мы, следуя Бухгольцу [Bu1], будем рассматривать "самодуальную алгебру ККС", построенную Араки и Сираиси [AS], поскольку она наиболее согласована с формализмом Араки для свободного поля.

В конструкции Араки—Сираиси алгебра ККС порождается каноническими полями

$$\Phi(F) = \varphi(h) + \pi(g) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \pi \end{pmatrix} (h \oplus g),$$

которые заданы на основных функциях

$$F = h \oplus g \in S(\mathbb{R}^3) \oplus S(\mathbb{R}^3) \equiv K$$

и рассматриваются как элементы свободной системы образующих. Эта система определяет на пространстве K основных функций оператор комплексной структуры Γ по формуле

$$\Phi(F)^* = \Phi(\Gamma F), \quad \Gamma F = \bar{F},$$

и эрмитову форму γ , задаваемую коммутатором образующих:

$$\gamma(F, G) \equiv [\Phi(F)^*, \Phi(G)] = \left(F, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} G \right),$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение на $L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ (заметим, что метрика, порождаемая формой γ , индефинитна). Совокупность всех полиномов по образующим $\Phi(F)$, которой соотнесены основное пространство K с эрмитовой формой γ и оператором комплексной структуры Γ , есть

*-алгебра с единицей, называемая "самодуальной алгеброй ККС" и обозначаемая $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$. В отличие от других алгебр ККС, это не есть нормированная алгебра, и потому состояниям ψ на $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$ отвечают такие представления π_ψ , образы которых являются Op^* -алгебрами (см. § 7). Обычным представлениям ККС соответствует класс так называемых регулярных состояний ψ на $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$, для которых операторы $\pi_\psi(\Phi(F))$ в существенном самосопряжены для всех $F \in \text{Re } K = \{G \in K \mid G = \Gamma G\}$, а вейлевские формы $W_\psi(F) = \exp\{i\pi_\psi(\Phi(F))\}$ удовлетворяют соотношениям Вейля–Сигала

$$W_\psi(F)W_\psi(G) = W_\psi(F+G)\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma(F, G)\right\}.$$

Алгебра $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$ может быть наделена системой локальных подалгебр, отвечающих областям $B \subset \mathbb{R}^3$; такие подалгебры порождаются образующими $\Phi(F)$, для которых

$$F \in K(B) = \omega^{-1/2}S(B) \oplus \omega^{1/2}S(B).$$

С учетом определений пространств $L_\varphi(B)$, $L_\pi(B)$ и свойств непрерывности вейлевских операторов отсюда следует, что если вакуумное состояние ψ_0 на $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$ регулярно, то алгебры R и $R_{\varphi, \pi}(B)$ модели свободного поля можно отождествить с алгебрами фон Неймана, которые порождаются, в смысле форм Вейля или спектральных проекций, представлением π_{ψ_0} алгебры $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$ и его сужением на $\mathfrak{A}(K(B), \gamma, \Gamma)$ соответственно. Регулярность же ψ_0 имеет место, поскольку это состояние, задающее теорию свободного поля, очевидно, является квазисвободным¹⁾, а всякое квазисвободное состояние на $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$ регулярно [AS, лемма 3.5].

Введя все эти понятия, мы можем теперь доказать

Предложение 9.6 [Bu1]. *Для любой пары двойных конусов D_1, D_2 таких, что $D_1 \nparallel D_2$, существует нормальное состояние на алгебре R , факторизуемое для подалгебр $R(D_1)$ и $R(D_2)$.*

Доказательство. Преобразование Пуанкаре можно свести пару D_1, D_2 к паре областей $C(B_1), C(B_2)$, $B_1, B_2 \subset S_0$, $d(B_1, B_2) > 0$. Обозначая $O_i = C(B_i)$, $i = 1, 2$, согласно предложению 9.2 имеем

$$R(O_i) = R_{\varphi, \pi}(B_i), \quad i = 1, 2.$$

Будем поэтому доказывать существование нормального состояния на R , факторизуемого для подалгебр $R_{\varphi, \pi}(B_1)$ и $R_{\varphi, \pi}(B_2)$. Если ψ_0 – вакуумное состояние на R , опре-

¹⁾ Квазисвободные состояния, впервые введенные в 1965 г. Робинсоном [Ro1] – обычный и наиболее изученный класс состояний на алгебрах ККС. В общих терминах, которые сейчас для нас достаточны, их можно определить как такие функционалы на алгебре с системой образующих $A(h)$ или $W(h)$, которые однозначно определяются своими "двухточечными функциями", т.е. величинами вида $\psi(A(h_1)A(h_2))$. Общее понятие квазисвободного состояния естественно возникло на базе квантовой теории поля, в рамках которой свободные и обобщенно свободные системы выделяются по тому свойству, что для них все функции Вайтмана W_n однозначно определяются двухточечной функцией W_2 . В рамках же канонического формализма понятно, что квазисвободное состояние может быть задано билинейной формой на одночастичном пространстве $\mathcal{H}_1$, а тем самым и некоторым оператором A в $\mathcal{H}_1$, так что их изучение сводится к изучению объектов в $\mathcal{H}_1$. В частности, критерии квазиэквивалентности квазисвободных состояний (см. [Хо; vD]) обычно выражаются как требования принадлежности некоторых операторов, связанных с A , классу Гильберта–Шмидта.

делим состояние ψ_p на $*$ -алгебре $\mathcal{A}_{1,2} \equiv R_{\varphi,\pi}(B_1) \vee R_{\varphi,\pi}(B_2)$ явной формулой

$$\psi_p\left(\sum_{n=1}^N A_n B_n\right) = \sum_{n=1}^N \psi_0(A_n) \psi_0(B_n), \quad A_n \in R_{\varphi,\pi}(B_1), \quad B_n \in R_{\varphi,\pi}(B_2). \quad (9.31)$$

Чтобы доказать возможность продолжения ψ_p до нормального состояния на R , достаточно доказать, что порождаемое им представление π_p алгебры $\mathcal{A}_{1,2}$ эквивалентно представлению π_0 , которое отвечает сужению ψ_0 на $\mathcal{A}_{1,2}$. Для установления этого свойства эквивалентности мы интерпретируем ψ_0 как квазисвободное состояние на алгебре ККС $\mathfrak{U}(K, \gamma, \Gamma)$. Понятия (квази)эквивалентности, факторности и т.д. для таких состояний понимаются в смысле свойств алгебр фон Неймана, порождаемых соответствующими представлениями. Тогда его сужение на $\mathcal{A}_{1,2}$, а наряду с ним (с учетом (9.31)) и состояние ψ_p , будут квазисвободными состояниями на алгебре ККС $\mathfrak{U}(K(B_1 \cup B_2), \gamma, \Gamma)$, и мы сможем воспользоваться критерием Араки [А8] для эквивалентности таких состояний.

Чтобы сформулировать этот критерий, введем основной объект, характеризующий квазисвободное состояние на алгебре ККС. По двухточечной функции D_0 состояния ψ_0

$$D_0(F, G) \equiv \psi_0(\Phi(F)^* \Phi(G)) = \frac{1}{2} \left(F, \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} G \right) \quad (9.32)$$

определим на $K(B)$, $B = B_1 \cup B_2$, скалярное произведение

$$(F, G)_0 \equiv D_0(F, G) + D_0(\Gamma G, \Gamma F). \quad (9.33)$$

Множество $K_0(B) \equiv \overline{K(B)}^{\|\cdot\|_0}$ есть замкнутое подпространство в $L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$, и положительная форма D_0 на нем порождается положительным оператором, явный вид которого легко получить из (9.32), (9.33):

$$\forall_{F, G \in K_0(B)} \quad D_0(F, G) = (F, D_0 G)_0, \quad D_0 = \frac{1}{2} E \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} E, \quad 0 \leq D_0 \leq 1, \quad (9.34)$$

где E — проектор на $K_0(B)$. Таким образом, сужение ψ_0 на $\mathfrak{U}(K(B), \gamma, \Gamma)$ полностью определяется оператором D_0 .

Аналогично, состоянию ψ_p можно сопоставить положительный оператор D_p . За счет $d(B_1, B_2) > 0$ имеет место однозначное разложение

$$\forall_{F \in K(B)} \quad F = F_1 + F_2, \quad F_i \in K(B_i), \quad i = 1, 2.$$

Отсюда для двухточечной функции D_p состояния ψ_p имеем

$$D_p(F, G) \equiv \psi_p(\Phi(F)^* \Phi(G)) = S_0(F_1, G_1) + S_0(F_2, G_2),$$

так что на $K(B)$ можно ввести скалярное произведение

$$(F, G)_p \equiv D_p(F, G) + D_p(\Gamma G, \Gamma F) = (F_1, G_1)_0 + (F_2, G_2)_0.$$

Вводя обозначение $K_p(B) = \overline{K(B)}^{\|\cdot\|_p}$, видим отсюда, что, в смысле $(\cdot, \cdot)_p$, $K_p(B)$ есть прямая сумма $K_0(B_1)$ и $K_0(B_2)$:

$$K_p(B) = K_0(B_1) \oplus_p K_0(B_2).$$

Проекторы этого разложения обозначим Θ_1 и Θ_2 . Форма D_p на $K_p(B)$ порождается положительным оператором D_p :

$$\forall_{F, G \in K_p(B)} \quad D_p(F, G) = (F, D_p G);$$

явный вид которого нетрудно выразить через проекторы Θ_i и проекторы E_i на $K_0(B_i)$, $i = 1, 2$, в $L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$D_p = \frac{1}{2} E_1 \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} E_1 \Theta_1 + \frac{1}{2} E_2 \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} E_2 \Theta_2. \quad (9.35)$$

Сформулируем теперь критерий эквивалентности представлений π_0 и π_p алгебры $\mathfrak{U}(K(B), \gamma, \Gamma)$ [A8; Bu1]: $\pi_0 \simeq \pi_p$, если выполнены следующие условия:

- 1) операторы D_0 на $K_0(B)$ и D_p на $K_p(B)$ не имеют собственного значения $1/2$;
- 2) нормы $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_p$ эквивалентны на $K(B)$;
- 3) операторы $A_1 = (D_0 - D_p)(I - 2D_0)^{-1}$ и $A_2 = (D_0(I - D_0))^{1/2} - (D_p(I - D_p))^{1/2}$ принадлежат классу Гильберта–Шмидта в пространстве $K_0(B)^1$;
- 4) D_0 и D_p не имеют собственного значения 0.

Требуется проверить выполнение этих условий для операторов (9.34), (9.35). Согласно [A8, лемма 2.4] условие 1 равносильно факторности π_0 и π_p . Но алгебра фон Неймана, отвечающая π_0 , есть $R_{\varphi, \pi}(B)$, а отвечающая π_p , с учетом (9.31), изоморфна $R_{\varphi, \pi}(B_1) \otimes R_{\varphi, \pi}(B_2)$. В силу предложения 9.3 обе эти алгебры – факторы, и условие 1 выполнено. Далее, согласно [A8, лемма 6.2], условия 1 – 3 обеспечивают квазиэквивалентность π_0 и π_p . Поскольку же в нашем случае эти представления – факторные типа III (теорема 9.4), то их квазиэквивалентность влечет и унитарную эквивалентность [[Д, 5.6.6]], и в проверке условия 4 нет необходимости. В итоге остается проверить условия 2 и 3. Эта проверка [Bu1, леммы 3.2 и 3.3] не встречает принципиальных затруднений, однако требует громоздких расчетов. Мы опускаем их, указав только, что в них снова существенно используется разделенность областей (свойство $d(B_1, B_2) > 0$). $\square$

Как уже говорилось, предложение 9.6 фактически устанавливает для пар алгебр $R(D_1), R(D_2)$, $D_1 \# D_2$, выполнение всего комплекса свойств из теоремы 3.30. С учетом же следствия 2 из предложения 3.31, предложения 3.32 и формулы (3.47), эти свойства влекут за собой выполнение и всех прочих причинных свойств, рассматривавшихся в гл. 1. В результате имеет место

С л е д с т в и е. *Для любой пары двойных конусов $D_1 \# D_2$ локальные алгебры $R(D_1)$ и $R(D_2)$ причинно независимы (в смысле условия $(CI)_N$) и обладают свойством F. Алгебра фон Неймана, порождаемая ими, изоморфна их W^* -тензорному произведению:*

$$\overline{R(D_1) \vee R(D_2)}^w \simeq R(D_1) \bar{\otimes} R(D_2).$$

Для пары алгебр $R(D_1)$ и $R(D_2)$, а также для пар алгебр $R(D)$, $R(D')$ (D – произвольный двойной конус) выполняются строгая локальность, свойство Шлидера и расширенная локальность.

В итоге программа исследования локальных алгебр, которой мы следовали в гл. 1, полностью осуществлена. Для модели свободного поля доказано выполнение всех аксиом локальной квантовой теории и всех примыкающих к ним структурных свойств – так что эта модель успешно выступает в качестве конкретного примера, на котором проверяется непротиворечивость различных свойств и предложений, вводимых в аксиоматическом подходе. (Разумеется, существенным недостатком этого примера является его динамическая тривиальность – отсутствие взаимодействия в модели.)

В заключение отметим еще некоторые результаты, а также обобщения на другие классы свободных полей. Используемая только что техника квазисвободных представлений ККС была применена Экманом и Фрелихом [EF] для демонстрации следующего факта: системы свободных скалярных полей разных масс являются локально унитарно эквивалентными; т.е. если $\{R(O, m)\}$ – сеть, отвечающая полю массы m , то для любых $m_1, m_2 \geq 0$

¹) В этой формулировке пространства $K_0(B)$ и $K_p(B)$ отождествлены на основании условия 2; положительный корень из $D_0(I - D_0)$ понимается по отношению к $(\cdot, \cdot)_0$, а из $D_p(I - D_p)$ – по отношению к $(\cdot, \cdot)_p$.

и любого двойного конуса D

$$R(D, m_1) \simeq R(D, m_2).$$

Доказательство исходит из следующего наблюдения: если свободному полю сопоставлено определенное представление ККС, то поля разных масс отвечают представлениям, которые связаны между собой преобразованием Боголюбова. Приведем явный вид этого преобразования. Общее преобразование Боголюбова есть линейное ортогональное преобразование в одночастичном пространстве $\mathcal{H}_1$ канонической системы, сохраняющее ККС (или КАС) для операторов рождения-уничтожения $a^\#(h)$ и задаваемое парой $\beta = (\beta_+, \beta_-)$ отображений $\mathcal{H}_1$ в себя таких, что

$$\beta_+^* \beta_+ - \beta_-^* \beta_- = I, \beta_+^* \beta_- = \beta_-^* \beta_+.$$

Отображения $\beta_\pm$ определены на плотных областях $\mathcal{D}(\beta_\pm)$ в $\mathcal{H}_1$ и порождают каноническое преобразование к переменным $a_\beta^\#(h)$:

$$\begin{aligned} \forall_{h \in \mathcal{D}(\beta_\pm)} \quad a_\beta(h) &= a^*(\beta_- h) + a(\beta_+ h), \\ a_\beta^*(h) &= a^*(\beta_+ h) + a(\beta_- h). \end{aligned} \quad (9.36)$$

Если переменные $a^\#(h)$, $h \in L^2(\mathbb{R}^3)$, отвечают свободному полю массы m , то с ними связаны канонические поля, которые в данном случае обозначим φ_m, π_m :

$$\begin{aligned} \varphi_m(\omega^{-1/2} h) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a^*(\omega^{-1/2} h) + a(\omega^{-1/2} h)), \\ \pi_m(\omega^{1/2} h) &= \frac{i}{\sqrt{2}} (a^*(\omega^{1/2} h) - a(\omega^{1/2} h)) \end{aligned} \quad (9.37)$$

(в случае поля нулевой массы $\tilde{\omega} = |\mathbf{p}|$). Если же заданы два поля с массами m_1, m_2 и операторами ω_1, ω_2 , и первому из этих полей отвечают канонические переменные $a^\#(h)$, то из (9.36), (9.37) вытекает, что второму полю будут отвечать переменные $a_\beta^\#(h)$, где

$$\beta_\pm = \frac{1}{2} (\omega_2^{-1/2} \omega_1^{1/2} \pm \omega_2^{1/2} \omega_1^{-1/2}). \quad (9.38)$$

Иначе говоря, преобразование Боголюбова (9.38) индуцирует преобразование канонических полей $(\varphi_{m_1}, \pi_{m_1}) \rightarrow (\varphi_{m_2}, \pi_{m_2})$, а вместе с ним — преобразование вейлевских форм и полевых алгебр:

$$\tau_\beta: \mathcal{A}_{m_1} \rightarrow \mathcal{A}_{m_2}$$

($\mathcal{A}_{m_i}$, $i = 1, 2$, — алгебра всех локальных наблюдаемых поля массы m_i). τ_β есть обратимый гомоморфизм, который является пространственным изоморфизмом, если β — собственное каноническое преобразование, т.е., согласно известному критерию [Be], β_- есть оператор Гильберта—Шмидта. Последнее свойство не имеет места для преобразования (9.38); однако, используя технику конструктивной теории поля, Экман и Фрелих доказывают, что оператор β_- в определенном смысле является оператором Гильберта—Шмидта "локально", при сужениях на подпространства $L^2(B)$ — что и обеспечивает локальную унитарную эквивалентность двух полей.

Приведем еще, следуя Экману и Остервальдеру [ЕО], некоторые начальные сведения о модулярной структуре свободного поля. Здесь примечательно то, что эта структура оказывается вполне согласованной со структурой формализма вторичного квантования: все основные объекты модулярной теории для локальной алгебры $R_{\varphi, \pi}(B)$ в фоковском пространстве — операторы S, Δ, J и др. — имеют свои "одночастичные прообразы" — соответствующие операторы $\hat{S}, \hat{\Delta}, \hat{J}, \dots$ в одночастичном пространстве и получаются из них стандартной процедурой "вторичного квантования": $S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \hat{S}^{\otimes n}$

и т.п. Благодаря такому устройству модулярных объектов вопросы об их свойствах сводятся к изучению этих одночастичных прообразов, что упрощает анализ и открывает многие возможности.

Итак, пользуясь бициклическостью Ω для локальных алгебр, сопоставим паре $(R(K_1, K_2) = R_{\varphi, \pi}(B), \Omega)$ совершенную обобщенную гильбертову алгебру $\mathcal{U} = R(K_1, K_2)\Omega$ и операторы S, F, Δ, J (§ 1). Согласованность этих объектов с фоковской структурой пространства $\mathcal{H}$ выражает следующий основной факт [ЕО, лемма 4]:

все "n-частичные подпространства" $\mathcal{H}_n = \text{sym } \mathcal{H}_1^{\otimes n}$ фоковского пространства $\mathcal{H}$ являются инвариантными подпространствами операторов S, F, Δ, J . Это означает, что S коммутирует с проекторами P_n на $\mathcal{H}_n$:

$$P_n S \subset S P_n,$$

и определены сужения $S_n = S|_{P_n \mathcal{D}^\#}$ как замкнутые операторы в $\mathcal{H}_n$

с плотными областями $P_n \mathcal{D}^\# = \mathcal{D}^\# \cap \mathcal{H}_n$; аналогичные свойства справедливы для F и Δ , а для J имеет место

$$[J, P_n] = 0.$$

Кроме того, указанные операторы сохраняют вещественную часть $\mathcal{H}_{n,R}$ n-частичных подпространств $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n,R} + i\mathcal{H}_{n,R}$.

В силу этого результата операторы модулярной структуры полностью определяются своими сужениями $\hat{S}, \hat{F}, \hat{\Delta}, \hat{J}$ на вещественную часть $\mathcal{H}_{1,R}$ одночастичного пространства $\mathcal{H}_1$, совпадающую с пространством $K = \hat{L}_\varphi$ основных функций. При этом из доказательства также следует, что $\mathcal{D}(\hat{S}) = K_1 + K_2$.

Оказывается, далее, что "одночастичные модулярные объекты" $\hat{S}, \dots$ легко могут быть вычислены, если совершить некоторое специальное преобразование пространства K . Именно, для любой пары K_1, K_2 подпространств общего положения в K существуют гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}$ и положительный сжимающий оператор T в $\tilde{\mathcal{H}}$ со свойством $\ker T = \ker(I - T) = \{0\}$ такие, что пара K_1, K_2 унитарно эквивалентна паре $\Gamma(T), \Gamma(-T)$ подпространств $\tilde{\mathcal{H}} \oplus \tilde{\mathcal{H}}$ ($\Gamma(T)$ — график T). Отождествляя пространства K и $\tilde{\mathcal{H}} \oplus \tilde{\mathcal{H}}$, получаем следующие представления для квартета подпространств K :

$$K_1 = \begin{pmatrix} h \\ T h \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} h \\ -T h \end{pmatrix}, \quad K_1^\perp = \begin{pmatrix} -T h \\ h \end{pmatrix}, \quad K_2^\perp = \begin{pmatrix} T h \\ h \end{pmatrix}, \quad h \in \tilde{\mathcal{H}}. \quad (9.39)$$

С помощью формул

$$\varphi(h)\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} h, \quad i\pi(g)\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} g \quad (9.40)$$

находим действие оператора $\hat{S}$ в данном представлении K :

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & T^{-1} \\ T & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}^\# = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 \\ T h_2 \end{pmatrix}, \quad h_1, h_2 \in \tilde{\mathcal{H}} \right\},$$

откуда без труда получаем и выражения для других одночастичных операторов:

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Delta} = \begin{pmatrix} T^2 & 0 \\ 0 & T^{-2} \end{pmatrix}, \quad \hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.41)$$

Обратный переход к операторам в фоковском пространстве проводится с помощью (9.40). В частности, с учетом $J\Omega = \Omega$ сразу находим

$$J\varphi(h)J\Omega = \varphi(\hat{J}h)\Omega, \quad J\pi(g)J\Omega = \pi(\hat{J}g)\Omega,$$

откуда несложно получить

$$JU(h)J = U(\hat{J}h), \quad JV(g)J = V(\hat{J}g) \quad \forall h \in K_1, g \in K_2.$$

Поскольку же из (9.39) и (9.41) ясно, что $\hat{J}K_1 = K_2^\perp$, $JK_2 = K_1^\perp$, то эти начальные формулы модулярной теории в качестве своего простейшего следствия дают теорему дуальности: $R(K_1, K_2)' = R(K_2^\perp, K_1^\perp)$. Ясно (хоть это и не было проделано), что данный формализм без особого труда может быть развит и дальше, и некоторые вопросы, возникающие здесь, представляли бы интерес, например обобщение на нетривиальные локально-фоковские модели.

Как и следует ожидать, большинство изложенных результатов справедливо также для других видов свободных полей. Это обеспечивается возможностью обобщения на другие поля формализма Араки, основанного на локальных алгебрах вида $R(K_1, K_2)$. Для каждого конкретного поля такое обобщение проделывается без труда, и мы лишь бегло укажем полученные результаты.

1) Скалярное поле нулевой массы. Как отмечалось, его локальные алгебры унитарно эквивалентны для ограниченных областей локальным алгебрам массивного поля и, стало быть, имеют те же структурные свойства. Однако имеется и ряд дополнительных свойств, порождаемых физическими отличиями безмассовых систем: их масштабной и конформной симметрией, а также инфракрасными эффектами. За счет первого обстоятельства возникает двукратное вырождение вакуума [D2, S2], а также удается получить [HL] геометрическую интерпретацию модулярной структуры для алгебр $R(D)$ и $R(V_x^+)$, подобную интерпретации модулярной структуры алгебр $R(W_{R,L})$ в § 8. Второе обстоятельство сказывается на глобальной структуре. Как недавно обнаружено, квазилокальные алгебры безмассовых систем (свободных бозонов [DFG], свободных фермионов [DS1, 2; Bor2] и взаимодействующих частиц [BD]) обладают "инфракрасными представлениями": в них выполнена спектральность, но не имеется вакуума, а глобальная алгебра фон Неймана может иметь любой наперед заданный тип.

2) Поле Дирака ($s = 1/2, m > 0$). За счет наличия группы калибровочной симметрии первого рода, генерируемой оператором заряда, это — простейшая модель, в которой поля отличны от наблюдаемых ($R(O) \subsetneq F(O)$) и имеется нетривиальное правило суперотбора (по заряду) с бесконечным семейством абелевых суперотборных секторов. Для полевых алгебр в равновременной формулировке здесь выведено [DA2] представление, аналогичное (9.28), однако сомножители в бесконечном тензорном произведении теперь суть факторы типа I_2 . Отсюда доказано, что алгебра $F_{\varphi, \pi}(B)$ имеет тип I_{∞} или III. Что же касается дуальности, то для полей полуцелого спина она, конечно, не может выполняться в обычном виде. Однако, как известно (см., например, [[Й, гл.5]]), для полей с фермионной или параклеевой коммутационной структурой существуют преобразования, приводящие эту структуру к бозонному виду. Одним из видов таких преобразований является предложенное в [DHR1] преобразование кручения

$$F(O) \rightarrow F(O)',$$

определяемое тем условием, что исходная и преобразованная системы полей взаимно локальны:

$$F(O') \subset F(O)'.$$

Это условие называется "локальностью с кручением" (twisted locality), и для любого поля с нормальной или парастатистикой существует операция кручения, приводящая к его выполнению. Отсюда ясно, что для полей с полуцелым спином условие дуальности должно выполняться в форме "дуальности с кручением":

$$F(O') = F(O)'.$$

Как было замечено в [DHR1], выполнение этого условия для свободного поля с любым полуцелым спином легко вытекает из упомянутого выше аналога представления (9.28). Наконец, в работе Саммерса [Su] путем прямого обобщения методики Бухгольца (см. предложение 9.6) для полевой алгебры $F(O)$ было доказано выполнение свойства F и эквивалентных ему свойств.

Алгебры наблюдаемых поля Дирака подробно изучены в работах Дадашяна и Хоружего [ДХ1, 2; HD]. В [ДХ1] построены ковариантная и равновременная сети, доказана теорема соответствия, аналогичная предложению 9.2, а также выяснено, что для этих сетей за счет свободного характера поля выполняется аксиома слабой аддитивности, в общем случае нарушаемая для алгебр наблюдаемых ферми-систем. Структурные теоремы: принадлежность $R(D)$ типу III и выполнение условия дуальности — получены методами модулярной теории, без привлечения бесконечных тензорных произведений. В [HD] и [ДХ2] доказана причинная независимость сети $\{R(O)\}$ более простым способом, чем в предложении 9.6 для скалярного поля: сначала искомое свойство устанавливается для подалгебр $R_{\varphi}(B)$, порождаемых операторами $U(h)$ (в формулировке, использующей комплексные пространства основных функций, такие подалгебры неабелевы) и затем переносится на $R_{\varphi, \pi}(B)$ путем построения точного нормального условного ожидания $E: R_{\varphi, \pi}(B) \rightarrow R_{\varphi}(B)$.

3) Свободное электромагнитное поле. Для этого случая построен алгебраический формализм Араки [BN], однако основные структурные теоремы не установлены. В [ДХ 2] методом точного нормального условного ожидания доказана причинная независимость этого поля.

4) Поля произвольных спинов и масс бегло рассмотрены в [DA 2]. Здесь построены локальные алгебры одновременной формулировки и получены их представления, аналогичные (9.28). В случае целых спинов из этих представлений вытекает принадлежность типу III и условие дуальности для локальных алгебр; в случае же полуцелых спинов не исключается возможность типа I_∞ , а дуальность, как уже сказано, выполняется в форме дуальности с кручением.

* * *

Весьма близкий алгебраический формализм возникает при изучении обобщенных свободных полей (ОСП). Хотя в данном случае поля и их производные по времени, вообще говоря, не могут быть корректно определены при $t = 0$, но, тем не менее, c -числовой характер их перестановочных соотношений в совокупности с аксиомами Вайтмана позволяет описать эту популярную модель посредством квазисвободного представления системы Вейля—Сигала, что в свою очередь дает возможность установления основных структурных теорем.

Напомним (см. [[Й, гл. II, § 6; БЛТ, гл. 3, § 4]]), что модель ОСП может быть задана как вайтмановская теория, удовлетворяющая одному из следующих эквивалентных условий:

1) коммутатор полей кратен единичному оператору:

$$[A(f), A(g)] = c(f, g)I;$$

2) из всех усеченных функций Вайтмана W_n^{tr} только функции W_1^{tr} , W_2^{tr} отличны от 0;

3) из всех усеченных функций Вайтмана только конечное число отлично от 0;

4) в импульсном пространстве найдется открытая окрестность $\mathcal{N}(p_0)$ хотя бы одной пространственноподобной точки p_0 , целиком лежащая вне носителя фурье-образа поля:

$$\text{supp } \tilde{A}(\tilde{f}) \cap \mathcal{N}(p_0) = \emptyset$$

(известен и ряд других критериев; см., например, [LT]). Как видно из условия 2, модель целиком определяется заданием функции Вайтмана W_2 (функцию W_1 без ограничения общности полагают равной 0), и формулировка модели, естественно учитывающая ее отличия, должна получаться путем теоремы реконструкции. Аксиомы Вайтмана влекут следующее представление для W_2 :

$$W_2(x - y) = \int d\mu_+(p) e^{ip(x-y)}, \quad (9.42)$$

где $\mu_+(p)$ — лоренц-инвариантная мера полиномиального роста с носителем в верхнем световом конусе. В гильбертовом пространстве, восстанавливаемом с помощью этого представления, естественно определяются унитарное непрерывное представление $U(a, \Lambda)$ группы Пуанкаре и фурье-образ $\tilde{A}(\tilde{f})$

оператора поля, причем последний оказывается самосопряжен на некоторой области $\mathcal{D}_2$ такой, что $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2 \cap \bigoplus_{n=0}^{\infty} \tilde{S}(\mathbf{R}^{4n})$ — существенная область $\tilde{A}(\tilde{f})$. С учетом $\tilde{S}(\mathbf{R}^{4n}) = S(\mathbf{R}^{4n})$, это значит, что оператор $A(f) = \tilde{A}(\tilde{f})$ при $f \in S_R(\mathbf{R}^4)$ в существенном самосопряжен на области $\mathcal{D}$.

Отсюда, мы уже можем ввести вейлевские образующие и локальные алгебры. Учтем, однако, что, поскольку оператор $A(f)$ определен через $\tilde{A}(\tilde{f})$, построенный в свою очередь по мере $\mu_+(p)$, то значения $A(f)$ должны совпадать на всех основных функциях, фурье-образы которых различаются лишь вне носителя $\mu_+(p)$. Это значит, что $A(f)$ зависит лишь от классов эквивалентности основных функций, образующих фактор-пространство $S_R(\mathbf{R}^4)/S_{\mu,0}(\mathbf{R}^4)$, где

$$S_{\mu,0}(\mathbf{R}^4) = \{f \in S_R(\mathbf{R}^4) \mid \|f\|_{\mu}^2 = \int |\tilde{f}(p)|^2 d\mu(p) = 0\}$$

и, по определению,

$$\mu(p) = \mu_+(p) + \mu_+(-p).$$

Пополняя, мы приходим к вещественному гильбертову пространству

$$\hat{L}_{\mu}(\mathbf{R}^4) = \overline{S_R(\mathbf{R}^4)/S_{\mu,0}(\mathbf{R}^4)}^{\|\cdot\|_{\mu}}$$

со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mu} = \int d\mu(p) \tilde{f}(p) \tilde{g}(p).$$

Это пространство вполне аналогично пространству $\hat{L}(\mathbf{R}^4)$ формализма Араки для свободного поля. Оператор β комплексной структуры на $\hat{L}_{\mu}$ вводится определением:

$$\forall_{f \in \hat{L}_{\mu}} (\beta \tilde{f})(p) = i\epsilon(p_0) \overline{\tilde{f}(-p)}. \quad (9.43)$$

Как нетрудно видеть, операторы $W(f) = e^{i\overline{A(f)}}$, $f \in \hat{L}_{\mu}$, осуществляют представление ККС в форме Сигала:

$$W(f)W(g) = W(f+g) \exp\left(\frac{i}{2}(f, g)_{\mu}\right),$$

и соответственно для произвольного подпространства $K \subset \hat{L}_{\mu}$ мы можем определить алгебру фон Неймана

$$R(K) = \{W(f), f \in K\}''.$$

Сопоставляя же (очевидным путем) области $O \subset M$ подпространство $K(O) \subset \hat{L}_{\mu}$, получаем определение локальных алгебр модели ОСП

$$R(O) \doteq R(K(O)),$$

полностью аналогичное определению 9.1. Область O здесь может быть и неограниченной.

Введенный набор алгебр $\{R(O)\}$ определяет в $\mathcal{H} = \mathcal{H}_F(\hat{L}_{\mu})$ теорию Хаага—Араки, удовлетворяющую аксиомам I, II, III, V, VI: выполнение этих аксиом проверяется идентично случаю свободного поля (предложение 9.1). Сеть $\{R(O)\}$ порождает неприводимую глобальную алгебру

$\mathcal{R} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, в чем легко убедиться многими способами. Заметим, например, что характеристический функционал, отвечающий системе $\{W(f)\}$, как несложно вычислить [Str 1], имеет вид

$$(\Omega, W(f) \Omega) = \exp\left(-\frac{1}{4} \|f\|_{\mu}^2\right),$$

что соответствует фоковскому состоянию и неприводимому представлению ККС [[Бе]]. Наконец, идентично выводу формулы (9.25) устанавливается ее аналог

$$R(K_1) = R(K_2) \Leftrightarrow K_1 = K_2. \quad (9.44)$$

Справедливо и большее: решетка всех подпространств K пространства $\hat{L}_{\mu}$ (с отношением дополнения $K \rightarrow \beta K^{\perp}$) изоморфна решетке алгебр фон Неймана $R(K)$, поскольку изоморфизм двух таких решеток установлен Араки [АЗ, теорема 1] для любой системы алгебр фон Неймана $R(H_1/H)$, сопоставляемых подпространствам H_1 одночастичного пространства H непрерывного представления ККС. Указанный изоморфизм является изоморфизмом структур, т.е. он включает в себя соответствие между операциями в обеих решетках, так что имеет место

$$\begin{aligned} R\left(\bigcap_i K_i\right) &= \bigcap_i R(K_i), \\ R\left(\overline{L\left\{\bigcup_i K_i\right\}}^{\|\cdot\|_{\mu}}\right) &= \left\{\bigcup_i R(K_i)\right\}'' , \end{aligned} \quad (9.45)$$

а взятию дополнения $K \rightarrow \beta K^{\perp}$ в решетке подпространств соответствует взятие коммутанта $R(K) \rightarrow R(K)'$ в решетке алгебр. Иначе говоря, во всякой регулярной системе Вейля–Сигала имеет место "абстрактная теорема дуальности" [АЗ, (3.14)]

$$R(K)' = R(\beta K^{\perp}), \quad (9.46)$$

еще не означающая, однако, дуальности для локальных алгебр, поскольку в каждом случае необходима физическая идентификация: если подпространство K отвечает области O , то какой области отвечает $\beta K^{\perp}$? Для свободного поля такую идентификацию дают формулы (9.10), а для ОСП мы получим ее в предложении 9.9.

Набор структурных теорем, полученных для модели ОСП, отнюдь не является полным: в частности, не до конца выяснены вопросы о типе $R(O)$ и о причинной независимости (хотя, без сомнения, они поддаются решению). Наличные же результаты охватывают свойства факторности, дуальности и некоторые другие причинные свойства. При выводе их обычно переходят от меры $\mu(p)$ к мере $\rho(m)$, задающей хорошо известное [[БЛТ, с. 235]] представление Челлена–Лемана для двухточечной функции:

$$W_2(x-y) = \frac{1}{i} \int_0^{\infty} \Delta_{\sqrt{\lambda}}^-(x-y) d\rho(\lambda),$$

где $\Delta_{\sqrt{\lambda}}^-$ — отрицательно-частотная функция Паули–Йордана, $\text{supp } \rho \subset \mathbf{R}_+$ и $d\rho/d\lambda \in S'(\mathbf{R}_+)$. Связь двух мер такова: при $p^2 = m^2$

$$d\mu_+(p) = \tilde{\omega}^{-1} d^3p d\rho(m).$$

В частности, в терминах меры ρ (называемой спектральной мерой Челлена–Лемана) удобно выражается критерий выполнения аксиомы IV для ОСП, который мы сейчас докажем. (Возможность нарушения примитивной причинности для ОСП была, напомним, указана еще Хаагом и Шрое-ром [HS], что и послужило доказательством независимости этой аксиомы.) Чтобы сформулировать критерий, введем для произвольного $\delta > 0$ гильбертово пространство $\mathcal{H}(\delta)$, определив его следующим образом: полагая пространство $\tilde{\mathcal{D}}((-\delta, \delta))$, состоящее из фурье-образов C^∞ -функций с носителем в $(-\delta, \delta)$, вложенным в $L^2(\mathbb{R}_+, d\rho)$, факторизуем его по подпространству $\tilde{\mathcal{D}}((-\delta, \delta))_{\rho,0}$ всех функций, равных 0 по норме $L^2(\mathbb{R}_+, d\rho)$ и затем пополним по этой норме, т.е.

$$\mathcal{H}(\delta) \doteq \overline{\tilde{\mathcal{D}}((-\delta, \delta)) / \tilde{\mathcal{D}}((-\delta, \delta))_{\rho,0}}^{\|\cdot\|_\rho}.$$

Предложение 9.7 [Mö; Str 1; Ga]. ОСП, наделенное спектральной мерой Челлена–Лемана ρ , удовлетворяет аксиоме IV тогда и только тогда, когда для любого $\delta > 0$

$$\mathcal{H}(\delta) = L^2(\mathbb{R}_+, d\rho).$$

Доказательство. Необходимость. По построению $\mathcal{H}(\delta) \subset L^2(\mathbb{R}_+, d\rho)$; взяв $f \in \mathcal{H}(\delta)^\perp$, покажем, что аксиома IV влечет $f = 0$. Используем уже известный нам (ср. предложение 3.35) прием представления изучаемой функции через граничные значения решения пятимерного волнового уравнения и сопоставим функции $f(|p|)$ обобщенную функцию над $S(\mathbb{R}^5)$:

$$\Phi(x, s) = \int d\mu(p) \epsilon(p_0) e^{ipx} f(\sqrt{p^2}) \cos(s\sqrt{p^2}), \quad (9.47)$$

удовлетворяющую уравнению

$$\left(\square_x - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) \Phi(x, s) = 0. \quad (9.48)$$

Ввиду гипоеллиптичности волнового оператора по x^0 Φ и $\dot{\Phi}$ обладают начальными значениями при $x^0 = 0$, которые лежат в $S'(x, s)$ и легко находятся:

$$\Phi|_{x^0=0} = \int d\mu(p) \epsilon(p_0) e^{-ipx} f(\sqrt{p^2}) \cos(s\sqrt{p^2}),$$

$$\dot{\Phi}|_{x^0=0} = 2i(2\pi)^3 \delta(x) \int d\rho(m) f(m) \cos(sm).$$

Здесь верхний интеграл равен 0 ввиду четности меры и нечетности подынтегральной функции; по этой же причине равны 0 все четные производные Φ по x^0 при $x^0 = 0$. Нижний интеграл проинтегрируем по s с функцией из $\mathcal{D}((-\delta, \delta))$ и также получим 0, учитывая, что интеграл по s – типа Фурье и $f \in \mathcal{H}(\delta)^\perp$; это значит, что $\Phi(x, s) = 0$ при $x^0 = 0, |s| < \delta$. Домножая $\dot{\Phi}(x, s)$ на операторы $(\partial/\partial x^0)^{2n}, n = 1, 2, \dots$, получим это свойство и для всех нечетных производных Φ по x^0 . В результате, $\Phi(x, s)$ и все ее производные по x^0 равны 0 в области $\{x^0 = 0, |s| < \delta\} \subset \mathbb{R}^5$. Но тогда по свойствам носителя решений волнового уравнения (см., например, [[B, § 32]]) $\Phi(x, s) = 0$ и в более широкой области $\{|x^0| + |s| < \delta\}$, а граничное значение Φ при $s = 0$ (существующее в S' ввиду гипоеллиптичности волнового оператора по s) будет равно 0 во временном слое $S_\delta = \{x \in M \mid |x^0| < \delta\}$. Цель перехода к пятимериию этим достигнута: мы получили

$$\int d\mu(p) \epsilon(p_0) e^{ipx} f(\sqrt{p^2}) = 0 \quad \forall x \in S_\delta.$$

Делая замену $x \rightarrow x + a, a = (0, a)$ и интегрируя по a с любой функцией $\chi \in S(\mathbb{R}^3)$, $\chi = \chi(|a|)$, находим

$$\int d\mu(p) \epsilon(p_0) e^{ipx} f(\sqrt{p^2}) \chi(|p|) = 0 \quad \forall x \in S_\delta.$$

Этот интеграл усредним с основной функцией $u(x) \in S(\mathbb{R}^4)$, что с учетом (9.43) дает

$$(\beta u, \mathcal{F}^{-1}[f\chi])_\mu = 0,$$

где $\mathcal{F}^{-1}$ – обратное преобразование Фурье. Тем самым $\mathcal{F}^{-1}[f\chi] \in \beta K(S_\delta)^\perp$. Но по аксиоме IV $R(K(S_\delta)) = R(\hat{L}_\mu)$, что в силу (9.44) влечет $\beta K(S_\delta)^\perp = K(S_\delta)^\perp = \{0\}$, откуда и $f\chi = 0$. Взяв здесь $\chi(x) = \exp(-x^2)$, получаем искомое: $f = 0$ (ибо χ не имеет нулей).

Д о с т а т о ч н о с т ь установим с помощью того же приема. При этом мы докажем более общий результат, полезный для вывода дальнейших структурных теорем. Именно, для произвольной области $O \subset M$, симметричной относительно гиперплоскости S_0 , докажем следующие свойства:

- 1) $f \in \beta K(O)^\perp$ влечет $f_\pm \in \beta K(O)^\perp$, где $f_\pm$ – четная и нечетная по x^0 компоненты f (ср. (9.5));
- 2) если для всех $\delta > 0$ $\mathcal{H}(\delta) = L^2(\mathbb{R}_+, d\rho)$, то

$$\int d^3 p e^{-ipx} \tilde{f}_+(\tilde{\omega}, p) = \int d^3 p e^{-ipx} \tilde{\omega}^{-1} \tilde{f}_-(\tilde{\omega}, p) = 0 \quad (9.49)$$

в смысле обобщенных функций из $\mathcal{D}'(O \cap S_0)$ и почти для всех m (по мере ρ).

Простой вывод свойства 1 можно проделать в качестве упражнения. Для получения 2 введем функцию $\Phi_+(x, s) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^5)$, заменяя в (9.47) $f(\sqrt{p^2})$ на $\tilde{f}_+(p)$. Эта функция также удовлетворяет (9.48) и, как легко вычислить,

$$\dot{\Phi}_+(x, s)|_{x^0=0} = 2i \int d\rho(m) d^3 p e^{-ipx} \tilde{f}_+(\tilde{\omega}, p) \cos(sm). \quad (9.50)$$

Нетрудно убедиться также, что Φ_+ и ее производные по s и $x^i, i = 1, 2, 3$, обращаются в 0 при $s = 0$ и $x \in O$: для нечетных производных по s это следует из наличия под интегралом $\sin(s\sqrt{p^2})$, а для остальных величин – из $f_+ \in \beta K(O)^\perp$.

Выберем точку $(0, x) \in O \cap S_0$. За счет открытости O найдется $\delta > 0$ такое, что декартово произведение $U \equiv (-2\delta, 2\delta) \times B_{2\delta} \subset O$, где $B_{2\delta}$ – открытый шар в S_0 , а $(-2\delta, 2\delta)$ – интервал на прямой, параллельной оси x^0 , оба с центром в $(0, x)$. Используя, как и выше, свойства носителя решений волнового уравнения, находим

$$\Phi_+(x, s) = \frac{\partial^n \Phi_+}{\partial s^n}(x, s) = 0, n = 1, 2, \dots, s = 0, x \in U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_+(x, s) = \dot{\Phi}_+(x, s) = 0, |x^0| + |s| < 2\delta, x \in B_{2\delta}.$$

Отсюда, в частности, $\dot{\Phi}_+(x, s)|_{x^0=0} = 0$ при $|s| < 2\delta$, так что интегрирование (9.50) по $d^3 x$ с функцией $g \in \mathcal{D}(B_{2\delta})$ дает

$$\int d\rho(m) \cos(sm) F_+(m, g) = 0, \quad |s| < 2\delta, \quad (9.51)$$

где, по определению,

$$F_+(m, g) = \int d^3 x g(x) F_+(m, x), \quad F_+(m, x) = \int d^3 p e^{-ipx} \tilde{f}_+(\tilde{\omega}, p).$$

Интеграл (9.51) усредним по s со сверткой (по t) функций $h \in \mathcal{D}((-\delta, \delta))$ и $\cos(tm)$, получая

$$\int d\rho(m) \cos(tm) \tilde{h}(m) F_+(m, g) = 0, \quad |t| < \delta.$$

Если $\mathcal{H}(\delta) = L^2(\mathbb{R}_+, d\rho)$, то отсюда следует, что $\tilde{h} F_+ = 0$ почти всюду по мере ρ . Но для каждого значения $m_0 \in \mathbb{R}_+$ найдется $h \in \mathcal{D}((-\delta, \delta))$ такая, что $\tilde{h}(m_0) \neq 0$, и потому $F_+(m, g) = 0$ почти для всех m по мере ρ . Поскольку же здесь g может быть любой функцией из $\mathcal{D}(B_\delta)$, а $F_+(m, g)$, как видно из определения, есть непрерывный функционал на $\mathcal{D}(B_\delta)$, то мы получаем и $F_+(m, x) = 0$ в смысле обобщенных функций из $\mathcal{D}'(B_\delta)$. Но центр шара B_δ – в произвольной точке из $O \cap S_0$, так что $F_+(m, x) = 0$ и в смысле пространства $\mathcal{D}'(O \cap S_0)$, а это совпадает с равенством (9.49) для f_+ .

Равенство (9.49) для f_- выводится аналогично, заменяя всюду f_+ на f_- . Единственное изменение – в том, что теперь $\dot{\Phi}_+(x, s)|_{x^0=0} \equiv 0$ (из свойств четности), и вместо (9.50) следует рассматривать функцию $\Phi_-(x, s)|_{x^0=0}$; за счет этого возникает дополнительный фактор $\tilde{\omega}^{-1}$ в конечной формуле (9.49).

Чтобы закончить доказательство, достаточно применить свойства 1, 2 при $O = S_\delta$. Это дает $K(S_\delta) = \hat{L}_\mu$, и, с учетом (9.44), предложение доказано. $\square$

Равенства (9.49), справедливые при фиксированном значении массы, открывают возможность использовать аппарат модели свободного поля, и в первую очередь антилокальный оператор ω и подпространства $L_\varphi(B)$, $\omega L_\pi(B)$, образующие пару подпространств общего положения в $\mathcal{H}_1$. Как мы помним, такая геометрическая структура в $\mathcal{H}_1$ непосредственно индуцировала многие структурные свойства локальных алгебр, и прежде всего факторность и дуальность.

Предложение 9.8 [Ga]. Пусть модель ОСП удовлетворяет аксиомам IV и VIa, и пусть область $O \subset M$ симметрична относительно S_0 и такова, что

$$O \cap S_0 = B_R, \quad O' \cap S_0 = \text{int } B_R^\perp$$

(B_R — шар радиуса R). Тогда алгебра $R(O)$ — фактор.

Доказательство. Согласно (9.44) – (9.46), факторность $R(O)$ равносильна свойству

$$K(O) \cap \beta K(O)^\perp = \{0\}.$$

Взяв f из левой части этого соотношения, по свойству 1 имеем $f_\pm \in \beta K(O)^\perp$, а по свойству 2 почти для всех t по мере ρ

$$\int d^3 p e^{-ipx} \tilde{f}_+(\tilde{\omega}, p) = 0, \quad x \in B_R,$$

$$\int d^3 p e^{-ipx} \tilde{\omega}^{-1} \tilde{f}_-(\tilde{\omega}, p) = 0, \quad x \in B_R.$$

Обозначая левые части этих равенств через $F_+(x)$ и $F_-(x)$ соответственно, мы видим из их свойств носителя и из сравнения норм $\|\cdot\|_\mu$, $\|\cdot\|_\varphi$ и $\|\cdot\|_\pi$, что для любого фиксированного $t > 0$

$$F_+ \in L_\varphi(B_R^\perp), \quad F_- \in L_\pi(B_R^\perp).$$

Локальность же сети $\{R(O)\}$ с учетом (9.44) и (9.46) дает

$$f_\pm \in K(O) \Rightarrow f_\pm \in \beta K(O')^\perp,$$

и, снова применяя свойство 2, находим

$$F_+ \in L_\varphi(B_R), \quad F_- \in L_\pi(B_R).$$

Таким образом,

$$F_+ \in L_\varphi(B_R) \cap L_\varphi(B_R^\perp) = \{0\}, \quad F_- \in L_\pi(B_R) \cap L_\pi(B_R^\perp) = \{0\},$$

и поскольку в носителе ρ нуль изолирован от остальной части (аксиома VIa), то путем фурье-преобразования отсюда получаем

$$f = f_+ + f_- = 0. \quad \square$$

Следствие. Для ОСП, удовлетворяющих аксиомам IV и VIa, локальные алгебры областей-цилиндров Z и двойных конусов D являются факторами.

Совершенно аналогично доказывается

Предложение 9.9 [Ga]. Пусть модель ОСП удовлетворяет аксиоме VIa. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- 1) ОСП удовлетворяет аксиоме IV;
- 2) выполняется теорема об алмазе: для всякого цилиндра Z ¹⁾

$$R(Z) = R(Z'');$$

¹⁾ Мы рассматриваем цилиндры с времениподобной осью, которую без ограничения общности можно считать параллельной оси x^0 .

3) имеет место дуальность для цилиндров:

$$R(Z)' = R(Z'),$$

и влекут свойство

4) имеет место дуальность для двойных конусов.

Доказательство. Согласно п. 3.3 импликации $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ справедливы уже и в общей аксиоматической теории; импликация $3 \rightarrow 4$ тривиальна, так как Z'' — двойной конус. Итак, достаточно вывести $1 \rightarrow 3$. Пусть Z — S_0 -симметричный цилиндр. В силу предложения 3.14 $R(Z) = R(Z_r)$, где Z_r — пространственноподобная оболочка Z (см. рис. 4). Будем доказывать включение $R(Z') \supset R(Z_r)'$, которому благодаря (9.44) — (9.46) равносильно

$$K(Z') \supset \beta K(Z_r)^\perp.$$

По свойству 1 $f \in \beta K(Z_r)^\perp$ влечет $f_\pm \in \beta K(Z_r)^\perp$. Заметим, что $f_+ \in K(Z')$, если

$$(f_+, \beta g)_\mu = 0 \quad \forall g \in \beta K(Z')^\perp,$$

причем в силу свойств четности $(f_+, \beta g_+)_\mu = 0$ для всех g_+ из $\hat{L}_\mu$. Итак, достаточно доказать, что $(f_+, \beta g_-)_\mu = 0$.

Применим свойство 2 к функциям $f_+ \in \beta K(Z_r)^\perp$ и $g_- \in \beta K(Z')^\perp$:

$$F_+(x) = \int d^3 p e^{-ipx} \tilde{f}_+(\tilde{\omega}, p) = 0, \quad |x| < R + T,$$

$$G_-(x) = \int d^3 p e^{-ipx} \tilde{\omega}^{-1} \tilde{g}_-(\tilde{\omega}, p) = 0, \quad |x| > R + T,$$

где R, T — соответственно радиус и половинная высота Z (см. рис. 4). При фиксированном $m > 0$ из определений F_+, G_- , их свойств носителя и формул (9.10) получаем

$$F_+ \in L_\varphi(B_{R+T}^\perp) = \omega L_\pi(B_{R+T})^\perp, \quad G_- \in L_\pi(B_{R+T}),$$

откуда следует, что

$$(\omega^{-1} F_+, G_-)_\pi = \int d^3 p \tilde{\omega}^{-1} \tilde{f}_+(\tilde{\omega}, p) \tilde{g}_-(\tilde{\omega}, p) = 0.$$

Интегрируя это соотношение по мере ρ , с учетом сильной спектральности получаем искомое:

$$\int d\mu_+(p) \tilde{f}_+(p) \tilde{g}_-(p) = \frac{1}{2} \int d\mu_+(p) \epsilon(p_0) \tilde{f}_+(p) \tilde{g}_-(p) = (f_+, \beta g_-)_\mu = 0.$$

Свойство $f_- \in K(Z')$ выводится аналогично. $\square$

Несколько иной способ описания ОСП, также позволяющий использовать аппарат модели свободного поля, был развит Ландау [L3]. Этот способ основан на том, что ОСП, очевидно, можно рассматривать как свободное поле с переменной массой, принимающей значения во множестве $\text{supp } \rho$, и описывать с помощью одночастичного пространства $\mathcal{H}_1$, функции которого зависят не только от x (или p), но и от m :

$$\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbf{R}^3) \otimes L^2(\mathbf{R}, d\rho(m)), \quad (9.52)$$

и канонических переменных $a^\#(h)$, $h = h(p, m)$ в фоковском пространстве $\mathcal{H}_F(\mathcal{H}_1)$:

$$[a(h_1), a^*(h_2)] = \int d^3 p d\rho(m) h_1(p, m) h_2(p, m)$$

(прочие коммутаторы равны 0). С операторами $a^\#(p, m)$ стандартно связано релятивистски ковариантное поле $A(x, m)$ и канонические поля $\varphi(x, m) = A|_{x^0=0}$, $\pi(x, m) = \dot{A}|_{x^0=0}$. Строгая запись этих условных формул (см. начало параграфа) дает, что поле A и поля φ, π определены на основных функциях из соответствующих пространств Шварца и самосопряжены в существенном при вещественных основных функциях на некоторой

области $\mathcal{D}$. Поэтому можно ввести сети локальных алгебр:

$$R^{(m)}(O) = \{ \overline{e^{iA(F)}} \mid F(x, m) \in S_R(\mathbf{R}^5), \text{supp } F \subset O \times \mathbf{R} \}, \quad (9.53)$$

$$R_{\varphi, \pi}^{(m)}(B) = \{ \overline{e^{i\varphi(H)}}, \overline{e^{i\pi(G)}} \mid H(x, m), G(x, m) \in S_R(\mathbf{R}^4), \text{supp } H, \text{supp } G \subset B \times \mathbf{R} \}.$$

Поля переменной массы обладают рядом удобных свойств, возникающих за счет того, что симметричное преобразование Фурье по массе:

$$A(x, m) \rightarrow A(x, s) = \int dm \cos(sm) A(x, m),$$

дает решение (в смысле S') пятимерного волнового уравнения

$$\left(\square_x - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) A(x, s) = 0,$$

удовлетворяющее условию $\frac{\partial}{\partial s} A(x, s) \big|_{s=0} = 0$. Различные следствия из этого

свойства обычно выводятся с помощью следующего приема: для произвольного ограниченного оператора T и векторов $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}$ определим разность

$$\Delta(x, s) = (T^* \Phi, A(x, s) \Psi) - (A(x, s) \Phi, T \Psi). \quad (9.54)$$

Тогда, как нетрудно убедиться, свойство

$$\Delta(x, s) = 0 \quad \forall (x, s) \subset O_5, \Phi, \Psi \in \mathcal{D},$$

влечет

$$T \in \{ \overline{e^{iA(\hat{F})}} \mid \hat{F} \in S_R(\mathbf{R}^5), \text{supp } \hat{F}(x, s) \subset O_5 \}',$$

где O_5 — некоторая область в $\mathbf{R}^5$. Применяя это свойство в совокупности с уже обсуждавшимися свойствами носителя S' -решений пятимерного волнового уравнения [[В, § 32]], весьма просто получаем, что для "ковариантной" и "равновременной" локальных алгебр поля с переменной массой имеет место теорема соответствия (ср. предложение 9.2)

$$R^{(m)}(C(B)) = R_{\varphi, \pi}^{(m)}(B). \quad (9.55)$$

Обычный же оператор ОСП, как легко видеть, есть граничное значение $A(x, s)$:

$$A(x) = A(x, s) \big|_{s=0},$$

и, возвращаясь к его локальным алгебрам, мы с помощью вспомогательных алгебр (9.53) можем доказать

Предложение 9.10 [L3]. Для всякого ОСП выполняется условие существенной дуальности (определение 3.2), причем

$$R(D')' = R^{(m)}(D).$$

Доказательство. Достаточно установить два факта: 1) $R^{(m)}(D')' = \tilde{R}^{(m)}(D)$; 2) $R^{(m)}(D') = R(D')$. В силу (9.55) дуальность для $R^{(m)}(D)$ равносильна дуальности для $R_{\varphi, \pi}^{(m)}(B)$. Используем теперь еще одно преимущество полей с переменной массой: их одночастичное пространство (9.52) таково, что сеть $\{R_{\varphi, \pi}^{(m)}(B)\}$ связана с решеткой его подпространств точно так же, как в случае свободного поля сеть

$\{R_{\varphi, \pi}(B)\}$ связана с решеткой подпространств пространства $\hat{L}$. Иными словами, имеет место отождествление $R_{\varphi, \pi}^{(m)}(B) = R(K_1, K_2)$, $R_{\varphi, \pi}^{(m)}(B^\perp) = R(K_2^\perp, K_1^\perp)$, и иско-
мая дуальность для $R_{\varphi, \pi}^{(m)}(B)$ получается как следствие "абстрактной теоремы дуаль-
ности" [A3, (3.19)]:

$$R(K_1, K_2)' = R(K_2^\perp, K_1^\perp).$$

Сказанное проверить несложно: в качестве K_1, K_2 теперь выступают подпространства $\overline{\omega^{\pm 1/2} S_R(B \times \mathbb{R})}^{\|\cdot\|_1}$ ($\|\cdot\|_1$ — норма в пространстве (9.52)), и выполнение для них аналога формул (9.10):

$$\overline{\omega^{1/2} S_R(B \times \mathbb{R})}^{\|\cdot\|_1} = \{\omega^{-1/2} S_R(B^\perp \times \mathbb{R})\}^\perp,$$

$$\overline{\omega^{-1/2} S_R(B \times \mathbb{R})}^{\|\cdot\|_1} = \{\omega^{1/2} S_R(B^\perp \times \mathbb{R})\}^\perp,$$

без труда проверяется с помощью (9.10) и явного вида $\|\cdot\|_1$.

Наконец, равенство $R^{(m)}(D') = R(D')$ выводится подобно (9.55). Если в (9.54) $T \in R(D)'$, то на гиперплоскости $s = 0$ $\Delta(x, s)$ обращается в 0 вместе со своей нор-
мальной производной. Отсюда по свойствам решений волнового уравнения $\Delta(x, s)|_{x^0=0} = \dot{\Delta}(x, s)|_{x^0=0} = 0$ при всех s и $x \in B^\perp$ (если $D = C(B)$). Но тогда из ос-
новного свойства $\Delta(x, s)$ (после формулы (9.54)) следует, что $T \in R_{\varphi, \pi}^{(m)}(B^\perp)'$, и в
силу (9.55) $T \in R^{(m)}(D)'$. $\square$

Поскольку всякое ОСП определяется своей мерой Челлена—Лемана ρ , то естественной характеристикой, выделяющей различные классы ОСП, являются свойства роста $\rho(m)$ при $m \rightarrow \infty$. Выполнение различных структур-
ных свойств ОСП, не гарантируемых общими аксиомами, как правило, также можно связать с определенными условиями на рост $\rho(m)$. Отметим некоторые из таких связей.

Прежде всего, особый класс составляют такие ОСП, для которых воз-
можна формулировка при равных временах, т.е. ОСП $A(f)$ и его производ-
ные по времени корректно определены в фиксированный момент $t = t_0$.
Как нетрудно увидеть (уже на формальном уровне $[A(x), \dot{A}(y)]|_{x^0=y^0} =$
 $= ic\delta(x - y)$, $c = \int_0^\infty d\rho(m)$), данному классу принадлежат те и только те
ОСП, для которых все моменты меры Челлена—Лемана являются ко-
нечными:

$$c_n = \int_0^\infty m^n d\rho(m) < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.56)$$

Можно показать [Mö], что выполнение примитивной причинности для ОСП
влечет и выполнение (9.56), тогда как обратное, вообще говоря, неверно
[Ga]. Поэтому условия, обеспечивающие примитивную причинность ОСП
(а тем самым также дуальность и теорему об алмазе для цилиндров),
более ограничительны. Имеются разнообразные варианты таких условий,
поскольку почвой для их получения служит равенство $\mathcal{H}(\delta) = L^2(\mathbb{R}_+, d\rho)$
(предложение 9.7), которое нередко возникает в задачах теории прибли-
жений и теории вероятностей и является хорошо изученным (см., напри-
мер, $[[Ax]]$). Так, одним из достаточных условий служит единственность
решения проблемы моментов для меры ρ (разумеется, еще не вытекаю-
щая из (9.56)). Известно также следующее необходимое и достаточное
условие: в классе конечных мер, которые вне конечного интервала на

R_+ абсолютно непрерывны относительно меры Лебега и монотонно убывают, мера ρ отвечает ОСП с примитивной причинностью тогда и только тогда, когда

$$\int_M^\infty dm m^{-2} \ln \frac{d\rho}{dm} = -\infty$$

для некоторого достаточно большого M . Отсюда, в частности, следует, что если мера Челлена–Лемана обладает асимптотическим поведением

$$d\rho(m) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} e^{-m^\alpha} dm,$$

то для соответствующего ОСП примитивная причинность и эквивалентные ей свойства выполняются при $\alpha \geq 1$ и нарушаются при $\alpha < 1$.

Наконец, в терминах ρ недавно были получены и некоторые критерии выполнения свойства F для ОСП [DL2]: необходимым условием (для сети $\hat{R}(D) = R(D')$) является дискретность множества $\text{supp } \rho$; достаточное условие, влекущее и причинную независимость, получается при добавлении других ограничений на это множество, в частности оно может иметь точку сгущения только на бесконечности. Эти новые результаты еще не полностью опубликованы, и мы не останавливаемся на них.

На этом мы закончим наше обсуждение моделей свободных и обобщенных свободных полей. Имеется целый ряд систем с нетривиальными взаимодействиями, для которых исследование алгебраической структуры как по технике, так и по результатам не слишком отличается от свободного случая: таковы, например, модели с классическими внешними полями ([NM, Bon] др.). Однако и для любых других систем при их строгом анализе в той или иной мере неизбежно используются методы, развитые для свободных моделей. И можно по праву сказать, что эти методы, а также общие теоремы аксиоматического подхода, суть два главных слагаемых, на которых базируется все здание алгебраической квантовой теории поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О ПОСТРОЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКИ КВАНТОВОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

Наиболее актуальной задачей алгебраической квантовой теории поля на современном этапе является ее распространение на калибровочные теории. Мы кратко касались этой задачи в § 6, подчеркивая, что обсуждаемый там метод морфизмов и коциклов применим и к таким теориям. Если, однако, мы хотим явно исследовать такие черты калибровочной теории, как свойства локальной калибровочной инвариантности, полевые уравнения, потенциалы калибровочных полей и т.п., мы должны будем обратиться сначала к вайтмановской формулировке, а в алгебраическом подходе — к формализму полевых алгебр. И здесь мы сталкиваемся с капитальной трудностью: ни этот формализм, ни вайтмановская теория в своем обычном

виде заведомо не существуют для квантовой системы с калибровочными полями. Несовместимость структуры калибровочной теории с системой аксиом Вайтмана проявляется в целом ряде фактов, которые долгое время принадлежали, как часто говорят, к "фольклору" квантовой теории, а ко второй половине 70-х гг. были закреплены в работах Ф. Строкки в виде серии теорем, теперь называемых, не без известной условности, теоремами Строкки. Первые из них демонстрируют наличие указанной несовместимости уже в простейшей теории свободного электромагнитного поля с 4-потенциалом A_μ и тензором $F_{\mu\nu}$. Пусть A_μ и $F_{\mu\nu}$ определены как вайтмановские поля с основными функциями из пространств Шварца. Тогда имеют место

Первая теорема Строкки [1]. Если потенциалы A_μ лоренц-ковариантны и $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$, то $F_{\mu\nu} \equiv 0$.

Вторая теорема Строкки [3]. Если коммутатор A_μ локален (хотя бы только в вакуумном состоянии) и $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$, то $F_{\mu\nu} \equiv 0$.

Смысл теорем очевиден: выполнение свободных уравнений Максвелла как операторных тождеств в пространстве состояний $\mathcal{H}$ исключает как лоренц-ковариантность, так и локальность 4-потенциала A_μ . Доказательства теорем не опираются на положительность метрики в $\mathcal{H}$ и потому даже в пространстве с индефинитной метрикой при локальных и лоренц-ковариантных потенциалах A_μ полевые уравнения могут выполняться только на некотором подпространстве.

Следующая теорема относится уже к электродинамике с нетривиальным взаимодействием. Пусть $j_\mu(f^\mu)$ — локальный ток, сохраняющийся ($\partial^\mu j_\mu = 0$) и определяющий оператор электрического заряда стандартным образом:

$$Q_{R,d} = \int d^4x j_0(x^0, \mathbf{x}) f_R(\mathbf{x}) f_d(x^0),$$

где

$$f_R(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{x}| < R \\ 0, & |\mathbf{x}| > R + \epsilon \end{cases}; \quad f_d(x^0) = 0, \quad |x^0| > d, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_d(t) dt = 1. \quad (\text{П1})$$

Для любого поля $\varphi(g)$, локального по отношению к j_μ , и любой основной функции $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^4)$ существует не зависящий от f_d предел $\lim_{R \rightarrow \infty} [Q_{R,d}, \varphi(g)]$, что позволяет ввести понятие заряженного поля:

говорят, что поле φ несет заряд q , если на плотном множестве в $\mathcal{H}$ и для всех $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^4)$ $\lim_{R \rightarrow \infty} [Q_{R,d}, \varphi(g)] = -q\varphi(g)$. $Q_{R,d}$ локально порождает

группу $U(1)$ калибровочных преобразований первого рода, которая действует на множестве всех полей теории нетривиально в том и только в том случае, если в числе полей имеются заряженные.

Третья теорема Строкки [4]. Пусть задана вайтмановская теория с локальным сохраняющимся током j_μ , электромагнитным полем $F_{\mu\nu}$ и произвольным семейством других локальных полей. Если j_μ порождает нетривиальный автоморфизм какой-либо локальной полевой (полиномиальной) алгебры, то в теории не могут выполняться уравнения Максвелла $\partial^\nu F_{\nu\mu} = j_\mu$.

Таким образом, в вайтмановской формулировке взаимодействующей электродинамики заряженные поля не могут быть локальными.

Наконец, в последней теореме рассматривается вайтмановская формулировка произвольной калибровочной теории. Калибровочный характер теории выражается в наличии локальной калибровочной симметрии, которая, подобно симметриям обычных, некалибровочных полей, может описываться группой автоморфизмов полиномиальной полевой алгебры. Теперь, однако, роль параметров группы выполняют произвольные функции Λ_a , $a = 1, \dots, N$ (N — размерность зарядового пространства), которые можно выбирать из класса мультипликаторов пространства Шварца. Инфинитезимальные локальные калибровочные преобразования полей системы

$$\varphi^{(i)}(g) \rightarrow \varphi^{(i)}(g) + \delta^{(\Lambda)} \varphi^{(i)}(g) \quad (\text{П2})$$

порождаются локальными генераторами $j_\mu^{(\Lambda)}(x)$:

$$\begin{aligned} \delta^{(\Lambda)} \varphi^{(i)}(g) &= i \lim_{R \rightarrow \infty} [Q_{R,d}^{(\Lambda)}, \varphi^{(i)}(g)] = \\ &= i \lim_{R \rightarrow \infty} \int d^4x [j_0^{(\Lambda)}(x), \varphi^{(i)}(g)] f_R(x) f_d(x^0), \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

где функции f_R, f_d те же, что и в (П1), и $\partial^\mu j_\mu^{(\Lambda)} = 0$. В группе локальных калибровочных преобразований имеется подгруппа калибровочных преобразований первого рода (группа внутренней симметрии), получаемых при $\Lambda_a = \text{const } \delta_{aa_0}$. Генераторы j_a^μ этой подгруппы суть локальные сохраняющиеся токи, на свойствах которых принадлежность к калибровочной теории отражается следующим образом: существует кососимметрический тензор $G_a^{\mu\nu}$ такой, что для любых векторов Φ, Ψ физических состояний

$$(\Phi, (j_a^\mu - \partial_\nu G_a^{\nu\mu}) \Psi) = 0. \quad (\text{П4})$$

Четвертая теорема Строкки [St3]. Пусть задана система вайтмановских полей с группой внутренней симметрии, которая связана с локальными калибровочными преобразованиями согласно (П4) и порождает нетривиальные автоморфизмы полевой алгебры $\mathcal{F}$. Тогда метрика пространства состояний системы не может быть положительно определенной.

В целом этот набор теорем выражает обстоятельство, давно известное по опыту электродинамики: для всякой калибровочной теории возможны многие формулировки (именуемые калибровками), различающиеся по своим физическим свойствам; но среди них заведомо нет ни одной, которая удовлетворяла бы всему набору аксиом Вайтмана, включая положительность метрики пространства состояний. В разных задачах бывают предпочтительны и разные калибровки, в зависимости от того, какими из свойств вайтмановской теории удобней пожертвовать (так, в квантовой электродинамике применяются кулоновская калибровка, нарушающая локальность и лоренц-ковариантность, но при положительной метрике $\mathcal{H}$; калибровка Гупты — Блейлера, сохраняющая локальность и лоренц-ковариантность, но при введении индефинитной метрики, и др.). Понятно, что

для целей построения строгой квантовой калибровочной теории вне теории возмущений следует выбрать формализм, где выполнены фундаментальные аксиомы локальности и релятивистской ковариантности. По теореме 4 в таком формализме пространство состояний будет обладать индефинитной метрикой, т.е. физические состояния будут принадлежать лишь некоторому подпространству $\mathcal{H}$; согласно же теоремам 1 и 2, полевые уравнения также будут выполняться лишь на некотором подпространстве.

Описанный формализм — гибрид вайтмановской теории и калибровки Гупты — Блейлера — ведет начало от работы [StW] и называется *теорией Строкки — Вайтмана*. Он задается системой полей $\varphi^{(i)}(g)$, определенных как обобщенные функции над пространством Шварца (для некоторых моделей могут требоваться другие пространства, см. [5]) и как операторы в пространстве $\mathcal{D}$ с индефинитным внутренним произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Поля подчиняются следующим аксиомам.

Р е л я т и в и с т с к а я к о в а р и а н т н о с т ь. Существует представление $U(a, \Lambda)$ собственной группы Пуанкаре в $\mathcal{D}$, операторы которого сохраняют форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и реализуют обычный закон (3.84) релятивистского преобразования полей.

Л о к а л ь н о с т ь. Поля $\varphi^{(i)}(g)$, в зависимости от своих спинов, коммутируют либо антикоммутируют на любом векторе из $\mathcal{D}$, если носители их основных функций взаимно пространственноподобны.

С у щ е с т в о в а н и е и ц и к л и ч н о с т ь в а к у у м а. В $\mathcal{D}$ существует трансляционно инвариантный вектор Ω , положительный ($\langle \Omega, \Omega \rangle > 0$) и такой, что $\mathcal{P}\Omega = \mathcal{D}$.

С п е к т р а л ь н о с т ь. Фурье-образы $\tilde{W}(q_1, \dots, q_{n-1})$ вакуумных ожиданий $W(x_1 - x_2, \dots, x_{n-1} - x_n) = \langle \Omega, \varphi^{(i_1)}(x_1) \dots \varphi^{(i_n)}(x_n) \Omega \rangle$ таковы, что их носитель по каждой из переменных лежит в $\overline{V^+}$ (из-за отсутствия спектральных разложений для операторов трансляций обычная формулировка спектральности, вообще говоря, невозможна).

Предполагается также наличие локальных калибровочных симметрий, удовлетворяющих (П2) — (П4) и таких, что векторы физических состояний в (П4) растягивают некоторое положительное подпространство $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, для которого $\Omega \in \mathcal{D}'$; $U(a, \Lambda)\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'$; $(j_a^\mu - \partial_\nu G_a^{\nu\mu})\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'$.

Как и обычная вайтмановская теория, теория Строкки — Вайтмана легко выражается как представление алгебры Борхерса $\mathcal{A}$ (§7). Представления $\mathcal{A}$ в индефинитных пространствах строятся путем обобщения конструкции ГНС для неположительных функционалов на $\mathcal{A}$ [6–8]. Произвольному эрмитову функционалу W сопоставляется представление Π , действующее в фактор-пространстве $\mathcal{D}$ алгебры $\mathcal{A}$ по идеалу $\mathcal{I}_0$ изотропных элементов: $\mathcal{D} = \mathcal{A} / \mathcal{I}_0$; $\mathcal{I}_0 = \{u \in \mathcal{A} \mid W(uv) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{A}\}$.

Билинейная форма $\langle \xi[u], \xi[v] \rangle \equiv W(v^*u)$ на $\mathcal{D}$ является индефинитной, эрмитовой и невырожденной; операторы представления определяются как обычно: $\Pi(u)\xi(v) \doteq \xi[uv] \quad \forall u, v \in \mathcal{A}$.

Желательно как технически, так и физически, чтобы на $\mathcal{D}$ можно было ввести и структуру гильбертова пространства. Ингвасоном [6] было

указано следующее необходимое и достаточное условие этого:

$$|W_{n+m}(u_n^* v_m)| \leq p_n(u_n) p_m(v_m), \quad (\text{П5})$$

где p_n — некоторая последовательность гильбертовых полунорм на $S(\mathbb{R}^{4n})$. При выполнении этой малоограничительной оценки (в теории свободного электромагнитного поля ее просто проверить) на $\mathcal{D}$ существует гильбертово внутреннее произведение $(\cdot, \cdot)$ такое, что $\langle \cdot, \cdot \rangle = (\cdot, G \cdot)$, где G — ограниченный эрмитов оператор в пространстве $\mathcal{H}$ — пополнении $\mathcal{D}$ по гильбертовой топологии. G называется *метрическим оператором*. Гильбертова структура на $\mathcal{D}$ если существует, то не единственна; в частности, всегда найдется [7] такая структура, для которой оператор G существует и ограничен; в свою очередь, для этой структуры найдется эквивалентная топология, для которой G эрмитов и унитарен, т.е. представляется в виде разности двух проекторов. В этом случае он обычно обозначается J : $J = P_+ - P_-$, $P_+ + P_- = I$, а $\mathcal{H}$ называется J -пространством или же пространством Крейна.

Таким образом, в теории Строкки — Вайтмана с условием (П5) индефинитное пространство состояний может быть реализовано как пространство Крейна. Полевые операторы $\Pi(u)$ имеют тогда два сопряженных, $\Pi(u)^0$ и $\Pi(u)^*$, по отношению к $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $(\cdot, \cdot)$ соответственно. Если алгебра $\mathcal{P} \equiv \Pi(A)$ замкнута для инволюции $\Pi(u) \rightarrow \Pi(u)^*$, она является Ор*-алгеброй; однако, вообще говоря, $\mathcal{P}$ замкнута лишь для "J-инволюции" $\Pi(u) \rightarrow \Pi(u)^0$. Такие алгебры, названные ОрJ*-алгебрами [ДХЗ], пока почти не изучены (см. [9]). Операторы $U(a, \Lambda)$ сохраняют форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathcal{D}$. Если они продолжаются на $\mathcal{H}$ с сохранением этого свойства, то называются J-унитарными и являются ограниченными; но они могут быть и неограниченными: эта возможность используется для описания эффекта конфайнмента (см. ниже). Если же $U(a, \Lambda)$ J-унитарны, то для сети ОрJ*-алгебр $\mathcal{P}(O)$ удастся [ДХЗ] обобщить формализм Бизоньяно — Вичмана (§ 8.2). Доказано также [St3], что в теории Строкки — Вайтмана существует CPT-оператор и справедлива CPT-теорема, а также и теорема Рее — Шлидера.

Поскольку индефинитное пространство $\mathcal{H}$ не может служить пространством физических состояний, одной из главных задач теории Строкки — Вайтмана оказывается построение последнего. Как было намечено еще в [StW], искомое пространство строится как подпространство $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) $\mathcal{H}'$ неотрицательно (т.е. $\mathcal{H}'$ может иметь подпространство $\mathcal{H}''$ векторов с нулевой нормой; истинные физические состояния суть векторы из фактор-пространства $\mathcal{H}'/\mathcal{H}''$).

2) На $\mathcal{H}'$ выполняются полевые уравнения типа (П4).

Поскольку в теорию вайтмановского типа заряженные поля входят явно, а не только в виде нейтральных комбинаций, то $\mathcal{H}$ должно заключать в себе как вакуумный сектор, так и все зарядовые секторы. Поэтому

3) $\mathcal{H}'$ должно включать состояния с ненулевым зарядом.

Наконец, поскольку операторы наблюдаемых и операторы $U(a, \Lambda)$ не должны выводить из множества физических состояний, имеем также

условия

$$4) U(a, \Lambda) \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}'.$$

5) $\mathfrak{A} \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}'$, где $\mathfrak{A}$ — алгебра наблюдаемых, как-либо определяемая по алгебре $\mathcal{P}$.

Построению физического пространства, удовлетворяющего условиям 1 — 5, в последние годы уделялось большое внимание в квантовой электродинамике. Центральным фактом, указывающим и главную трудность задачи, и путь для ее преодоления, является теорема об отсутствии локальных заряженных состояний [10]: любые состояния вида $F_q \Omega$, где F_q — локальное поле с зарядом $q \neq 0$, не могут лежать в $\mathcal{H}'$, и, следовательно, все физические состояния с ненулевым зарядом находятся вне области Гординга $\mathcal{D} = \mathcal{P} \Omega$. Физические заряженные состояния, таким образом, могут возникать лишь за счет операции замыкания $\mathcal{D}$. Поскольку же выбор этой операции, определяемой метрическим оператором J , весьма неоднозначен, то задача сводится к следующей: найти такой оператор J , замыкание по структуре которого давало бы состояния с ненулевым зарядом. Попытки решения этой задачи, достигающие положительного результата с помощью различных технических допущений, были проделаны в [5, 11].

Другой актуальной проблемой теории Строкки — Вайтмана является описание эффекта конфайнмента (запирания заряда) в неабелевых калибровочных теориях и прежде всего в квантовой хромодинамике. Эффект, как известно, заключается в отсутствии экспериментально детектируемых и, стало быть, асимптотических состояний с ненулевыми значениями какого-либо заряда, отвечающего неабелевой группе внутренней симметрии. Ясно, что необходимой предпосылкой такого эффекта служит невозможность обычной конструкции асимптотических состояний по Хаагу — Рюэлю [[БЛТ, гл. 4]], и потому построение его строгой теории заведомо неосуществимо в рамках стандартного вайтмановского формализма. Однако в теории Строкки — Вайтмана, если только операторы трансляций не коммутируют с метрическим оператором, исходные допущения теории Хаага — Рюэля нарушены, так что могут быть нарушены и ее выводы. В [7; St3] были указаны определенные классы представлений группы трансляций, гарантирующие подобное нарушение. Но выбором этих представлений обеспечивается, вообще говоря, лишь необходимое, а не достаточное условие конфайнмента. Действительное наличие этого эффекта было доказано лишь в недавней работе [12] для такой теории Строкки — Вайтмана, в которой не только операторы $T(a)$ не ограничены, но и закон преобразования полей при трансляциях имеет модифицированный вид.

Укажем в заключение, что, обобщая алгебру Борхерса, нетрудно получать строгие алгебраические формулировки для весьма многих типов калибровочных теорий и моделей. Так, заменяя пространство Шварца пространствами внешних форм, можно описывать теории на многообразиях, с участием гравитационного взаимодействия и т.п.; в недавней работе [13] подобное описание построено для теории Калузы — Клейна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Книги

- [[Ах]] *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965.
- [[АГ]] *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
- [[Бе]] *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1965.
- [[БЛТ]] *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
- [[БР]] *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика: C^* - и W^* -алгебры. Группы симметрии. Разложение состояний. — М.: Мир, 1982.
- [[В]] *Владимиров В.С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. — М.: Наука, 1964.
- [[ГВ]] *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Обобщенные функции, вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматгиз, 1961.
- [[Г]] *Гриб А.А.* Проблема неинвариантного вакуума в квантовой теории поля. — М.: Атомиздат, 1978.
- [[ДШ]] *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
- [[Д]] *Диксмье Ж.* C^* -алгебры и их представления. — М.: Мир, 1974.
- [[ЕКТП]] *Евклидова квантовая теория поля: марковский подход. Сб. статей.* — М.: Мир, 1978.
- [[И]] *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
- [[Й]] *Йост Р.* Общая теория квантованных полей. — М.: Мир, 1967.
- [[К]] *Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1978.
- [[КГ]] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1,2—М.: Гостехиздат, 1951.
- [[М]] *Макки Дж.* Лекции по математическим основам квантовой механики. — М.: Мир, 1965.
- [[Н]] *Наймарк М.А.* Нормированные кольца. — М.: Гостехиздат, 1956.
- [[РС]] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. — М.: Мир, 1977; Т. 2. — М.: Мир, 1978.
- [[РСН]] *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: ИЛ, 1954.
- [[Р]] *Рюль Д.* Статистическая механика. Строгие результаты. — М.: Мир, 1971.
- [[САХЧ]] *Сарымсаков Т.А., Аюпов Ш.А., Хаджиев Дж., Чилин В.И.* Упорядоченные алгебры. — Ташкент: Фан, 1983.
- [[С]] *Сигал И.* Математические проблемы релятивистской физики. — М.: Мир, 1968.
- [[Ст]] *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.
- [[СВ]] *Стритер Р., Вайтман А.* РСТ, спин и статистика и все такое. — М.: Наука, 1966.
- [[ХФ]] *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
- [[Ф]] *Функциональный анализ. Под общ. ред. С.Г. Крейна. (Справочная математическая библиотека).* — М.: Наука, 1972.

- [[Э]] Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. — М.: Мир, 1976.
- [[D]] Dixmier J. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (Algèbres de von Neumann). 2. ed. — P.: Gauthier-Villars, 1969.
- [[J]] Jauch J.M. Foundations of quantum mechanics. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968.
- [[Pe]] Pedersen G.K. C^* -algebras and their automorphism groups. — New York; San Francisco; London: Academic Press, 1979.
- [[S]] Sakai S. C^* -algebras and W^* -algebras. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- [[T1]] Takesaki M. Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, LNM, v. 128. Springer-Verlag, 1970.
- [[T2]] Takesaki M. Theory of operator algebras. I. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1979.

Статьи

- [Б] Березанский Ю.М. О самосопряженности полевых операторов и интегральных представлениях функционалов типа Уайтмана. — Укр. мат. журн., 1966, т. 18, № 3, с. 3–12.
- [Ba1] Васильев А.Н. Алгебраическая структура локальной теории поля с конечно-кратным вырождением вакуума. — Теорет. и мат. физика, 1969, т. 1, № 3, с. 305–317.
- [Ba2] Васильев А.Н. К теории представлений топологической (не-банаховой) алгебры с инволюцией. — Теорет. и мат. физика, 1970, т. 2, № 2, с. 153–168.
- [Ba3] Васильев А.Н. Алгебраические аспекты аксиоматики Вайтмана. — Теорет. и мат. физика, 1970, т. 3, № 1, с. 24–56.
- [Bo] Воронин А.В. Дискретный вакуумный суперотбор в вайтмановской теории с существенно самосопряженными полевыми операторами. — Теорет. и мат. физика, 1986, т. 66, № 1, с. 13–29.
- [BSX1,2] Воронин А.В., Сушко В.Н., Хоружий С.С. Алгебры неограниченных операторов и вакуумный суперотбор в квантовой теории поля. I. Некоторые свойства Op^* -алгебр и векторных состояний на них. — Теорет. и мат. физика, 1984, т. 59, № 1, с. 28–48. II. Математическая структура вакуумного суперотбора. — Теорет. и мат. физика, 1984, т. 60, № 3, с. 323–343.
- [Г] Гачок В.П. Самосопряженность полевых операторов и проблема моментов. — Укр. мат. журн., 1965, т. 17, № 5, с. 3–13.
- [ГД] Глимм Дж., Джаффе А. Бозонные квантовополевые модели. — В кн. Конструктивная теория поля. М.: Мир, 1977, с. 99–168.
- [Д] Дадашян К.Ю. Свойства причинности в нерелятивистских алгебраических моделях. — Теорет. и мат. физика, 1977, т. 31, № 3, с. 333–338.
- [ДХ1] Дадашян К.Ю., Хоружий С.С. Алгебры наблюдаемых свободного поля Дирака. — Теорет. и мат. физика, 1978, т. 36, № 2, с. 166–182.
- [ДХ2] Дадашян К.Ю., Хоружий С.С. Условные ожидания на алгебрах фон Неймана и причинная независимость квантованных полей. — Теорет. и мат. физика, 1981, т. 46, № 2, с. 147–156.
- [ДХ3,4] Дадашян К.Ю., Хоружий С.С. О полевых алгебрах в квантовой теории поля с индефинитной метрикой. I. — Теорет. и мат. физика, 1983, т. 54, № 1, с. 57–77. II. Формулировка модулярной теории в пространстве Понтрягина. — Теорет. и мат. физика, 1985, т. 62, № 1, с. 30–44.
- [З] Зиновьев Ю.М. СРТ-инвариантность в теории локальных наблюдаемых. — Теорет. и мат. физика, 1973, т. 16, № 1, с. 21–32.
- [ЗС] Зиновьев Ю.М., Сушко В.Н. Физические симметрии в теории локальных наблюдаемых Р-класса. — Теорет. и мат. физика, 1974, т. 18, № 1, с. 14–26.
- [Ил] Ильин В.А. Локальные сети алгебр наблюдаемых для свободного скалярного заряженного поля. — Вест. МГУ. Сер. 3, Физика, астрономия, 1979, № 2, с. 16–21.
- [ПС] Погребков А.К., Сушко В.Н. Квантовые солитоны и их связь с фермионными полями при $(\sin\varphi)_2$ -взаимодействии. — Теорет. и мат. физика, 1976, т. 26, № 3, с. 419–423.

- [ПСХ] Поливанов М.К., Сушко В.Н., Хоружий С.С. Аксиомы алгебры наблюдаемых и понятие поля. — Теорет. и мат. физика, 1973, т. 16, № 1, с. 3–19.
- [Су] Сушко В.Н. Фермизация $(\sin \varphi)_2$ -взаимодействия в ящике. — Теорет. и мат. физика, 1978, т. 37, № 2, с. 171–202.
- [СХ1,2] Сушко В.Н., Хоружий С.С. Векторные состояния на алгебрах наблюдаемых и правила суперотбора. I. Векторные состояния и гильбертово пространство. — Теорет. и мат. физика, 1970, т. 4, № 2, с. 171–192. II. Алгебраическая теория правил суперотбора. — Теорет. и мат. физика, 1970, т. 4, № 3, с. 341–359.
- [СХ3] Сушко В.Н., Хоружий С.С. Свойства прообразов векторных состояний на алгебрах наблюдаемых. — Теорет. и мат. физика, 1971, т. 8, № 3, с. 324–327.
- [СХ4] Сушко В.Н., Хоружий С.С. Локальная и асимптотическая структура квантовых систем с правилами суперотбора. — Теорет. и мат. физика, 1972, т. 13, № 3, с. 291–312.
- [СХ5] Сушко В.Н., Хоружий С.С. Прообразы векторных состояний и причинные свойства локальных алгебр. — Теорет. и мат. физика, 1973, т. 15, № 2, с. 197–206.
- [Т1] Тодоров Т.С. О полном наборе коммутирующих наблюдаемых. — Bull. de l'Inst. de Phys. et de Recherche Atomique, 1972, v. XXII, p. 119–128.
- [Т2] Тодоров Т.С. Об одном расширении теоремы Рее и Шлидера. — Докл. АН БССР 1981, т. 34, № 4, с. 491–492.
- [Ха1] Харатян С.Г. Алгебры наблюдаемых с неабелевым коммутантом и правила суперотбора. — Теорет. и мат. физика, 1973, т. 14, № 3, с. 306–313.
- [Ха2] Харатян С.Г. О связи между мультипликативными симметриями и правилами суперотбора в аксиоматике Вайтмана. — Изв. АН АрмССР. Физика, 1978, т. 13, с. 149–151.
- [Хо] Холево А.С. Обобщенно свободные состояния C^* -алгебры соотношений коммутаций. — Теорет. и мат. физика, 1971, т. 6, № 1, с. 3–20; т. 6, № 2, с. 145–150.
- [Х1] Хоружий С.С. О структуре локальных W^* -алгебр релятивистской квантовой теории. — Теорет. и мат. физика, 1970, т. 2, № 3, с. 350–360.
- [Х2] Хоружий С.С. Поля и локальные наблюдаемые в аксиоматической алгебраической теории с правилами суперотбора. — Теорет. и мат. физика, 1970, т. 5, № 1, с. 10–24.
- [Х3] Хоружий С.С. О принципе суперпозиции в алгебраической квантовой теории. — Теорет. и мат. физика, 1975, т. 23, № 2, с. 147–159.
- [Х4,5] Хоружий С.С. Поля и алгебры наблюдаемых в моделях с правилами суперотбора. I. Модель с абелевой калибровочной группой. — Теорет. и мат. физика, 1975, т. 25, № 3, с. 291–306. II. Модель с неабелевой калибровочной группой. — Теорет. и мат. физика, 1976, т. 26, № 1, с. 3–15.
- [АЕТ] Antoine J.-P., Epifanio G., Trapani C. Complete sets of unbounded observables. — Helv. Phys. Acta, 1983, v. 56, p. 1175–1186.
- [АФ] d'Antoni C., Fredenhagen K. Charges in space-like cones. — Comm. Math. Phys., 1984, v. 94, p. 537–544.
- [АЛ] d'Antoni C., Longo R. Interpolation by type I factors and the split automorphism. — J. Funct. An., 1983, v. 51, p. 361–371.
- [А1] Araki H. Einführung in die axiomatische Quantenfeldtheorie. — Lecture notes, ETH, Zürich, 1961–1962.
- [А2] Araki H. A generalization of Borchers's theorem. — Helv. Phys. Acta, 1963, v. 36, p. 132–139.
- [А3] Araki H. A lattice of von Neumann algebras associated with the quantum theory of a free Bose field. — J. Math. Phys., 1963, v. 4, № 11, p. 1343–1362.
- [А4] Araki H. Von Neumann algebras of local observables for free scalar field. — J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 1–13.
- [А5,6] Araki H. On the algebra of all local observables. — Progr. Theor. Phys., 1964, v. 32, № 5, p. 844–854; Publ. RIMS Kyoto Univ., 1964, № 5, p. 1–16.
- [А7] Araki H. Type of von Neumann algebras associated to the free field. — Progr. Theor. Phys., 1964, v. 32, № 6, p. 956–961.
- [А8] Araki H. On quasifree states of the canonical commutation relations. II. — Publ. RIMS Kyoto Univ., 1971/72, v. 7, p. 121–152.
- [А9] Araki H. Recent developments in the theory of operator algebras and their significance in theoretical physics. — Symp. Math., 1976, v. 20, p. 395–424.

- [A10] *Araki H.* On a characterization of the state space of quantum mechanics. — *Comm. Math. Phys.*, 1980, v. 75, p. 1–24.
- [A11] *Araki H.* A remark on Machida–Namiki theory of measurement. — *Progr. Theor. Phys.*, 1980, v. 64, № 3, p. 719–730.
- [AH] *Araki H., Haag R.* Collision cross-sections in terms of local observables. — *Comm. Math. Phys.*, 1967, v. 4, № 2, p. 77–91.
- [AHR] *Araki H., Hepp K., Ruelle D.* On the asymptotic behaviour of Wightman functions in space-like directions. — *Helv. Phys. Acta*, 1962, v. 35, p. 164.
- [AJ] *Araki H., Jurzak J. – P.* On a certain class of $*$ -algebras of unbounded operators. — *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 1982, v. 18, № 3, p. 1013–1044.
- [AK] *Araki H., Kishimoto A.* On clustering property. — *Rep. Math. Phys.*, 1976, v. 10, № 2, p. 275–281.
- [AS] *Araki H., Shiraishi M.* On quasifree states of the canonical commutation relations. I. — *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 1971/72, v. 7, p. 105–120.
- [AW] *Araki H., Woods E.J.* Representations of the canonical commutation relations describing a nonrelativistic infinite free Bose gas. — *J. Math. Phys.*, 1963, v. 4, № 4, p. 937–962.
- [AER] *Ascoli R., Epifanio G., Restivo A.* On the mathematical description of quantized fields. — *Comm. Math. Phys.*, 1970, v. 18, p. 291–300.
- [ATT] *Ascoli R., Teppati G., Termini S.* Some remarks about particle-antiparticle superselection rules. — *Lett. Nuovo Cim.*, 1969, v. 1, № 4, p. 223–227.
- [AsS] *Ashtekar A., Sen A.* On the role of space-time topology in quantum phenomena: superselection of charge and emergence of nontrivial vacua. — *J. Math. Phys.*, 1980, v. 21, № 3, p. 526–533.
- [AE1] *Avishai Y., Ekstein H.* Causal independence. — *Found. Phys.*, 1972, v. 2, № 4, p. 257–270.
- [AE2] *Avishai Y., Ekstein H.* Einstein's equivalence principle. An explicit statement and its derivation from special relativistic presymmetry. — *Comm. Math. Phys.*, 1974, v. 37, № 3, p. 193–220.
- [Ban] *Banai M.* Propositional systems in local field theories. — *Int. J. Theor. Phys.*, 1981, v. 20, № 3, p. 147–169.
- [Ba] *Bargmann V.* On unitary ray representations of continuous groups. — *Ann. Math.*, 1954, v. 59, № 1, p. 1–46.
- [BN] *Benfatto G., Nicolò F.* The local von Neumann algebras for the massless scalar free field and the free electromagnetic field. — *J. Math. Phys.*, 1978, v. 19, № 3, p. 653–660.
- [Be] *Berzi V.* Arveson spectral theory and C^* -algebraic Goldstone-type theorems. — *Rep. Math. Phys.*, 1979, v. 16, № 3, p. 293–304.
- [BW1] *Bisognano J.J., Wichmann E.H.* On the duality condition for a Hermitian scalar field. — *J. Math. Phys.*, 1975, v. 16, № 4, p. 985–1007.
- [BW2] *Bisognano J.J., Wichmann E.H.* On the duality condition for quantum fields. — *J. Math. Phys.*, 1976, v. 17, № 3, p. 303–321.
- [Bon] *Bongaarts P.Y.M.* The electron-positron field coupled to external electromagnetic potentials as an elementary C^* -algebra theory. — *Ann. Phys.*, 1970, v. 56, p. 108–139.
- [BS1, 2] *Bonnard J.-L., Streater R.F.* Local gauge models predicting their own superselection rules. — *Труды МИАН им. В.А. Стеклова*, 1975, т. 135, с. 81–86; *Helv. Phys. Acta*, 1976, v. 49, p. 259–267.
- [B1] *Borchers H.J.* Über die Vollständigkeit Lorentz-invarianten Felder in einen zeitartigen Röhre. — *Nuovo Cim.*, 1961, v. 19, p. 787–793.
- [B2] *Borchers H.J.* On structure of the algebra of field operators. — *Nuovo Cim.*, 1962, v. 24, № 2, p. 214–236.
- [B3] *Borchers H.J.* Field operators as C^∞ -functions in space-like directions. — *Nuovo Cim.*, 1964, v. 33, p. 1600–1613.
- [B4] *Borchers H.J.* On the structure of the algebra of field operators. II. — *Comm. Math. Phys.*, 1965, v. 1, № 1, p. 49–56.
- [B5] *Borchers H.J.* On the vacuum state in quantum field theory. — *Comm. Math. Phys.*, 1965, v. 1, № 1, p. 57–79.
- [B6] *Borchers H.J.* Local rings and the connection of spin with statistics. — *Comm. Math. Phys.*, 1965, v. 1, № 1, p. 281–307.
- [B7] *Borchers H.J.* Energy and momentum as observables in quantum field theory. — *Comm. Math. Phys.*, 1966, v. 2, № 1, p. 49–54.

- [B8] *Borchers H.J.* A remark on a theorem of B. Misra. — *Comm. Math. Phys.*, 1967, v. 4, p. 315–323.
- [B9] *Borchers H.J.* On the converse of the Reeh–Schlieder theorem. — *Comm. Math. Phys.*, 1968, v. 10, p. 269–273.
- [B10] *Borchers H.J.* On groups of automorphisms with semibounded spectrum. — In: *Systèmes à un nombre infini des degrés de liberté*. Colloque CNRS, mai 1969, v. 181, p. 125–142.
- [B11] *Borchers H.J.* On the implementability of automorphism groups. — *Comm. Math. Phys.*, 1969, v. 14, № 4, p. 305–314.
- [B12] *Borchers H.J.* Über C^* -Algebren mit lokalkompakten Symmetriegruppen. — *Nachr. Gött. Akad.*, 1973, H. 1, S. 1–18.
- [B13] *Borchers H.J.* Über Ableitungen von C^* -Algebren. — *Nachr. Gött. Akad.*, 1973, H. 2, S. 19.
- [B14] *Borchers H.J.* C^* -algebras and automorphism groups. — *Comm. Math. Phys.*, 1983, v. 88, № 2, p. 95–103.
- [B15] *Borchers H.J.* Algebras of unbounded operators in quantum field theory. — *Physica*, 1984, v. 124A, p. 127–144.
- [B16] *Borchers H.J.* Translation group and spectrum condition. — *Comm. Math. Phys.*, 1984, v. 96, № 1, p. 1–13.
- [BB] *Borchers H.J., Buchholz D.* The energy-momentum spectrum in local field theories with broken Lorentz symmetry. — *Comm. Math. Phys.*, 1985, v. 97, № 1–2, p. 169–186.
- [BHS] *Borchers H.J., Haag R., Schroer B.* The vacuum state in quantum field theory. — *Nuovo Cim.*, 1963, v. 29, № 1, p. 148–162.
- [BY1] *Borchers H.J., Yngvason J.* On the algebra of field operators. The weak commutant and integral decomposition of states. — *Comm. Math. Phys.*, 1975, v. 42, № 3, p. 231–252.
- [BY2] *Borchers H.J., Yngvason J.* Integral representations for Schwinger functionals and the moment problem over nuclear spaces. — *Comm. Math. Phys.*, 1975, v. 43, № 3, p. 255–271.
- [BY3] *Borchers H.J., Yngvason J.* Necessary and sufficient conditions for integral representations of Wightman functionals at Schwinger points. — *Comm. Math. Phys.*, 1976, v. 47, p. 197–213.
- [BZ] *Borchers H.J., Zimmermann W.* On the self-adjointness of field operators. — *Nuovo Cim.*, 1964, v. 31, № 5, p. 1047–1059.
- [Bor1] *Borek R.* Vacuum states and superselection rules in quantum field theory. — *J. Math. Phys.*, 1985, v. 26, № 1, p. 168–171.
- [Bor2] *Borek R.* Representations of the current algebra of a charged massless Dirac field. — *J. Math. Phys.*, 1985, v. 26, № 2, p. 339–344.
- [Br] *Bratteli O.* Local norm convergence of the states on the zero time Bose fields. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, v. 188, № 2, p. 269–289.
- [Bu1] *Buchholz D.* Product states for local algebras. — *Comm. Math. Phys.*, 1974, v. 36, № 4, p. 287–304.
- [Bu2] *Buchholz D.* Collision theory for massless fermions. — *Comm. Math. Phys.*, 1975, v. 42, p. 269–279.
- [Bu3] *Buchholz D.* Collision theory for waves in two dimensions and a characterization of models with trivial S -matrix. — *Comm. Math. Phys.*, 1975, v. 45, p. 1–8.
- [Bu4] *Buchholz D.* Collision theory for massless bosons. — *Comm. Math. Phys.*, 1977, v. 52, p. 147–173.
- [Bu5] *Buchholz D.* On the structure of local quantum fields with non-trivial interaction. — In: *Proc. Int. Conf. on operator algebras, ideals and their application in theoretical physics*. Leipzig: Teubner-Verlag, 1978, p. 146–153.
- [Bu6] *Buchholz D.* The physical state space of quantum electrodynamics. — *Comm. Math. Phys.*, 1982, v. 85, № 1, p. 49–71.
- [BD] *Buchholz D., Doplicher S.* Exotic infrared representations of interacting systems. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1984, v. 40, № 2, p. 175–184.
- [BF1] *Buchholz D., Fredenhagen K.* A note on the inverse scattering problem in quantum field theory. — *Comm. Math. Phys.*, 1977, v. 56, p. 91–99.
- [BF2] *Buchholz D., Fredenhagen K.* Charge screening and mass spectrum in abelian gauge theories. — *Nucl. Phys.*, 1979, v. 154B, p. 226–238.
- [BF3] *Buchholz D., Fredenhagen K.* Locality and structure of particle states. — *Comm. Math. Phys.*, 1982, v. 84, № 1, p. 1–54.

- [Bur] *Bures D.J.C.* Certain factors constructed as infinite tensor products. — *Comp. Math.*, 1963, v. 15, № 2, p. 169–191.
- [Ca] *Castell L.* A new superselection rule? — *Lett. Nuovo Cim.*, 1975, v. 12, № 11, p. 410–412.
- [Ch1] *Chen E.* Facial aspect of superposition principle in algebraic quantum theory. — *J. Math. Phys.*, 1973, v. 14, № 10, p. 1462–1465.
- [Ch2] *Chen E.* On the duality of local observables. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1975, v. 22, № 2, p. 123–130.
- [CG] *Cirelli R., Gallone F.* Algebra of observables and quantum logic. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1973, v. 19, p. 297.
- [Co] *Coleman S.* Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model. — *Phys. Rev.*, 1975, v. D11, № 8, p. 2088–2097.
- [C] *Connes A.* Une classification des facteurs de type III. — *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1973, v. 6, p. 133–252.
- [vD] *van Daele A.* Quasi-equivalence of quasifree states on the Weyl algebra. — *Comm. Math. Phys.*, 1971, v. 21, p. 171–191.
- [DeF] *De Facio B.* Causal independence in algebraic quantum field theory. — *Found. Phys.*, 1975, v. 5, p. 229–237.
- [DeFT] *De Facio B., Taylor D.C.* Commutativity & causal independence. — *Phys. Rev.*, 1973, v. D8, № 8, p. 2729–2731.
- [DA1] *Dell'Antonio G.F.* On some groups of automorphisms of physical observables. — *Comm. Math. Phys.*, 1966, v. 2, № 5, p. 384–397.
- [DA2] *Dell'Antonio G.F.* Structure of algebras of some free systems. — *Comm. Math. Phys.*, 1968, v. 9, № 2, p. 81–117.
- [DA3] *Dell'Antonio G.F.* Structure of the algebra associated to free fields. — In: *Axiomatic approach to quantum field theory and many-body problem*, v. I A, Wroclaw, 1968, p. 52–97.
- [Di] *Dimock J.* Algebras of local observables on a manifold. — *Comm. Math. Phys.*, 1980, v. 77, № 3, p. 219–228.
- [DM] *Dixmier J., Marechal O.* Vecteurs totalisateurs d'une algèbre de von Neumann. — *Comm. Math. Phys.*, 1971, v. 22, № 1, p. 44–50.
- [D1] *Doplicher S.* An algebraic spectrum condition. — *Comm. Math. Phys.*, 1965, v. 1, p. 1–5.
- [D2] *Doplicher S.* Fock representation and massless particles. — *Comm. Math. Phys.*, 1966, v. 3, № 3, p. 228–232.
- [D3] *Doplicher S.* Fields, observables and gauge transformations. — In: *Systèmes à un nombre infini des degrés de liberté*, Coll. CNRS, 1970, v. 181, p. 113–123.
- [D4] *Doplicher S.* Locality and particle statistics. — *Тр. МИАН им. В.А. Стеклова*, 1975, т. 135, с. 107–114.
- [D5] *Doplicher S.* Quantum field theory and operator algebras of local observables. — *Symposia Math.*, 1976, v. 20, p. 109–115.
- [D6] *Doplicher S.* Local aspects of superselection rules. — *Comm. Math. Phys.*, 1982, v. 85, № 1, p. 73–86.
- [DFG] *Doplicher S., Figliolini F., Guido D.* Infrared representations of free Bose fields. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1984, v. 41, № 1, p. 49–62.
- [DHR1, 2] *Doplicher S., Haag R., Roberts J.E.* Fields, observables and gauge transformations. I. — *Comm. Math. Phys.*, 1969, v. 13, № 1, p. 1–23; II. — *Ibid.*, v. 15, p. 173–200.
- [DHR3, 4] *Doplicher S., Haag R., Roberts J.E.* Local observables and particle statistics. I. — *Comm. Math. Phys.*, 1971, v. 23, p. 199–230; II. — *Ibid.*, 1974, v. 35, № 1, p. 49–85.
- [DKKR] *Doplicher S., Kadison R.V., Kastler D., Robinson D.W.* Asymptotically abelian systems. — *Comm. Math. Phys.*, 1967, v. 6, № 2, p. 101–120.
- [DKR] *Doplicher S., Kastler D., Robinson D.W.* Covariance algebras in field theories and statistical mechanics. — *Comm. Math. Phys.*, 1966, v. 3, № 1, p. 1–28.
- [DK] *Doplicher S., Kastler D.* Ergodic states in a noncommutative ergodic theory. — *Comm. Math. Phys.*, 1968, v. 7, № 1, p. 1–20.
- [DKS] *Doplicher S., Kastler D., Størmer E.* Invariant states and asymptotic abelianness. — *J. Funct. An.*, 1969, v. 3, № 3, p. 419–434.
- [DL1] *Doplicher S., Longo R.* Local aspects of superselection rules. II. — *Comm. Math. Phys.*, 1983, v. 88, p. 399–409.

- [DL2] *Doplicher S., Longo R.* Standard and split inclusions of von Neumann algebras. — *Invent. Math.*, 1984, v. 75, p. 493–536.
- [DRS] *Doplicher S., Regge T., Singer J.M.* A geometrical model showing the independence of locality and positivity of the energy. — *Comm. Math. Phys.*, 1968, v. 7, № 1, p. 51–54.
- [DR1] *Doplicher S., Roberts J.E.* Fields, statistics and non-abelian gauge groups. — *Comm. Math. Phys.*, 1972, v. 28, p. 331–348.
- [DR2] *Doplicher S., Roberts J.E.* Compact Lie groups associated with endomorphisms of C^* -algebras. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1984, v. 11, № 2, p. 333–338.
- [DS1] *Doplicher S., Spera M.* Representations obeying the spectrum condition. — *Comm. Math. Phys.*, 1982, v. 84, p. 505–513.
- [DS2] *Doplicher S., Spera M.* Local normality properties of some infrared representations. — *Comm. Math. Phys.*, 1983, v. 89, p. 19–25.
- [Dr1] *Driessler W.* Comments on lightlike translations: and applications in relativistic quantum field theory. — *Comm. Math. Phys.*, 1975, v. 44, p. 133–141.
- [Dr2] *Driessler W.* On the type of local algebras in QFT. — *Comm. Math. Phys.*, 1977, v. 53, p. 295–297.
- [Dr3, 4] *Driessler W.* On the structure of fields and algebras on null planes. I. Local algebras. — *Acta Phys. Austr.*, 1977, v. 46, p. 63–96; II. Field structure. — *Ibid.*, p. 163–196.
- [Dr5] *Driessler W.* Duality and absence of locally generated superselection sectors for CCR-type algebras. — *Comm. Phys. Math.*, 1979, v. 70, № 2, p. 213–220.
- [DF] *Driessler W., Fröhlich J.* Reconstruction of local observable algebras from the Euclidean Green's functions of relativistic quantum field theory. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1977, 27, p. 221–236.
- [DrS1] *Driessler W., Summers S.J.* Nonexistence of quantum fields associated with two-dimensional space-like planes. — *Comm. Math. Phys.*, 1983, v. 89, p. 221–226.
- [DrS2] *Driessler W., Summers S.J.* A dense set of cyclic vectors for quantum field polynomial algebras. — *J. Math. Phys.*, 1983, v. 24, № 12, p. 2809–2819.
- [DrS3] *Driessler W., Summers S.J.* On the decomposition of relativistic quantum field theories into pure phases. — *Universität Osnabrück Preprint*, 1985.
- [DrS4] *Driessler W., Summers S.J.* Central decomposition of Poincaré-invariant nets of local field algebras and absence of spontaneous breaking of the Lorentz group. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1985, v. 43, № 2, p. 147–166.
- [DrHR] *Drühl K., Haag R., Roberts J.E.* On parastatistics. — *Comm. Math. Phys.*, 1970, v. 18, p. 204–226.
- [D-V] *Dubois-Violette M.* A generalization of the classical moment problem on $*$ -algebras with applications to relativistic quantum theory. I. — *Comm. Math. Phys.*, 1975, v. 43, № 3, p. 225–254.
- [EO] *Eckmann J.P., Osterwalder K.* An application of Tomita's theory of modular Hilbert algebras: duality for free Bose fields. — *J. Funct. An.*, 1973, v. 13, p. 1–12.
- [EF] *Eckmann J.P., Fröhlich J.* Unitary equivalence of local algebras in the quasifree representation. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1974, v. 20, p. 201–209.
- [Ek1] *Ekhaguere G.O.S.* The theory of superselection rules. I. A class of inequivalent irreducible $*$ -representations of the CCR of the free electromagnetic field. — *J. Math. Phys.*, 1978, v. 19, № 8, p. 1751–1757.
- [Ek2] *Ekhaguere G.O.S.* The theory of superselection rules. II. Sectors of the free electromagnetic field. — *J. Math. Phys.*, 1984, v. 25, № 3, p. 678–683.
- [Eks] *Ekstein H.* Relativistic particles in external fields. — *Phys. Rev.*, 1972, v. D5, № 4, p. 864–871.
- [En] *Englisch H.* Superselection rules, superposition and vector states. — *K.-Marx Universität (Leipzig), Sektion Mathematik, Preprint*, 1976.
- [ET] *Epifanio G., Trapani C.* V^* -algebras: a particular class of unbounded operator algebras — *J. Math. Phys.*, 1984, v. 25, № 9, p. 2633–2637.
- [E] *Epstein H.* CPT-invariance of the S-matrix in a theory of local observables. — *J. Math. Phys.*, 1967, v. 8, № 4, p. 750–767.
- [EGM] *Epstein H., Glaser V., Martin A.* Polynomial behaviour of scattering amplitudes at fixed momentum transfer in theories with local observables. — *Comm. Math. Phys.*, 1969, v. 13, p. 257–316.
- [Ez1] *Ezawa Z.F.* Quantum soliton operators for vortices and superselection rules. — *Phys. Rev.*, 1978, v. D18, p. 2091–2099.

- [Ez2] *Ezawa Z.F.* Quantum soliton operators for monopoles and fermionization mechanism of dyons. — *Phys. Lett.*, 1979, v. B81, № 3–4, p. 325–328.
- [Fe] *Federbush P.* Local operator algebras in the presence of superselection rules. — *J. Math. Phys.*, 1968, v. 9, № 10, p. 1718–1721.
- [Fr1] *Fredenhagen K.* On the existence of antiparticles. — *Comm. Math. Phys.*, 1981, v. 79, p. 141–151.
- [Fr2] *Fredenhagen K.* On the modular structure of local algebras of observables. — *Comm. Math. Phys.*, 1985, v. 97, № 1–2, p. 79–90.
- [Fr3] *Fredenhagen K.* A remark on the cluster theorem. — *Comm. Math. Phys.*, 1985, v. 97, № 3, p. 461–464.
- [FH] *Fredenhagen K., Hertel J.* Local algebras of observables and point-like localized fields. — *Comm. Math. Phys.*, 1981, v. 80, p. 555–561.
- [FM] *Fredenhagen K., Marcu M.* Charged states in Z_2 gauge theories. — *Comm. Math. Phys.*, 1983, v. 92, № 1, p. 81–119.
- [F1] *Fröhlich J.* On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless scalar bosons. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1973, v. A19, № 1, p. 1–103.
- [F2] *Fröhlich J.* New superselection sectors ("soliton-states") in two-dimensional Bose quantum fields models. — *Comm. Math. Phys.*, 1976, v. 47, p. 269–310.
- [F3] *Fröhlich J.* Phase transitions, Goldstone bosons and topological superselection rules. — *Acta Phys. Austr. Suppl.*, 1976, v. 20, p. 133–269.
- [F4] *Fröhlich J.* The pure phases, the irreducible quantum fields and dynamical symmetry breaking in Symanzik-Nelson positive quantum field theories. — *Ann. Phys.*, 1976, v. 97, № 1, p. 1–54.
- [F5] *Fröhlich J.* Quantum theory of nonlinear invariant wave (field) equations or superselection sectors in constructive quantum field theory. — In: *Invariant wave equations. Lect. Notes in Phys.*, v. 73. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1978, p. 339–413.
- [F6] *Fröhlich J.* The charged sectors of quantum electrodynamics in a framework of local observables. — *Comm. Math. Phys.*, 1979, v. 66, p. 223–265.
- [FMS1] *Fröhlich J., Morchio G., Strocchi F.* Infrared problem and spontaneous breaking of the Lorentz group in QED. — *Phys. Lett.*, 1979, v. B89, № 1, p. 61–64.
- [FMS2] *Fröhlich J., Morchio G., Strocchi F.* Charged sectors and scattering states in quantum electrodynamics. — *Ann. Phys.*, 1979, v. 119, p. 241.
- [GER] *Gal-Ezer E., Reeh H.* Coleman and Coleman-Okubo theorems in relativistic quantum field theory. — *Fortschr. Phys.*, 1974, B. 22, S. 481.
- [Ga] *Garber W.D.* The connexion of duality and causal properties for generalized free fields. — *Comm. Math. Phys.*, 1975, v. 42, № 3, p. 195–208.
- [GMN] *Galindo A., Morales A., Nunez-Lagos R.* Superselection principle and pure states of n identical particles. — *J. Math. Phys.*, 1962, v. 3, p. 324–328.
- [Gi] *Giles R.* Foundations for quantum mechanics. — *J. Math. Phys.*, 1970, v. 11, № 7, p. 2139–2160.
- [GS] *Gudder S., Scruggs W.* Unbounded representations of $*$ -algebras. — *Pacific J. Math.*, 1977, v. 70, № 2, p. 369–382.
- [G1] *Guenin M.* Practical use of algebraic concepts in quantum field theory. — In: *Axiomatic approach to quantum field theory and many-body problem*. Wroclaw, 1968, v. 1A, p. 185–217.
- [G2] *Guenin M.* Introduction to algebraic techniques in quantum field theory and statistical mechanics. — In: *Lect. Theor. Phys.*, v. XII–C. New York: Gordon & Breach, 1971, p. 187–253.
- [GM1] *Guenin M., Misra B.* On the von Neumann algebras generated by field operators. — *Nuovo Cim.*, 1972, v. 30, p. 1272–1290.
- [GM2] *Guenin M., Misra B.* De la permutabilité des operateurs non bornees. — *Helv. Phys. Acta*, 1964, v. 37, p. 233–240.
- [GM3] *Guenin M., Misra B.* Borchers's classes and duality theorem. — *Helv. Phys. Acta*, 1964, v. 37, p. 267–269.
- [GV] *Guenin M., Velo G.* Mass renormalization as an automorphism of the algebra of field operators. — *Helv. Phys. Acta*, 1968, v. 41, p. 362–366.
- [Gu] *Guerra F.* Local algebras in Euclidean quantum field theory. — *Symp. Math.*, 1976, v. 20, p. 13–26.

- [Gui] *Guichardet A.* Produits tensoriels infinis et representations des relations d'anticommutation. — Ann. Ec. Norm. Sup., 1966, v. 83, p. 1–52.
- [H1] *Haag R.* Quantum field theories with composite particles and asymptotic conditions. — Phys. Rev., 1958, v. 112, p. 669–673.
- [H2] *Haag R.* Discussion des "axiomes" et des propriétés asymptotiques d'une théorie des champs locale avec particules composees. — In: Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs. Colloque CNRS, mai 1957, v. 83, p. 151–163.
- [H3] *Haag R.* Bemerkungen zum Nahwirkungsprinzip in der Quantenphysik. — Ann. der Physik, 1963, v. 11, p. 29–34.
- [H4] *Haag R.* Structure analysis of quantum field theory. — In: Axiomatic approach to quantum field theory and many-body problem, Wroclaw, 1968, v. IA, p. 9–17.
- [H5] *Haag R.* Structural questions in quantum field theory. — Acta Phys. Austr. Suppl., 1975, v. 14, p. 567–580.
- [H6] *Haag R.* Mathematical structure of orthodox quantum theory and its relation to operationally definable physical principles. — In: Mathematical problems in theoretical physics. Lecture Notes in Physics, v. 153, p. 168–172. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1982.
- [H7] *Haag R.* Local relativistic quantum physics. — Physica, 1984, v. 124A, p. 357–364.
- [HKK] *Haag R., Kadison R.V., Kastler D.* Nets of C^* -algebras and classification of states. — Comm. Math. Phys., 1970, v. 16, p. 81–104.
- [HK] *Haag R., Kastler D.* An algebraic approach to quantum field theory. — J. Math. Phys., 1964, v. 5, № 7, p. 848–861.
- [HNS] *Haag R., Narnhofer H., Stein U.* On quantum field theory in gravitational background. — Comm. Math. Phys., 1984, v. 94, p. 219–238.
- [HS] *Haag R., Schroer B.* Postulates of quantum field theory. — J. Math. Phys., 1962, v. 3, № 2, p. 248–256.
- [HSw] *Haag R., Swieca J.A.* When does a quantum theory describe particles? — Comm. Math. Phys., 1965, v. 1, p. 308–320.
- [He] *Hegerfeldt G.C.* Extremal decomposition of Wightman functions and of states of nuclear $*$ -algebras by Choquet theory. — Comm. Math. Phys., 1975, v. 45, p. 133–135.
- [HKW] *Hegerfeldt G.C., Kraus K., Wigner E.P.* Proof of the fermion superselection rule without the assumption of time-reversal invariance. — J. Math. Phys., 1968, v. 9, № 12, p. 2029–2031.
- [Hep] *Hepp K.* Quantum theory of measurement and macroscopic observables. — Helv. Phys. Acta, 1972, v. 45, p. 237–248.
- [HeS] *Hermaszewski Z.J., Streater R.F.* Some local covariant representations of the canonical anticommutation relations. — J. Phys. A: Math. Gen., 1983, v. 16, p. 2801–2810.
- [HL] *Hislop P.D., Longo R.* Modular structure of local algebras associated with the free massless scalar field theory. — Comm. Math. Phys., 1982, v. 84, p. 71–85.
- [Ho] *Hoffmann G.* On the existence of quantum fields in space-time dimension 4. — Rep. Math. Phys., 1980, v. 18, № 2, p. 231–242.
- [HD] *Horuhy S.S., Dadashyan K.Yu.* Causal independence of free quantum fields. — Czechosl. Journ. Phys., 1979, v. B29, p. 29–32.
- [HSV] *Horuhy S.S., Sushko V.N., Voronin A.V.* Op^* -Algebras and vacuum superselection rules. — In: Proc. 2nd Int. Conf. on operator algebras, ideals and their applications in theoretical physics. Leipzig: Teubner-Verlag, 1984, p. 96–102.
- [HV1] *Horuhy S.S., Voronin A.V.* Field algebras do not leave field domains invariant. — Comm. Math. Phys., 1986, v. 102, № 4, p. 687–692.
- [HV2] *Horuhy S.S., Voronin A.V.* Op^* -versus C^* -dynamical systems. — Comm. Math. Phys. (в печати).
- [HVW] *Houtappel R.F.M., Van Dam H., Wigner E.P.* The conceptual basis and use of the geometric invariance principle. — Rev. Mod. Phys., 1965, v. 37, № 4, p. 595–632.
- [Hu] *Hunziker W.* A note on symmetry operations in quantum mechanics. — Helv. Phys. Acta, 1972, v. 45, № 2, p. 233–236.
- [Jad] *Jadczyk A.Z.* On spectrum of internal symmetries of the algebraic quantum field theory. — Comm. Math. Phys., 1969, v. 12, p. 58–63.
- [Jak] *Jakóbczyk L.* Borchers algebra formulation of an indefinite inner product quantum field theory. — J. Math. Phys., 1984, v. 25, № 3, p. 617–622.

- [Jan] *Jancewicz B.* Remark on a theorem of Araki. — *Acta Phys. Pol.*, 1968, v. 33, № 1, p. 151–153.
- [JM] *Jauch J.M., Misra B.* Supersymmetries and essential observables. — *Helv. Phys. Acta*, 1961, v. 34, p. 502, 699–709.
- [In] *Inoue A.* On a class of unbounded operator algebras. — *Pacific J. Math.*, 1977, v. 65, № 1, p. 77–96.
- [JS] *Jordan T.F., Sudarshan E.C.G.* Reduction of operator rings and the irreducibility axiom in QFT. — *J. Math. Phys.*, 1962, v. 3, № 4, p. 587–594.
- [K1] *Kadison R.V.* States and representations. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1962, v. 103, p. 304–319.
- [K2] *Kadison R.V.* Remarks on the type of Von Neumann algebras of local observables in quantum field theory. — *J. Math. Phys.*, 1963, v. 4, № 12, p. 1511–1516.
- [K3] *Kadison R.V.* Transformation of states in operator theory and dynamics. — *Topology*, 1965, v. 3, Suppl. 2, p. 177–198.
- [K4] *Kadison R.V.* The energy-momentum spectrum of quantum fields. — *Comm. Math. Phys.*, 1967, v. 4, № 4, p. 258–260.
- [K5] *Kadison R.V.* Some analytic methods in the theory of operator algebras. — *Lect. Notes in Math.*, 1970, v. 140, p. 8–30.
- [KaS] *Karwowski W., Sznajder N.* Some remarks on the theory of several scalar fields in algebraic approach. — *Rep. Math. Phys.*, 1971, v. 1, № 4, p. 259–264.
- [Ka] *Kastler D.* The C^* -algebra of a free boson field. I. Discussion of the basic facts. — *Comm. Math. Phys.*, 1965, v. 1, № 1, p. 14–48.
- [KMLM] *Kastler D., Mebkhout M., Loupias G., Michel L.* Central decomposition of invariant states. Applications to the groups of time translations and of euclidean transformations in algebraic field theory. — *Comm. Math. Phys.*, 1972, v. 27, p. 195–222.
- [KR] *Kastler D., Robinson D.W.* Invariant states in statistical mechanics. — *Comm. Math. Phys.*, 1966, v. 3, № 3, p. 151–180.
- [KRS] *Kastler D., Robinson D., Swieca J.-A.* Conserved currents and associated symmetries: Goldstone Theorem. — *Comm. Math. Phys.*, 1966, v. 2, № 2, p. 108–120.
- [Ki] *Kishimoto A.* Extremal invariant states with a spectrum condition and Borchers' theorem. — *Lett. Math. Phys.*, 1979, v. 3, p. 193–196.
- [Kn] *Knight J.M.* Strict localization in quantum field theory. — *J. Math. Phys.*, 1961, v. 2, p. 459–471.
- [KoS] *Kovacs I., Szücs J.* Ergodic type theorems in von Neumann algebras. — *Acta Sci. Math (Szeged)*, 1966, v. 27, p. 233–246.
- [Kr1] *Kraus K.* General quantum field theories and strict locality. — *Zs. Phys.*, 1964, v. 181, № 1, p. 1–12.
- [Kr2] *Kraus K.* Algebras of observables with continuous representations of symmetry groups. — *Comm. Math. Phys.*, 1968, v. 7, № 2, p. 99–111.
- [Kr3] *Kraus K.* An algebraic spectrum condition. — *Comm. Math. Phys.*, 1970, v. 16, № 2, p. 138–141.
- [KS] *Kraus K., Streater R.F.* Some covariant representations of massless Fermi fields. — *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1981, v. 14, p. 2467–2478.
- [KN] *Kruszynski P., Napiorkowski K.* On the independence of local algebras. — *Rep. Math. Phys.*, 1973, v. 4, № 4, p. 303–306.
- [L1] *Landau L.J.* A note on extended locality. — *Comm. Math. Phys.*, 1969, v. 13, p. 246–253.
- [L2] *Landau L.J.* Asymptotic locality and the structure of local internal symmetries. — *Comm. Math. Phys.*, 1970, v. 17, № 2, p. 156–176.
- [L3] *Landau L.J.* On local functions of fields. — *Comm. Math. Phys.*, 1974, v. 39, № 1, p. 49–62.
- [LW] *Landau L.J., Wichmann E.H.* On the translational invariance of local internal symmetries. — *J. Math. Phys.*, 1970, v. 11, № 1, p. 306–311.
- [LR1] *Lanford O.E., Ruelle D.* Observables at infinity and states with short correlations in statistical mechanics. — *Comm. Math. Phys.*, 1969, v. 13, p. 194–215.
- [LS] *Langerholc J., Schroer B.* On the structure of the von Neumann algebras generated by local functions of the free Bose field. — *Comm. Math. Phys.*, 1965, v. 1, № 3, p. 215–239.
- [La1] *Lassner G.* Topological algebras of operators. — *Rep. Math. Phys.*, 1979, v. 3, № 4, p. 279–293.

- [La2] *Lassner G.* Algebras of unbounded operators and quantum dynamics. – *Physica*, 1984, v. 124A, p. 471–480.
- [LU] *Lassner G., Uhlmann A.* On positive functionals on algebras of test-functions for quantum fields. – *Comm. Math. Phys.*, 1968, v. 7, № 2, p. 152–169.
- [Li1] *Licht A.L.* Strict localization. – *J. Math. Phys.*, 1963, v. 4, № 11, p. 1443–1447.
- [Li2] *Licht A.L.* Local states. – *J. Math. Phys.*, 1966, v. 7, p. 1656–1669.
- [Li3] *Licht A.L.* Coherent superposition of local states. – *J. Math. Phys.*, 1968, v. 9, № 9, p. 1476–1480.
- [LT] *Licht A.L., Toll J.S.* Two-point function and generalized free fields. – *Nuovo Cim.*, 1961, v. 21, p. 346.
- [Lo1] *Longo R.* Notes on algebraic invariants for non-commutative dynamical systems. – *Comm. Math. Phys.*, 1979, v. 69, p. 195–207.
- [Lo2] *Longo R.* Algebraic and modular structure of von Neumann algebras of physics. – *Proc. Symp. Pure Math.*, 1982, v. 38, part 2, p. 551–566.
- [Ma] *Maison D.* Eine Bemerkung zur Clustereigenschaften. – *Comm. Math. Phys.*, 1968, v. 10, № 1, p. 48–51.
- [M1] *Manuceau J.* Étude de quelques automorphismes de la C^* -algèbre du champ des bosons libres. – *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1968, v. A8, p. 117–138.
- [M2] *Manuceau J.* C^* -algèbre des relations de commutation. – *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1968, v. A8, p. 139–161.
- [Mau1] *Maurin K.* Mathematical structure of Wightman formulation of quantum field theory. – *Bull. Ac. Pol. Sci. Ser. Math.*, 1963, v. 11, № 3, p. 115–120.
- [Mau2] *Maurin K.* On some theorems of H. J. Borchers. – *Bull. Ac. Pol. Sci. Ser. Math.*, 1963, v. 11, № 3, p. 121–123.
- [Mi] *Mirman R.* Nonexistence of superselection rules: definition of term "frame of reference"? – *Found. Phys.*, 1979, v. 9, № 3–4, p. 283–299.
- [Mis] *Misra B.* On the representations of Haag fields. – *Helv. Phys. Acta*, 1965, v. 38, p. 189–206.
- [Miy] *Miyata H.* On clustering states. – *Comm. Math. Phys.*, 1973, v. 34, № 1, p. 1–6.
- [Mö] *Möllenhoff C.* Über die Vollständigkeit verallgemeinerter freien Felder in einer Zeitschicht. – *Comm. Math. Phys.*, 1968, v. 11, № 3, p. 227–232.
- [Mon] *Montvay J.* The representations of symmetry groups on the algebra of quasilocal observables. – *Nuovo Cim.*, 1965, v. 40A, p. 121.
- [ME] *de Muynck W.M., van den Eijnde J.P.H.W.* A derivation of local commutativity from macrocausality using quantummechanical theory of measurement. – *Found. Phys.*, 1984, v. 14, № 2, p. 111–146.
- [NM] *Nagamachi S., Mugibayashi N.* Neutral scalar field theory with a point source. – *Progr. Theor. Phys.*, 1973, v. 49, № 1, p. 329–340.
- [Na] *Napiorkowski K.* On the independence of local algebras. – *Rep. Math. Phys.*, 1972, v. 8, № 1, p. 33–35.
- [NW] *Neumann H., Werner R.* Causality between preparation and registration processes in relativistic quantum theory. – *Int. J. Theor. Phys.*, 1983, v. 22, № 9, p. 781–802.
- [vN1] *von Neumann J.* Zur Algebra der funktional Operationen und Theorie der normalen Operationen. – *Math. Ann.*, 1930, v. 102, p. 370–427.
- [vN2] *von Neumann J.* On rings of operators. III. – *Ann. Math.*, 1940, v. 41, p. 94–161.
- [Nu] *Nussbaum A.E.* Quasianalytic vectors. – *Ark. Math.*, 1965, v. 6, p. 179.
- [OP] *Olesen D., Pedersen G.K.* Groups of automorphisms with spectrum condition and the lifting problem. – *Comm. Math. Phys.*, 1976, v. 51, p. 85–95.
- [O] *Orzalesi C.* Charges as generators of symmetry transformations in quantum field theory. – *Rev. Mod. Phys.*, 1970, v. 42, № 4, p. 381–409.
- [Os] *Osterwalder K.* Duality for free Bose field – *Comm. Math. Phys.*, 1973, v. 29, № 1, p. 1–14.
- [PSV1] *Parenti C., Strocchi F., Velo G.* Hilbert space sectors, dynamical charges and spontaneous symmetry breaking in classical field theory. – *Phys. Lett.*, 1976, v. B62, № 1, p. 83–85.
- [PSV2] *Parenti C., Strocchi F., Velo G.* Hilbert space sectors for solutions of nonlinear relativistic field equations. – *Comm. Math. Phys.*, 1977, v. 53, № 1, p. 65–96.
- [PS] *Pawlik B., Sadowski P.* On a construction of the maximal additive field of v. Neumann algebras in quantum field theory. – *Rep. Math. Phys.*, 1973, v. 4, № 3, p. 223–225.

- [PT] *Pedersen G.K., Takesaki M.* The Radon – Nikodym theorem for von Neumann algebras. – *Acta Math.*, 1973, v. 130, p. 53–87.
- [Pe] *Petrov A.* Asymptotic behaviour of the unitary representations of the Poincaré group. – *Rep. Math. Phys.*, 1973, v. 4, № 3, p. 183–188.
- [Pi] *Piron C.* Les règles de superselection continues. – *Helv. Phys. Acta*, 1969, v. 42, p. 330–338.
- [PRS] *Polley L., Reents G., Streater R.F.* Some covariant representations of massless boson fields. – *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1981, v. 14, p. 2479–2488.
- [Pl,2] *Powers R.T.* Self-adjoint algebras of unbounded operators. I. – *Comm. Math. Phys.*, 1971, v. 21, p. 85–124; II. – *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, v. 187, № 1, p. 261–293.
- [Re] *Reeh H.* Symmetry operations and spontaneously broken symmetries in relativistic quantum field theory. – *Fortschr. d. Phys.*, 1968, v. 16, p. 687–706.
- [RS1] *Reeh H., Schlieder S.* Bemerkungen zur Unitäräquivalenz von Lorentzinvarianten Feldern. – *Nuovo Cim.*, 1961, v. 22, p. 1051–1068.
- [RS2] *Reeh H., Schlieder S.* Über den Zerfall der Feldoperator Algebra im Falle einer Vakuum Entartung. – *Nuovo Cim.*, 1962, v. 26, p. 32–42.
- [Ri] *Rieffel M.* A commutation theorem and duality for free Bose fields. – *Comm. Math. Phys.*, 1974, v. 39, p. 153–164.
- [Rig] *Rigotti C.* Remarks on the modular operator and local observables. – *Comm. Math. Phys.*, 1978, v. 68, p. 267–273.
- [R1] *Roberts J.E.* Some applications of dilatation invariance to structural questions in the theory of local observables. – *Comm. Math. Phys.*, 1974, v. 37, p. 273–286.
- [R2] *Roberts J.E.* Must there be a gauge group? – *Тр. МИАН им. В.А.Стеклова*, 1975, т. 135, с. 206–209.
- [R3] *Roberts J.E.* Local cohomology and superselection structure. – *Comm. Math. Phys.*, 1976, v. 51, p. 107–119.
- [R4] *Roberts J.E.* Localization in algebraic field theory. – *Comm. Math. Phys.*, 1982, v. 85, № 1, p. 87–98.
- [R5] *Roberts J.E.* New light on the mathematical structure of algebraic field theory. – *Proc. Symp. Pure Math.*, 1982, v. 38, № 2, p. 523–550.
- [R6] *Roberts J.E.* The search for quantum differential geometry. – In: *Mathematical problems in theoretical physics. Lecture Notes in Physics*, 1982, v. 153, p. 374–379. Berlin: Heidelberg; New York: Springer-Verlag.
- [RR] *Roberts J.E., Roepstorff G.* Some basic concepts of algebraic quantum theory. – *Comm. Math. Phys.*, 1969, v. 11, p. 321–338.
- [Ro1] *Robinson D.W.* The ground state of the Bose gas. – *Comm. Math. Phys.*, 1965, v. 1, № 2, p. 159–171.
- [Ro2] *Robinson D.W.* Algebraic aspects of relativistic quantum field theory. – In: *Axiomatic Field Theory*. – M. Chretien, S. Deser, Eds. New, York: Gordon and Breach, 1966, p. 389–516.
- [RoR] *Robinson D.W., Ruelle D.* Extremal invariant states. – *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1967, v. A6, p. 299–310.
- [Roo] *Roos H.* Independence of local algebras in quantum field theory. – *Comm. Math. Phys.*, 1970, v. 16, p. 238–246.
- [Ru1] *Ruelle D.* On the asymptotic condition in quantum field theory. – *Helv. Phys. Acta*, 1962, v. 35, p. 147–163.
- [Ru2] *Ruelle D.* States of physical systems. – *Comm. Math. Phys.*, 1966, v. 3, № 2, p. 133–150.
- [SaW] *Sadowski P., Woronowicz S.L.* Total sets in quantum field theory. – *Rep. Math. Phys.*, 1971, v. 2, № 2, p. 113–120.
- [Sc1] *Schlieder S.* Some remarks about the localization of states in a quantum field theory. – *Comm. Math. Phys.*, 1965, v. 1, № 4, p. 265–280.
- [Sc2] *Schlieder S.* Einige Bemerkungen zur Zustandsänderung von relativistischen quantenmechanischen Systemen durch Messungen und zur Lokalitätsforderung. – *Comm. Math. Phys.*, 1968, v. 7, № 4, p. 305–331.
- [Sc3] *Schlieder S.* Einige Bemerkungen über Projektionsoperatoren. – *Comm. Math. Phys.*, 1969, v. 13, p. 216–225.
- [Sch] *Schoch A.* On the simplicity of Haag fields. – *Int. J. Theor. Phys.*, 1969, v. 1, № 1, p. 107–113.

- [Se1] *Segal J.E.* Postulates for general quantum mechanics. — *Ann. Math.*, 1947, v. 48, p. 930–948.
- [Se2] *Segal J.E.* A non-commutative extension of abstract integration. — *Ann. Math.*, 1953, v. 57, p. 401–457.
- [SG] *Segal J.E., Goodman R.W.* Antilocality of certain lorentz-invariant operators. — *J. Math. Mech.*, 1965, v. 14, p. 629–638.
- [Sew] *Sewell G.L.* Quantum fields on manifolds. — *Ann. Phys.*, 1982, v. 141, №1, p. 201–224.
- [Sn] *Snellman H.* Poincaré analytic vectors in axiomatic QFT. — *J. Math. Phys.*, 1974, v. 15, № 7, p. 1054–1059.
- [Ste] *Steinmann O.* Haag–Kastler formulation of quantum electrodynamics. — *Nucl. Phys.*, 1976, v. B107, p. 339–364.
- [Stϕ1] *Størmer E.* Large groups of automorphisms of C^* -algebras. — *Comm. Math. Phys.*, 1967, v. 5, № 1, p. 1–22.
- [Stϕ2] *Størmer E.* Types of von Neumann algebras associated with extremal invariant states. — *Comm. Math. Phys.*, 1967, v. 6, p. 194–204.
- [Stϕ3] *Størmer E.* Automorphisms and invariant states of operator algebras. — *Acta Math.*, 1971, v. 127, p. 1–9.
- [S1] *Streater R.F.* Intensive observables in quantum theory. — *J. Math. Phys.*, 1964, v. 5, p. 581–590.
- [S2] *Streater R.F.* Spontaneous breakdown of symmetry in Axiomatic theory. — *Proc. Roy. Soc.*, 1965, v. A287, p. 510–518.
- [S3] *Streater R.F.* Gauge theories and superselection rules. — *Acta Phys. Austr. Suppl.*, 1973, v. 11, p. 317–340.
- [S4] *Streater R.F.* Charges and currents in the Thirring model. — In: *Physical Reality and Mathematical Description* ed. by Enz, Mehra. Dordrecht: Reidel, 1974, p. 375–386.
- [S5] *Streater R.F.* Dynamical selection rules. — *Phys. Scripta*, 1981, v. 24, p. 910–913.
- [SW] *Streater R.F., Wilde J.F.* Fermion states of a boson field. — *Nucl. Phys.*, 1970, v. B24, p. 561–575.
- [Str1] *Streit L.* Generalized free fields as cyclic representations of the canonical commutation relations. — *Acta Phys. Austr.*, 1970, v. 32, № 1, p. 107–112.
- [Str2] *Streit L.* Lightlike initial data for quantum field theory. — In: *Recent Developments in Relativistic Quantum Field Theory and its Applications*. Proc. XIII Winter School of Theor. Phys., Karpacz, 1976. *Acta Univ. Wratisl.*, №389 p. 111–128.
- [StW] *Strocchi F., Wightman A.S.* Proof of the charge superselection rule in local relativistic quantum field theory. — *J. Math. Phys.*, 1974, v. 15, p. 2198–2224.
- [St1] *Strocchi F.* Gauge groups in local field theory and superselection rules. — *Proc. of the IV Intern. Colloquium on Group Theoret. Methods in Physics*, Nijmegen, June 23–27, 1975, *Lect Notes in Phys.* v. 50, p. 87–92.
- [St2] *Strocchi F.* Superselection rules and infrared problems in Yang-Mills theories. — *Lett. Nuovo Cim.*, 1976, v. 16, № 13, p. 397–398.
- [St3] *Strocchi F.* Local and covariant gauge quantum field theory. Clustering property, superselection rules and the infrared problem. — *Phys. Rev.*, 1978, v. D17, № 8, p. 2010–2022.
- [Su] *Summers S.J.* Normal product states and twisted duality for CCR - and CAR -type algebras with applications to the Yukawa₂ quantum field model. — *Comm. Math. Phys.*, 1982, v. 86, № 1, p. 111–141.
- [T] *Todorov T.S.* A remark on the definition of superselection rules in terms of unbounded operators. — *Int. J. Theor. Phys.*, 1975, v. 14, p. 295–298.
- [U] *Uhlmann A.* Über die Definition der Quantenfelder nach Wightmann und Haag. — *Wiss. Zs. Karl Marx-Univ.*, 1962, v. 11, p. 213–217.
- [V1] *Vassilev A.N.* La structure algebrique de la representation et le problème de la symetrie pour une classe de fonctionnelles de Wightman. — *Comm. Math. Phys.*, 1969, v. 13, p. 81–101.
- [V2] *Vassilev A.N.* Sur la construction asymptotique et l'interpretation d'une theorie avec dégénérescence du vide. — *Comm. Math. Phys.*, 1969, v. 13, p. 102–118.
- [Wi] *Wichmann E.H.* On systems of local operators and the duality condition. — *J. Math. Phys.*, 1983, v. 24, № 6, p. 1633–1644.
- [W³] *Wick G.C., Wightman A.S., Wigner E.P.* The intrinsic parity of elementary particles. *Phys. Rev.*, 1952, v. 88, p. 101–105.

- [W1] *Wightman A.S.* QFT in terms of vacuum expectation values. — *Phys. Rev.*, 1956, v. 101, № 2, p. 860–873.
- [W2] *Wightman A.S.* Relativistic invariance and quantum mechanics. — *Nuovo Cim. Suppl.*, 1959, v. 14, p. 81.
- [W3] *Wightman A.S.* La théorie quantique locale et la théorie quantique des champs. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1964, v. A1, № 4, p. 403–420.
- [Wil] *Wilde I.F.* A remark on the localisation of a charged Bose field. — *Comm. Math. Phys.*, 1971, v. 24, № 1, p. 37–39.
- [Wo] *Woronowicz S.* A generalization of a theorem by Wightman. — *Comm. Math. Phys.*, 1968, v. 9, p. 142–145.
- [Wy] *Wyss W.* The field algebra and its positive linear functionals. — *Comm. Math. Phys.*, 1972, v. 27, № 3, p. 223–234.
- [Y1] *Yngvason J.* On the algebra of test functions for field operators. — *Comm. Math. Phys.*, 1973, v. 34, p. 315–333.
- [Y2] *Yngvason J.* On the decomposition of Wightman functionals in the Euclidean framework. — *Rep. Math. Phys.*, 1978, v. 13, № 1, p. 101–115.
- [Y3] *Yngvason J.* Translationally invariant states and the spectrum ideal in the algebra of test functions for quantum fields. — *Comm. Math. Phys.*, 1981, v. 81, p. 401–418.
- [Y4] *Yngvason J.* States, ideals and automorphisms of the algebra of test functions for quantum fields. — *Physica*, 1984, v. 124A, p. 621–628.
- [Y5] *Yngvason J.* On the locality ideal in the algebra of test functions for quantum fields. — *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 1984, v. 20, p. 1063–1081.
- [ZHS] *Zinoviev Yu.M., Horuzhy S.S., Sushko V.N.* Equivalence properties of coherent superselection sectors and the description of physical symmetries in algebraic axiomatic theory. — *Тр. МИАН им. В.А. Стеклова*, 1975, т. 135, с. 129–138.

Список литературы к Приложению

- [1 – 3] *Strocchi F.* Gauge problem in quantum field theory. I. — *Phys. Rev.*, 1967, v. 162, p. 1429; II. Difficulties of combining Einstein equations and Wightman theory. — *Ibid.*, 1968, v. 166, № 5, p. 1302–1307; III. Quantization of Maxwell equations and weak local commutativity. — *Ibid.*, 1970, v. D2, № 10, p. 2334–2340.
- [4] *Ferrari R., Picasso L.E., Strocchi F.* Some remarks on local operators in quantum electrodynamics. — *Comm. Math. Phys.*, 1974, v. 35, № 1, p. 25–38.
- [5] *D'Emilio E., Minchev M.* Physical charged sectors in quantum electrodynamics. II. The charge operator. — *Preprint ISAS*, 1982.
- [6] *Yngvason J.* Remarks on the reconstruction theorem for field theories with indefinite metric. — *Rep. Math. Phys.*, 1977, v. 12, № 1, p. 57–64.
- [7] *Morchio G., Strocchi F.* Infrared singularities, vacuum structure and pure phases in local quantum field theory. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1980, v. A33, № 3, p. 251–282.
- [8] *Minchev M., d'Emilio E.* On the reconstruction of the physical Hilbert spaces for quantum field theories with indefinite metric. — *J. Math. Phys.*, 1981, v. 22, № 6, p. 1267–1271.
- [9] *Jakóbczyk L.* Some algebras of unbounded operators in an indefinite inner product vector space. — *J. Math. Phys.*, 1986, v. 27, № 1, p. 116–123.
- [10] *Ferrari R., Picasso L.E., Strocchi F.* Local operators and charged states in QED. — *Nuovo Cim.*, 1977, v. 39A, № 1, p. 1–8.
- [11] *Morchio G., Strocchi F.* A non perturbative approach to the infrared problem in QED. Construction of charged states. — *Nucl. Phys.*, 1983, v. B211, p. 471.
- [12] *Völkel A.H.* Confinement of quarks and gluons in gauge quantum field theory. — *J. Math. Phys.*, 1985, v. 26, № 5, p. 1057–1064.
- [13] *Doebner H.D., Pasemann F.B.* Algebraic gauge QFT on generalised Kaluza–Klein spaces. — In: *Conference on Differential geometric methods in Theoretical Physics (Trieste 1981)*. World Sci. Publ., 1983, p. 154–162.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аддитивность сильная 20

— слабая 20

Алгебра 11

— абелева 11

— асимптотических наблюдаемых 95

— Борхерса 176

— Вейля 252

— всех локальных наблюдаемых 19

— глобальная 19

— инволютивная 11

— Йорданова 16

— квазилокальная 19

— локальная 18

— простая 12

— совершенная обобщенная гильбертова 12

— фон Неймана 12

— — бесконечная 13

— — дискретная 13

— — конечная 13

— — непрерывная 13

— — полуконечная 13

— — собственно бесконечная 13

— — типа I, I_n , I_∞ 13

— — — II, II_1 , II_∞ 13

— — — III 13

— — чисто бесконечная 13

— — σ -конечная 13

— P -класса 134

Алмаз 30

Аменабельная группа 84

Аномалия Борхерса 198

Асимптотическое свойство сильное 100

— — слабое 100

База двойного конуса 30

Бозонизация 164

Вектор бициклический 12

— вакуумный 24

— вполне регулярный 189

— разделяющий 12

— сильно регулярный 189

— — циклический 183

— слабо регулярный 189

— строго локализованный 155

Вектор циклический 12

Вес 13

— нормальный 13

— полуконечный 13

— точный 13

Граф-топология 183

Двойной конус 29

Дизъюнктность 14

Дуальность 27

— внутренняя 62

— с кручением 272

— слабая 57

— существенная 58

Естественный изоморфизм 74

Идеал 12

— двусторонний 12

— левый 12

— локальности 177

— максимальный 12

— минимальный 12

— правый 12

— спектральности 177

Изотония 19

— непрерывная 19

Инволюция 11

Индукция алгебры фон Неймана 13

Квазилокальный $M_{s,1}$ -коцикл 171

Квазиэквивалентность представлений 14

— когерентных секторов 148

Класс Борхерса 53

Кластерное свойство сильное 97

— — слабое 96

Коммутант 12

— относительный 62

— фон Неймана 215

Конструкция ГНС 14

— — для O_p^* -алгебры 187

Локализованность 9

Локальная предсимметрия 124

Локальность 9, 20

— расширенная 27

- Локальность с кручением 272
 - строгая 27
- Модель синус-Гордона 164
 - Тирринга 164
- Модулярная группа 13
 - инволюция 13
- Наблюдаемая 8
 - глобальная 9
 - квазилокальная 9
 - локальная 9
- Неравенство Вайтмана 38
- Носитель векторного состояния 13
- Область Гординга 174
 - зависимости 44
 - клиновидная 36
 - нормальная 45
 - пространственчо полная 20
 - светоподобно монотонная 36
 - тотальная 47
- Обобщенная H -оценка 204
- Оболочка выпуклая 83
 - пространственноподобная 45
- Образ представления 14
- Оператор антилокальный 253
 - (форма) Вейля 252
 - диагонализуемый 14
 - заряда 161, 167
 - комплексной структуры 247
 - модулярный 13
 - переплетения 14
 - присоединенный 12
 - разложимый 15
 - суперотборный 128, 137
- Операция 8
- Перестановочные соотношения Вейля—Сигала 248, 266
- Поле алгебр фон Неймана 14
 - гильбертовых пространств 14
- Положительный элемент $*$ -алгебры Γ_1
 - — алгебры Борхерса 176
- Постулат аналитичности (квазианалитичности) вакуума 223
- Правило суперотбора 137
 - — Баргмана 131
 - — вакуумное 209
 - — динамическое 130
 - — дискретное 138
 - — дихотомическое 130, 136
 - — кинематическое 130
 - — непрерывное 138, 211
 - — по асимптотике потока электромагнитного поля 163
 - — по типу 130
 - — по унивалентности 130
- Преддуал 12
- Представление 14
 - Представление замкнутое 183
 - ковариантное 86
 - локально нормальное 54
 - невырожденное 14
 - неприводимое 14
 - нормальное 14
 - положительное 24
 - самосопряженное 183
 - — в существенном 183
 - сильно циклическое 183
 - точное 14
 - факторное 14
 - циклическое 14
 - эрмитово 182
 - Преобразование Боголюбова 269
 - Принцип суперпозиции 16, 142
 - — обобщенный 143
 - Причинная независимость 27
 - тень 22
 - Причинность 9, 20
 - примитивная 21
 - Эйнштейна 9, 21
 - Проектор абелев 13
 - бесконечный 13
 - конечный 13
 - минимальный 13
 - чисто бесконечный 13
 - Прообраз векторного состояния 13
 - Пространственноподобное дополнение 20
 - Прямой интеграл 14
 - Расщепленное W^* -включение 57
 - Редукция алгебры фон Неймана 12
 - Свойство Рее—Шлидера 32
 - Шлидера 27
 - F 54
 - Сектор суперотборный 128, 137
 - — абелев 145
 - — вакуумный 112, 209
 - — зарядовый 167
 - — когерентный 141
 - — неабелев 142
 - — солитонный 164
 - Сепаратор 12
 - Сеть локальных алгебр 19, 28
 - Симметрия внешняя 125
 - внутренняя 125, 132
 - спонтанно нарушенная 125
 - точная 125
 - След на алгебре фон Неймана 13
 - Слой временной 21
 - полный пространственноподобный 21
 - Состояние 8, 12
 - вакуумное 87
 - векторное 13
 - заряженное 167
 - квазисвободное 266
 - локальное 27
 - подчиненное 12

Состояние равномерно кластерное 95

- сильно кластерное 97
- смешанное 12
- факторизуемое 63
- чистое 12
- эргодическое 92

Спектр Арвесона 107

- элемента $*$ -алгебры 64

Спектральность 23

- сильная 23

Тензорное произведение бесконечное 257

- C^* , W^* 63, 64

Теорема Борхерса 80, 109

- Борхерса – Арвесона 108
- Борхерса о трубе 45
- (гипотеза) об алмазе 52, 278
- Рес – Шлидера 30
- обратная 32
- Шлидера 74

Теория Хаага – Араки 18

- Хаага – Кастлера 18
- R -класса 112
- локальная 149

Топологический заряд 161

Топология операторная равномерная 12

- сильная 12
- слабая 12
- ультрасильная 12
- ультраслабая 12

Тотализатор 12

Точное условное ожидание 42

Транзитивность локальности 58, 245

Труба будущего 38

- прошлого 38
- расширенная 126

Фактор 12

- типа III_0 , III_λ , III_1 14

Факторизация 54

- парная 54

Фермионизация 164

Фоковское пространство 246

Функционал Вайтмана 177

- на $*$ -алгебре 12
- нормальный 13
- положительный 12

Функционал точный 12

- G -инвариантный 86
- G -ковариантный 86

Центр алгебры фон Неймана 12

Центральное разложение 15

Центральный носитель проектора 13

- представления 14

Чистая фаза 141, 206

Эквивалентность когерентных секторов 148

- представлений слабая (физическая) 14, 18
- проекторов 13

Ядро представления 14

- функционала левое 177

B^* -алгебра 12

C^* -алгебра 12

C^* -динамическая система 86

- G -абелева 87

- , обладающая большой группой симметрии 87

- слабо асимптотически абелева 87

- асимптотически абелева по Стермеру 87

- равномерно асимптотически абелева 87

CPT -оператор 61, 228

G -коцикл 169

G -орбита 88

Op^* -алгебра 181

- вакуумная 199, 201

- класса I, II, III 190

Op^* -состояние 204

W^* -алгебра 12

$*$ -автоморфизм 14

- Йорданов 125

$*$ -алгебра 11

$*$ -морфизм 14

- локализованный 172

- G -транспортабельный 170

ОВ

я)

М-

87

ме-

пе-

2c.90r

С. С. ХОПЫЖКИН